УДК 517.53

©2003 р. **Н.Є.Лінчук, С.С.Лінчук**

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

УМОВИ БАЗИСНОСТІ ДЕЯКИХ КЛАСІВ СИСТЕМ У ПРОСТОРАХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Одержано необхідні та достатні умови базисності деяких систем у просторах послідовностей, що наділені нормальною топологією Кете

Necessary and sufficient conditions basis of some systems in space of sequences which to allotment topology of Kete is obtained.

Нехай E — векторний простір послідовностей комплексних чисел, що містить простір усіх фінітних послідовностей, а E^α — простір взаємний за Кете до простору E, тобто

$$E^\alpha = \{v : p_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k v_k| < +\infty,$$

$$\forall x = (x_k) \in E\}.$$

Нормальна топологія ν на E визначається набором переднорм $\{p_v : v \in E^\alpha\}$. Простір E називається досконалим, якщо $(E^\alpha)^\alpha = E$. Простір (E, ν) — повний тоді й тільки тоді, коли E — досконалий. Система ортів $\{e_n :\geq 0\}$, де $e_n = (\delta_{kn})_{k=0}^\infty$, а δ_{kn} – символ Кронекера, утворює абсолютний базис у просторі (E, ν). Базис $\{x_n\}$ простору (E, ν) називається еквівалентним до базису $\{e_n\}$, якщо існує ізоморфізм L простору (E, ν) такий, що $Le_n = x_n, n = 0, 1, ...$

Нехай (α_n)– фіксована послідовність комплексних чисел. У цій статті вивчаються необхідні й достатні умови того, що системи $\{s_n = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e_k\}_{n=0}^\infty$ і $\{r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k e_k\}_{n=0}^\infty$ утворюють у просторі (E, ν) базис, що еквівалентний до базису з ортів.

Наведемо канонічне зображення лінійних неперервних операторів, що діють у просторах послідовностей [1].

Твердження. *Нехай E – досконалий векторний простір послідовностей комплексних чисел. Тоді загальний вигляд лінійних неперервних операторів L, що діють в (E, ν), дається формулою*

$$Lx = \sum_{n=0}^{\infty} x_n a_n,$$

де $x = (x_n) \in E,\ a_n \in E, n = 0, 1, ...$ і виконується умова

$$(p_v(a_n)) \in E^\alpha\ \forall v \in E^\alpha.$$

Припустимо, що послідовність комплексних чисел (α_n) така, що відповідна система $\{s_n\}$ утворює в досконалому просторі (E, ν) базис, що еквівалентний до базису з ортів. Тоді існує ізоморфізм L простору (E, ν) такий, що $Le_n = s_n, n = 0, 1, ...$ Оскільки L є неперервним, то згідно з твердженням $(p_v(s_n)) \in E^\alpha\ \forall v \in E^\alpha$, тобто

$$(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k v_k) \in E^\alpha\ \forall v \in E^\alpha. \tag{1}$$

Звідси й властивості нормальності простору E^α зокрема випливає , що

$$(\alpha_n v_n) \in E^\alpha\ \forall v \in E^\alpha. \tag{2}$$

Оскільки оператор L є ін'єктивним, то

$$\alpha_n \neq 0, n = 0, 1, ... \tag{3}$$

Нехай L^{-1} – оператор, обернений до L . Індукцією за n легко переконатися в тому, що

$$L^{-1} e_0 = \alpha_0^{-1} e_0,\ L^{-1} e_n =$$
$$= \alpha_n^{-1}(e_n - e_{n-1}), n = 1, 2, ...$$

З умови неперервності оператора L^{-1} випливає, що

$$\alpha_n^{-1} v_n \in E^\alpha \ \forall v \in E^\alpha. \qquad (4)$$

Навпаки, покажемо, що при виконанні умов (1)-(4) система $\{s_n\}$ утворює в (E,ν) базис, який еквівалентний до $\{e_n\}$. Для цього розглянемо оператор L, що діє в (E,ν) за правилом: $Lx = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n s_n$, де $x = (x_n) \in E$. Оскільки виконується умова (1), то згідно з твердженням, оператор L лінійно й неперервно діє в (E,ν). Розглянемо оператор L^{-1}, що діє в (E,ν) за правилом:

$$L^{-1}x = \alpha_0^{-1} x_0 e_0 +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{-1} x_n (e_n - e_{n-1}), x = (x_n) \in E.$$

З умов (1), (2), (4) і властивості нормальності простору E^α випливає, що L^{-1} неперервно діє в (E,ν) . Зрозуміло, що оператор L^{-1} обернений до оператора L. Оскільки $Le_n = s_n, n = 0, 1, ...$, то система $\{s_n\}$ дійсно утворює базис в (E,ν), що еквівалентний до $\{e_n\}$.

Зауважимо, що для досконалих просторів E умови (1), (2) і (4) в сукупності рівносильні до наступних:

$$(\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|) \in E \ \forall x = (x_n) \in E \qquad (5)$$

$$(\alpha_n x_n) \in E, (\alpha_n^{-1} x_n) \in E \qquad (6)$$

$$\forall x = (x_n) \in E.$$

Таким чином, доведена

Теорема 1. *Нехай E – досконалий векторний простір послідовностей комплексних чисел і (α_n) – деяка послідовність комплексних чисел. Для того щоб система $\{s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k e_k\}$ утворювала в просторі (E,ν) базис, що еквівалентний до $\{e_n\}$, необхідно й досить, щоб виконувалися умови (3), (5) і (6).*

Аналогічно як і теорема 1 доводиться теорема 2.

Теорема 2. *При виконанні умов теореми 1 система $\{r_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \alpha_k e_k\}$ тоді й тільки тоді утворює в просторі (E,ν) базис, що еквівалентний до $\{e_n\}$, коли виконуються умови (3), (6) і*

$$(\sum_{k=0}^{n} |x_k|) \in E \ \forall x = (x_n) \in E. \qquad (7)$$

Зауваження 1. *При доведенні теореми 1 відзначалося, що для досконалого простору E умова (5) рівносильна тому, що*

$$(\sum_{k=0}^{n} |v_k|) \in E^\alpha, \forall v \in E^\alpha. \qquad (8)$$

Зауваження 2. *Умови (3) і (6) рівносильні тому, що діагональний оператор A, який визначається рівністю $Ax = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n x_n e_n$, є ізоморфізмом простору (E,ν).*

Оскільки умови (5) і (7) не можуть одночасно виконуватися для жодного досконалого простору послідовностей, то з теорем 1 і 2 випливає наслідок

Наслідок 1. *Не існує досконалого векторного простору послідовностей комплексних чисел E і послідовності комплексних чисел (α_n) такої, щоб відповідні системи $\{s_n\}$ і $\{r_n\}$ одночасно утворювали базиси в (E,ν), що еквівалентні до $\{e_n\}$.*

Враховуючи природний ізоморфізм основних просторів аналітичних функцій і відповідних просторів послідовностей (див. [2-4]) легко переформулювати теореми 1 і 2 для випадку просторів аналітичних функцій.

Таким способом ми одержимо критерії того, що системи послідовних частинних сум

$$\{S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k\}$$

і послідовних залишків

$$\{R_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k z^k\}$$

деякої аналітичної функції $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$ утворюють квазістепеневий у розумінні М.Г. Хапланова базис у просторі аналітичних функцій H.

Не зупиняючись на формулюваннях відповідних тверджень, зауважимо, що для просторів функцій, аналітичних у кругових областях, необхідні й достатні умови квазістепеневої базисності вказаних вище систем, були одержані матричним методом М.Г.Хаплановим [5].

Нехай v_σ (відповідно $\overline{v_\sigma}$) – простір функцій, що зображаються рядами Діріхле вигляду $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n e^{\lambda_n z}$, де (λ_n) – послідовність додатних чисел, яка монотонно зростає і прямує до ∞, причому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{lnn}{\lambda_n} = 0$, і є аналітичними в півплощинах $Rez < \sigma$ (відповідно $Rez \leq \sigma$) (див.[6]). Використовуючи ізоморфізм просторів v_σ та $\overline{v_\sigma}$ і відповідних просторів послідовностей комплексних чисел [6], з теорем 1 і 2 одержуємо критерії того, що системи функцій

$$\{S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k e^{\lambda_k z}\}_{n=0}^{\infty}$$

(відповідно

$$\{R_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k e^{\lambda_k z}\}_{n=0}^{\infty})$$

утворюють квазістепеневі базиси у відповідних просторах. Ці умови позначатимемо через $A)$ (відповідно $B)$). Наведемо ці критерії (умова $\alpha_n \neq 0$ скрізь не наводиться.)

I.$H = v_\sigma$,

$$A) 0 < \sigma < +\infty i \lim_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} = 1,$$

або $\sigma = +\infty$ і

$$0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} < +\infty;$$

$B) -\infty < \sigma \leq 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} = 1.$

II.$H = \overline{v_\sigma}$,

$$A) 0 \leq \sigma < +\infty i \lim_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} = 1,$$

$B) -\infty < \sigma < 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} |\alpha_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} = 1$

або $\sigma = -\infty$ і

$$0 < \underline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} |\alpha_n|^{\frac{1}{\lambda_n}} < +\infty.$$

Результати прикладів I і II для випадку $\sigma = 0$ були одержані матричним методом М.Г. Хаплановим у [6].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Подпорин В.П.* О представлении линейных операторов в виде дифференциальных операторов бесконечного порядка // Сиб. мат. журн.— 1976.— **7**, N 1.— С.148—159.

2. *Kothe G.* Topologische lineare Raume.— Springer Verlag, Berlin, 1960.

3. *Коробейник Ю.Ф.* О некоторых характеристических свойствах дифференциальных операторов бесконечного порядка // Изв.АН СССР. Сер. матем.— 1966.— **30**, N 5.— С.993—1016.

4. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сдвига на числовых семействах.— Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1983.— 154 с.

5.*Хапланов М.Г.* Матричный признак базиса в пространстве аналитических функций // Докл. АН СССР.— 1951.— **80**, N 2.— С.177—180.

6. *Хапланов М.Г.* О пространстве аналитических функций, представимых одним классом рядов Дирихле // Сиб. матем. журн.— 1976.— **17**, N 5.— С.1141—1159.

Стаття надійшла до редколегії 2.12.2002