УДК 517.956.4

©2003 р. О.В.Мартинюк

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ ВИЩОГО ПОРЯДКУ ПО t З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Встановлена коректна розв‘язність задачі Коші для одного класу еволюційних рівнянь вищого порядку за t з оператором Бесселя нескінченного порядку й початковими умовами, які є узагальненими функціями нескінченного порядку типу ультрарозподілів.

The correct solvability of Cauchy problem is established for one class of evolutionary equations of higher order on t with Bessel operator of infinite order and initial conditions, which are generalized functions of infinite order of ultradistribution.

1. Простір D'_+. Нагадаємо, що символом $D \equiv D(\mathbb{R})$ позначається множина всіх фінітних нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій. Сукупність усіх лінійних неперервних функціоналів на D зі слабкою збіжністю позначається символом $D' \equiv D'(\mathbb{R})$. Елементи D' називаються узагальненими функціями. Сукупність узагальнених функцій з D', які обертаються в нуль на півосі $(-\infty, 0)$, позначається через D'_+. Відомо [1], що для довільних $\{f, g\} \subset D'_+$ у просторі D'_+ існує згортка $f * g$, яка визначається співвідношенням

$$< f * g, \varphi >=$$

$$=< f(x) \times g(y), \eta_1(x)\eta_2(y)\varphi(x+y) >, \varphi \in D,$$

де η_1 і η_2 – довільні функції з простору $C^\infty(\mathbb{R})$, рівні одиниці в околі півосі $[0, +\infty)$ і нулю для досить великих від‘ємних значень аргументу. D'_+ утворює асоціативну й комутативну алгебру відносно операції згортки. Оскільки $\delta * f = f * \delta = f$, $\forall f \in D'_+$, то одиницею в ній є δ-функція Дірака.

Якщо узагальнена функція $f \equiv f_t$ залежить від параметра t, $f_t \in D'_+$ при кожному t, існує $\dfrac{\partial f_t}{\partial t}$, $g \in D'_+$, то тоді [1]

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}(f_t * g) = \frac{\partial^m f_t}{\partial t^m} * g, m \in \mathbb{N}.$$

Нехай узагальнена функція $f_\alpha \in D'_+$ залежить від параметра $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ і визначається формулою

$$f_\alpha(t) = \begin{cases} \theta(t)t^{\alpha-1}(\Gamma(\alpha))^{-1}, \alpha > 0, \\ f^{(m)}_{\alpha+m}(t), \alpha \leq 0, \end{cases}$$

де m - найменше серед натуральних чисел таке, що $m + \alpha > 0$, θ - функція Хевісайда. Правильними є наступні твердження [1]:

1) $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$: $f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}$.

2) Нехай $I(\alpha)f = f * f_\alpha$, $\forall f \in D'_+$. Тоді

а) $\forall f \in D'_+$: $I(0)f = f$;

б) $\forall f \in D'_+$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $I(-n)f = f^{(n)}$;

в) $\forall f \in D'_+$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $(I(n)f)^{(n)} = f$;

г) $\forall f \in D'_+$ $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$:

$$I(\alpha)I(\beta)f = I(\alpha+\beta)f.$$

Завдяки властивостям б) і в) оператори $I(\alpha)$ при $\alpha < 0$ називають операторами дробового диференціювання, а при $\alpha > 0$ – операторами дробового інтегрування в D'_+.

2. Простори типу W **та** $\overset{0}{W}$. Розглянемо функції $\omega_j : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, які є неперервними й зростаючими, причому $\omega_j(0) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \omega_j(x) = +\infty$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Для $x \geq 0$ покладемо $\Omega_j(x) = \displaystyle\int_0^x \omega_j(\xi)d\xi$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. Довизначимо функції Ω_j на $(-\infty, 0]$ парним чином. Поруч розглянемо функції μ_j, M_j, які володіють тими ж властивостями, що й функції ω_j, Ω_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

Символом $W_M^\Omega \equiv W_{M_1,\ldots,M_n}^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n}$ позначатимемо простір усіх цілих функцій $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, для яких

$$\exists c > 0 \ \exists a_j > 0 \ \exists b_j > 0, \ j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\forall z = x + iy \equiv (x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n) \in \mathbb{C}^n :$$

$$|\varphi(z)| \equiv |\varphi(z_1, \ldots, z_n)| \leq$$

$$\leq c \prod_{j=1}^{n} \exp\{-M_j(a_j x_j) + \Omega_j(b_j y_j)\}.$$

Мультиплікатором у просторі W_M^Ω буде, наприклад, ціла однозначна функція ψ: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) : \varepsilon_j > 0, j \in \{1, \ldots, n\},$$

$$\exists c_\varepsilon > 0 \ \forall z = x + iy \in \mathbb{C}^n :$$

$$|\psi(z)| \leq c_\varepsilon \prod_{j=1}^{n} \exp\{M_j(\varepsilon_j x_j) + \Omega_j(\varepsilon_j y_j)\}.$$

W_M^Ω є повним досконалим зліченно нормованим простором [2].

Символом $\overset{0}{W}{}_M^\Omega \equiv \overset{0}{W}{}_{M_1,\ldots,M_n}^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n}$ позначатимемо сукупність усіх цілих парних за кожною змінною функцій з простору W_M^Ω. Цей простір називатимемо основним простором або простором типу $\overset{0}{W}$, а його елементи - основними функціями. Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}^n$, які допускають аналітичне продовження в $\mathbb{C}^n$ і як функції комплексних змінних є елементами простору $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$, позначимо через $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R}^n)$. У просторі W_M^Ω визначені й неперервні операції диференціювання $\dfrac{\partial}{\partial z_j}$ та множення на z_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$. У просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$ визначені й є неперевними оператори $A_j = \dfrac{1}{z_j}\dfrac{\partial}{\partial z_j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, а також оператор $A := \prod_{j=1}^{n} A_j$ [3]. Звідси випливає, що у просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$ визначені і є неперервними оператори Бесселя

$$B_j = \frac{\partial^2}{\partial z_j^2} + \frac{2\nu_j + 1}{z_j}\frac{\partial}{\partial z_j}, \qquad (1)$$

$$\nu_j > -\frac{1}{2}, j \in \{1, \ldots, n\},$$

а також оператор $B = B_1 \ldots B_n$. У просторі ж $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R}^n)$ визначений і неперервний оператор Бесселя B_j, який відповідає змінній x_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, а також відповідний оператор B.

Нехай

$$\varphi(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_{2k} z^{2k} = \sum_{l=0} \sum_{|k|=l} c_{2k} z^{2k},$$

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n,$$

де $z^{2k} = z_1^{2k_1} \ldots z_n^{2k_n}$, $c_{2k} = \dfrac{1}{(2k)!}\dfrac{\partial^{(|2k|)}\varphi(0)}{\partial z^{2k}}$ – деяка ціла парна функція.

Оператором Бесселя нескінченного порядку в просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$ *називатимемо оператор*

$$\varphi(B) := \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|k|=l} c_{2k}(-B_1)^{k_1} \ldots (-B_n)^{k_n}$$

(B_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$ – оператори Бесселя, що визначаються співвідношенням (1)), якщо для довільної основної функції $\psi \in \overset{0}{W}{}_M^\Omega$ *ряд*

$$(\varphi(B)\psi)(z) =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|k|=l} c_{2k}(-1)^{|k|}(B_1^{k_1} \ldots B_n^{k_n})\psi(z) \equiv$$

$$\equiv \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{|k|=l} c_{2k}(-1)^{|k|}(B^k)\psi(z)$$

зображає основну функцію з простору $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$. Як і у праці [3] (одновимірний випадок), доводиться наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо ціла парна функція $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ – мультиплікатор у просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$, то у просторі $\overset{0}{W}{}_{M^1}^{\Omega^1} \equiv \overset{0}{W}{}_{M_1^1,\ldots,M_n^1}^{\Omega_1^1,\ldots,\Omega_n^1}$ визначений і є неперервним оператор Бесселя нескінченного порядку $\varphi(B)$ (тут Ω_j^1 та M_j^1 – функції, двоїсті за Юнгом до функцій M_j та Ω_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, відповідно).*

Зауваження. *Знайдена умова на функцію φ є не лише достатньою, але й необхідною для того, щоб оператор $\varphi(B)$ був визначений і неперервний у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega^1}_{M_1}$.*

Якщо A_φ - звуження оператора $\varphi(B)$ на простір $\overset{0}{W}{}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n)$, то для довільної функції $\psi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n)$ правильною є рівність

$$(A_\varphi\psi)(x) = F_B^{-1}[\varphi(\xi)F_B[\psi](\xi)](x), \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Тут F_B, F_B^{-1} – пряме та обернене перетворення Фур'є-Бесселя у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n)$:

$$\psi(\sigma) \equiv F_B[\gamma](\sigma) :=$$

$$:= \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \gamma(x) \prod_{s=1}^n j_{\nu_s}(\sigma_s x_s) x_s^{2\nu_s+1} dx_1 \ldots, dx_n,$$

$$\gamma \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n),$$

$$\gamma(x) = F_B^{-1}[\psi](x) =$$

$$= c_\nu \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \psi(\sigma) \prod_{s=1}^n j_{\nu_s}(\sigma_s x_s) \sigma_s^{2\nu_s+1} d\sigma_1 \ldots, d\sigma_n,$$

де $c_\nu = c_{\nu_1} \ldots c_{\nu_n}$, $c_{\nu_s} = (2^{2\nu_s}\Gamma^2(\nu_s+1))^{-1}$, $\nu_s > -1/2$, $s \in \{1,\ldots,n\}$, при цьому $F_B[\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n)] = \overset{0}{W}{}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n)$, оператор F_B: $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n) \to \overset{0}{W}{}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n)$ є неперервним (тобто перетворенням Фур'є-Бесселя простори $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n)$ відображаються в простори такого ж типу).

У просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n)$ визначена і є нескінченно диференційовною операція узагальненого зсуву аргументу $\psi \longmapsto T_x^\xi\psi$, де

$$T_x^\xi\psi(x) =$$

$$= b_\nu \int\limits_0^\pi \ldots \int\limits_0^\pi \psi(\sqrt{x_1^2+\xi_1^2-2x_1\xi_1\cos\omega_1}, \ldots,$$

$$\sqrt{x_n^2+\xi_n^2-2x_n\xi_n\cos\omega_n}) \times$$

$$\times \sin^{2\nu_1}\omega_1 \ldots \sin^{2\nu_n}\omega_n d\omega_1 \ldots d\omega_n,$$

$b_\nu = b_{\nu_1} \ldots b_{\nu_n}$, $b_{\nu_s} = \Gamma(\nu_s+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu_s+1/2))$, $\nu_s > -1/2$, $s \in \{1,\ldots,n\}$.

Користуючись цією властивістю, згортку узагальненої функції $f \in (\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n))'$ з основною функцією $\psi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n)$ визначимо за допомогою формули

$$(f * \psi)(x) =< f_\xi, T_x^\xi\psi(x) >\equiv< f_\xi, T_\xi^x\psi(\xi) >$$

(тут f_ξ позначає дію функціонала f за змінною ξ).

3. Задача Коші. Символом $\overset{0}{P}{}^{\Omega}_{M} \equiv \overset{0}{P}{}^{\Omega_1,\ldots,\Omega_n}_{M_1,\ldots,M_n}$ позначимо клас цілих однозначних функцій ψ: $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами в просторі W^{Ω}_{M} і такими, що $e^\varphi \in W^{\Omega}_{M}$. Нехай $\varphi \in \overset{0}{P}{}^{\Omega}_{M}$, A_φ - оператор Бесселя нескінченного порядку, побудований за функцією φ.

Розглянемо рівняння

$$D_t^\beta u(t,x) = D_t^{\{\beta\}} A_\varphi^{-[\beta]} u(t,x), \tag{2}$$

$$(t,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}^n_+ \equiv \Omega_+,$$

з початковою умовою

$$D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot)|_{t=0} = f, \quad f \in (\overset{0}{W}{}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n))'. \tag{3}$$

Тут $\beta \in (-\infty, 0)$, $[\beta]$ – ціла, а $\{\beta\}$ – дробова частини числа β, D_t^β — оператор дробового диференціювання, який діє за змінною t у просторі D'_+.

Під розвязком задачі Коші (2), (3) розумітимемо функцію u, яка задовольняє умови:

1) $u(\cdot,x) \in D'_+ \cap C^{-[\beta]}((0,\infty))$ при кожному $x \in \mathbb{R}^n_+$;

2) $u \in D(A_\varphi^{-[\beta]})$, задовольняє рівняння (2) та початкову умову (3) у тому сенсі, що $D_t^{\{\beta\}} u(t,\cdot) \to f$, $t \to +0$, у просторі $(\overset{0}{W}{}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n))'$.

Правильним є наступне основне твердження.

Теорема 2. *Для того, щоб задача Коші (2), (3) була коректно розв'язною у просторі $(\overset{0}{W}{}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n))'$ та*

1) її розв'язок $u(t,\cdot)$ при кожному фіксованому t належав до простору $(\overset{0}{W}{}^{\Omega^1}_{M^1}(\mathbb{R}^n))'$;

2) $u(t,x) = \theta(t)z(t,x) * f_{-\{\beta\}}(t)$, *де* $z(t,x) = (f * G)(t,x)$, $G(t,x) = F_B^{-1}[\exp\{t\varphi(\sigma)\}](x)$, $(t,x) \in \Omega_+$, *необхідно й досить, щоб узагальнена функція* $F_B[f]$ *була мультиплікатором у просторі* $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}^n)$.

Зауваження. Якщо $\beta = -p$, $p \in \mathbb{N}$, то рівняння (2) набуває вигляду

$$\frac{\partial^p u}{\partial t^p} = A_\varphi^p u, p \in \mathbb{N}, (t,x) \in \Omega_+.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики.— М.: Наука, 1988.— 512 с.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

3. *Городецький В.В., Мартинюк О.В., Шевчук Н.М.* Оператори Бесселя нескінченного порядку // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— Чернівці: Прут, 2001.— Вип. 7.— С.61—70.

Стаття надійшла до редколегії 15.01.2003