УДК 517.91:532.2

©2003 р. М.П.Ленюк, Н.П.Олійник

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ГІБРИДНІ ІНТЕГРАЛЬНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ТИПУ БЕССЕЛЯ-ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ -...-БЕССЕЛЯ-ЛЕЖАНДРА-БЕССЕЛЯ

Методом дельтоподібної послідовності на полярній осі $r \geq R_0 > 0$ з $2n$ точками спряження побудовано гібридні інтегральні перетворення типу Бесселя - Лежандра - Бесселя - ... - Бесселя - Лежандра - Бесселя.

Hybrid integral transition of Bessel - Legendres - Bessel -... - Bessel - Legendres - Bessel type are constructed with the help of delta-form sequence method on polar half-axis $r \geq R_0 > 0$ with $2n$ dots of conjugation.

Розглянемо спектральну задачу Штурма-Ліувілля про конструкцію на множині

$$I_{2n}^{+} = \{r : r \in \bigcup_{k=0}^{2n} (R_k, R_{k+1});\ R_0 > 0,$$

$$R_{2n+1} = \infty)\}$$

розв'язку сепаратної лінійної системи звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку

$$(B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}} + q_{2k+1}^2) v_{2k+1}(r) = 0,$$

$$r \in (R_{2k}, R_{2k+1}), \quad k = \overline{0,n},$$

$$(\Lambda_{\mu_k} + q_{2k}^2) v_{2k}(r) = 0,$$

$$r \in (R_{2k-1}, R_{2k}), \quad k = \overline{1,n} \tag{1}$$

за крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) v_1 \Big|_{r=R_0} = 0,$$

$$\left[r^{\alpha_n+1} \frac{d}{dr} v_{2n+1} \right] \Big|_{r=\infty} = 0 \tag{2}$$

та умовами спряження

$$\Big[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k \right) v_k -$$

$$- \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k \right) v_{k+1} \Big] \Big|_{r=R_k} = 0,$$

$$j = 1, 2; k = \overline{1, 2n}. \tag{3}$$

Тут $q_k^2 = a_k^{-2} b_k^2(\lambda) \equiv (\lambda^2 + \gamma_k^2) a_k^{-2}$, $a_k > 0$, $\gamma_k \geq 0$, $\alpha_{jm}^k \geq 0$, $\beta_{jm}^k \geq 0$, $\lambda \in [0, +\infty)$, $c_{ik} = \alpha_{2i}^k \beta_{1i}^k - \alpha_{1i}^k \beta_{2i}^k$, $c_{1k} \cdot c_{2k} > 0$,

$$B_{\nu,\alpha} = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2\alpha+1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{\nu^2 - \alpha^2}{r^2}$$

($\nu \geq \alpha \geq -1/2$) - диференціальний оператор Бесселя [1],

$$\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2} + \mathrm{cth} r \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{\mathrm{sh}^2 r}$$

($\mu \geq 0$) - диференціальний оператор Лежандра [2].

Фундаментальну систему розв'язків для рівняння $(B_{\nu,\alpha} + q^2) v = 0$ утворюють функції $J_{\nu,\alpha}(qr) = (qr)^{-\alpha} J_\nu(qr)$ і $N_{\nu,\alpha}(qr) = (qr)^{-\alpha} N_\nu(qr)$ [1], а для рівняння $(\Lambda_\mu + q^2) v = 0$ - функції $P_{-1/2+iq}^\mu(\mathrm{ch} r)$ і $\mathcal{L}_{-1/2+iq}^\mu(\mathrm{ch} r) = 2\pi^{-1} e^{i\mu\pi} Q_{-1/2+iq}^\mu(\mathrm{ch} r)$ [2], або такі дві дійсні функції [2]:

$$A_{-1/2+iq}^\mu(\mathrm{ch} r) = \frac{i \mathrm{th} \pi q P_{-1/2+iq}^\mu(\mathrm{ch} r)}{\cos \mu\pi + i \mathrm{th} \pi q \cdot \sin \mu\pi} +$$

$$+ \frac{\cos \mu\pi \mathcal{L}_{-1/2+iq}^\mu(\mathrm{ch} r)}{\cos \mu\pi + i \mathrm{th} \pi q \cdot \sin \mu\pi},$$

$$B_{-1/2+iq}^\mu(\mathrm{ch} r) = \frac{P_{-1/2+iq}^\mu(\mathrm{ch} r)}{\cos \mu\pi + i \mathrm{th} \pi q \cdot \sin \mu\pi} -$$

$$- \frac{\sin \mu\pi \mathcal{L}_{-1/2+iq}^\mu(\mathrm{ch} r)}{\cos \mu\pi + i \mathrm{th} \pi q \cdot \sin \mu\pi}.$$

Визначимо величини та функції:

$$u^{k1}_{\nu,\alpha;mj}(q_sR_k)=\left(\alpha^k_{mj}\frac{\nu-\alpha}{R_k}+\beta^k_{mj}\right)J_{\nu,\alpha}(q_sR_k)-$$

$$-\alpha^k_{mj}q_s^2R_kJ_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_k),$$

$$u^{k2}_{\nu,\alpha;mj}(q_sR_k)=\left(\alpha^k_{mj}\frac{\nu-\alpha}{R_k}+\beta^k_{mj}\right)\times$$

$$\times N_{\nu,\alpha}(q_sR_k)-\alpha^k_{mj}q_s^2R_kN_{\nu+1,\alpha+1}(q_sR_k),$$

$$Y^{\mu,m1}_{-1/2+i\lambda;sj}(\mathrm{ch}R_m)=\alpha^m_{sj}\mathrm{sh}R_mA^{\mu'}_{-1/2+i\lambda}(\mathrm{ch}R_m)+$$

$$+\beta^m_{sj}A^{\mu}_{-1/2+i\lambda}(\mathrm{ch}R_m), \qquad (4)$$

$$Y^{\mu,m2}_{-1/2+i\lambda;sj}(\mathrm{ch}R_m)=\alpha^m_{sj}\mathrm{sh}R_mB^{\mu'}_{-1/2+i\lambda}(\mathrm{ch}R_m)+$$

$$+\beta^m_{sj}B^{\mu}_{-1/2+i\lambda}(\mathrm{ch}R_m),$$

$$\Psi^n_{\nu,\alpha;km}(q_sR_n,q_sx)=u^{n1}_{\nu,\alpha;km}(q_sR_n)\times$$

$$\times N_{\nu,\alpha}(q_sx)-u^{n2}_{\nu,\alpha;km}(q_sR_n)J_{\nu,\alpha}(q_sx),$$

$$F^{\mu,m}_{-1/2+i\lambda;sj}((\mathrm{ch}r,\mathrm{ch}R_m)=Y^{\mu,m2}_{-1/2+i\lambda;sj}(\mathrm{ch}R_m)\times$$

$$\times A^{\mu}_{-1/2+i\lambda}(\mathrm{ch}r)-Y^{\mu,m1}_{-1/2+i\lambda;sj}(\mathrm{ch}R_m)\times$$

$$\times B^{\mu}_{-1/2+i\lambda}(\mathrm{ch}r),$$

$$Z(q,\mu,R)=\frac{\Gamma(1/2+iq+\mu)}{\Gamma(1/2+iq-\mu)}\frac{1}{\mathrm{sh}R}\times$$

$$\times\frac{1}{(\mathrm{ch}\mu\pi+i\mathrm{th}\pi q\cdot\sin\mu\pi)},$$

$$Z(q_{2k},\mu_k,R_{2k-1})=Z_k,$$

$$\sigma_{2n+1}=\frac{1}{a^2_{2n+1}},\quad \sigma_{2k}=\frac{1}{a^2_{2k}}\prod_{s=2k}^{2n}\frac{c_{1s}}{c_{2s}}\times$$

$$\times\frac{\prod\limits_{s=k}^{n}R_{2s}^{2\alpha_{s+1}+1}\prod\limits_{s=k+1}^{n}\mathrm{sh}R_{2s-1}}{\prod\limits_{s=k+1}^{n}R_{2s-1}^{2\alpha_s+1}\prod\limits_{s=k}^{n}\mathrm{sh}R_{2s}},\quad \sigma_{2k+1}=$$

$$=\frac{1}{a^2_{2k+1}}\prod_{s=2k+1}^{2n}\frac{c_{1s}}{c_{2s}}\prod_{s=k+1}^{n}\frac{R_{2s}^{2\alpha_{s+1}+1}\mathrm{sh}R_{2s-1}}{R_{2s-1}^{2\alpha_s+1}\mathrm{sh}R_{2s}}.$$

Безпосередньо перевіряється, що розв'язком спектральної задачі (1)—(3) є функції

$$v_1(r,\lambda)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n}\prod_{s=1}^{2n}c_{2s}\prod_{s=1}^{n}\frac{q_{2s+1}}{(q_{2s+1}R_{2s})^{2\alpha_{s+1}+1}}\times$$

$$\times\prod_{s=k+1}^{n}Z_s\Psi^0_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1r,q_1R_0);$$

$$v_2(r,\lambda)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n-2k+1}\times$$

$$\times\prod_{s=2k}^{2n}c_{2s}\prod_{s=k}^{n}\frac{q_{2s+1}}{(q_{2s+1}R_{2s})^{2\alpha_{s+1}+1}}\times$$

$$\times\prod_{s=k+1}^{n}Z_s\Big[F^{\mu_k,2k-1}_{-1/2+iq_{2k};12}(\mathrm{ch}r;\mathrm{ch}R_{2k-1})\times$$

$$\times\mathcal{B}_{\overline{(1,4k-4)},4k-2;\overline{(1,4k-3)}}-$$

$$-F^{\mu_k,2k-1}_{-1/2+iq_{2k};22}(\mathrm{ch}r;\mathrm{ch}R_{2k-1})\times$$

$$\times\mathcal{B}_{\overline{(1,4k-3)};\overline{(1,4k-3)}}\Big],\quad 1\le k\le n,$$

$$v_{2k+1}(r,\lambda)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n-2k}\prod_{s=2k+1}^{2n}c_{2s}\times$$

$$\times\prod_{s=k+1}^{n}\frac{q_{2s+1}}{(q_{2s+1}R_{2s})^{2\alpha_{s+1}+1}}\prod_{s=k+1}^{n}Z_s\times$$

$$\times\Big[\Psi^{2k}_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};22}(q_{2k+1}r;q_{2k+1}R_{2k})\times$$

$$\times\mathcal{B}_{\overline{(1,4k-1)};\overline{(1,4k-1)}}-$$

$$-\Psi^{2k}_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1};12}(q_{2k+1}r;q_{2k+1}R_{2k})\times$$

$$\times\mathcal{B}_{\overline{(1,4k-2)},4k;\overline{(1,4k-1)}}\Big],\quad 1\le k\le n-1,\qquad (5)$$

$$v_{2n+1}(r,\lambda)=\Psi^{2n}_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};22}(q_{2n+1}r;q_{2n+1}R_{2n})\times$$

$$\times\mathcal{B}_{\overline{(1,4n-1)};\overline{(1,4n-1)}}-$$

$$-\Psi^{2n}_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};12}(q_{2n+1}r;q_{2n+1}R_{2n})\times$$

$$\times\mathcal{B}_{\overline{(1,4n-2)},4n;\overline{(1,4n-1)}}\equiv$$

$$\equiv\omega_1(\lambda)N_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(q_{2n+1}r)-$$

$$-\omega_2(\lambda)J_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}(q_{2n+1}r),$$

$$\omega_j(\lambda)=U^{2n,j}_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};22}(q_{2n+1}R_{2n})\times$$

$$\times\mathcal{B}_{\overline{(1,4n-1)};\overline{(1,4n-1)}}-U^{2n,j}_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1};12}(q_{2n+1}R_{2n})\times$$

$$\times\mathcal{B}_{\overline{(1,4n-2)},4n;\overline{(1,4n-1)}}(j=1,2).$$

У формулах (5) беруть участь визначники $\mathcal{B}_{\overline{(1,j)};\overline{(1+j)}}$, $\mathcal{B}_{\overline{(1,j-1)},j+1;\overline{(1,j)}}$ прямокутної блочної матриці $(b_{p,k})$ розмірності $4n\times(4n-$

1), в якій відмінними від нуля є лише елементи вигляду:

$$b_{j;1} = u^{02}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0)u^{11}_{\nu_1,\alpha_1;j1}(q_1R_1)-$$

$$-u^{01}_{\nu_1,\alpha_1;11}(q_1R_0)u^{12}_{\nu_1,\alpha_1;j1}(q_1R_1),$$

$$b_{4(l-1)+j;4l-3+s} = -Y^{2l-1,s;\mu_l}_{-1/2+iq_{2l};j2}(\text{ch}R_{2l-1}),$$

$$b_{4l-2+j;4l-3+s} = Y^{2l,s;\mu_l}_{-1/2+iq_{2l};j1}(\text{ch}R_{2l}),$$

$$b_{4m-2+j;4m-1+s} = -u^{2m,s}_{\nu_{m+1},\alpha_{m+1};j2}(q_{2m+1}R_{2m}),$$

$$b_{4m+j;4m-1+s} = u^{2m+1,s}_{\nu_{m+1},\alpha_{m+1};j1}(q_{2m+1}R_{2m+1}),$$

де $j = 1, 2$, $s = 1, 2$, $1 \le l \le n$, $1 \le m \le n-1$.

Індекс $(\overline{1,j})$ вказує, що в утворенні даного визначника беруть участь рядки (стовпці) матриці з номерами від 1 до j, а індексом $(\overline{1,j-1}), j+1$ відмічається, що j-ий рядок замінюється $(j+1)$-им.

З допомогою одиничної функції Хевісайда $\theta(r)$ побудуємо спектральну функцію

$$V(r,\lambda) = \sum_{j=1}^{2n} v_j(r,\lambda)\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)+$$

$$+v_{2n+1}(r,\lambda)\theta(r-R_{2n}), \qquad (6)$$

вагову функцію

$$\sigma(r) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{2j}\theta(r-R_{2j-1})\theta(R_{2j}-r)\text{sh}r+$$

$$+\sum_{j=0}^{n-1} \sigma_{2j+1}\theta(r-R_{2j})\theta(R_{2j+1}-r)r^{2\alpha_{j+1}+1}+$$

$$+\sigma_{2n+1}\theta(r-R_{2n})r^{2\alpha_{n+1}+1}, \qquad (7)$$

характеристичну функцію

$$\chi(r) = \sum_{j=1}^{2n} a_j^2\theta(r-R_{j-1})\theta(R_j-r)+$$

$$+a^2_{2n+1}\theta(r-R_{2n}) \qquad (8)$$

і спектральну густину

$$\Omega(\lambda) = \lambda[q_{2n+1}(\lambda)]^{2\alpha_{n+1}}(\omega_1^2(\lambda)+\omega_2^2(\lambda))^{-1}. \qquad (9)$$

Наявність спектральної функції $V(r,\lambda)$, вагової функції $\sigma(r)$ і спектральної густини $\Omega(\lambda)$ дозволяє написати інтегральне зображення міри Дірака [3] на множині I^+_{2n}:

$$\frac{\delta(r-\rho)}{\sigma(r)} = \int_0^\infty V(r,\lambda)V(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda. \qquad (10)$$

Воно породжує пряме H_{2n} і обернене H^{-1}_{2n} гібридне інтегральне перетворення Бесселя - Лежандра - Бесселя - ... - Бесселя - Лежандра - Бесселя на осі $r \ge R_0 > 0$ з $2n$ точками спряження

$$H_{2n}[f(r)] = \int_{R_0}^\infty f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)dr \equiv \tilde{f}(\lambda), \qquad (11)$$

$$H^{-1}_{2n}[\tilde{f}(\lambda)] = \int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda. \qquad (12)$$

Математичним обгрунтуванням формул (11), (12) є твердження.

Теорема 1. *Нехай функція $f(r)$ визначена й кусково-неперервна на I^+_{2n}, а функція*

$$g(r) = f(r)\Big[\sum_{k=0}^{n-1} r^{\alpha_{k+1}+1/2}\theta(R_{2k+1}-r)\theta(r-R_{2k})+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\text{sh}r}\,\theta(R_{2k}-r)\theta(r-R_{2k-1})+$$

$$+\theta(r-R_{2n})r^{\alpha_{n+1}+1/2}\Big]$$

абсолютно інтегровна й має обмежену варіацію на множині (R_0,∞). Тоді для $r \in I^+_{2n}$ справедливе інтегральне зображення

$$\frac{1}{2}[f(r-0)+f(r+0)] =$$

$$= \int_0^\infty V(r,\lambda)\int_{R_0}^\infty f(\rho)V(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho\,\Omega(\lambda)d\lambda. \qquad (13)$$

Доведення. Для функцій $v_{2k+1}(r,\lambda)$ і $v_{2k+1}(r,\beta)$ $(k = \overline{0,n})$ та $v_{2k}(r,\lambda)$ і $v_{2k}(r,\beta)$ $(k = \overline{1,n})$ справджуються рівності

$$(B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}} + q^2_{2k+1}(\lambda))v_{2k+1}(r,\lambda) = 0, \qquad (14)$$

$$(B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}+q_{2k+1}^2(\beta))v_{2k+1}(r,\beta)=0, \quad (15)$$

$$(\Lambda_{\mu_k}+q_{2k}^2(\lambda))v_{2k}(r,\lambda)=0, \quad (16)$$

$$(\Lambda_{\mu_k}+q_{2k}^2(\beta))v_{2k}(r,\beta)=0. \quad (17)$$

Помножимо рівність (14) на $r^{2\alpha_{k+1}+1}v_{2k+1}(r,\beta)$, а (15) – на $r^{2\alpha_{k+1}+1}v_{2k+1}(r,\lambda)$ і віднімемо від першої другу

$$v_{2k+1}(r,\lambda)v_{2k+1}(r,\beta)r^{2\alpha_{k+1}+1}=\frac{a_{2k+1}^2}{\lambda^2-\beta^2}\times$$
$$\times\frac{d}{dr}\Big[r^{2\alpha_{k+1}+1}\Big(v_{2k+1}(r,\lambda)\frac{d}{dr}v_{2k+1}(r,\beta)-$$
$$-v_{2k+1}(r,\beta)\frac{d}{dr}v_{2k+1}(r,\lambda)\Big)\Big], \quad 0\le k\le n. \quad (18)$$

Помножимо співвідношення (16) на $v_{2k}(r,\beta)\mathrm{sh}r$, а (17) – на $v_{2k}(r,\lambda)\mathrm{sh}r$ і віднімемо одне від іншого

$$v_{2k}(r,\lambda)v_{2k}(r,\beta)\mathrm{sh}r=\frac{a_{2k}^2}{\lambda^2-\beta^2}\times$$
$$\times\frac{d}{dr}\Big[\mathrm{sh}r\Big(v_{2k}(r,\lambda)\frac{d}{dr}v_{2k}(r,\beta)-$$
$$-v_{2k}(r,\beta)\frac{d}{dr}v_{2k}(r,\lambda)\Big)\Big], \quad 1\le k\le n. \quad (19)$$

Задамо деяке досить велике число $A>R_{2n}$.

Рівність (18) помножимо на σ_{2k+1} і проінтегруємо від R_{2k} до R_{2k+1} для $0\le k\le n-1$, а у випадку $k=n$ проінтегруємо в межах від R_{2n} до A.

Рівність (19) помножимо на σ_{2k} і проінтегруємо від R_{2k-1} до R_{2k} для $1\le k\le n$.

Просумувавши всі інтеграли, одержимо, що

$$\int\limits_{R_0}^{A}V(r,\lambda)V(r,\beta)\sigma(r)dr=\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_{R_{2k}}^{R_{2k+1}}v_{2k+1}(r,\lambda)\times$$
$$\times v_{2k+1}(r,\beta)r^{2\alpha_{k+1}+1}\sigma_{2k+1}dr+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{R_{2k-1}}^{R_{2k}}v_{2k}(r,\lambda)v_{2k}(r,\beta)\mathrm{sh}r\sigma_{2k}dr+$$
$$+\int\limits_{R_{2n}}^{A}v_{2n+1}(r,\lambda)v_{2n+1}(r,\beta)r^{2\alpha_{n+1}+1}\sigma_{2n+1}dr.$$

Врахувавши співвідношення (18), (19), крайову умову (2) та значення σ_k, отримаємо, що

$$\int\limits_{R_0}^{A}V(r,\lambda)V(r,\beta)\sigma(r)dr=\frac{1}{\lambda^2-\beta^2}\Big[A^{2\alpha_{n+1}+1}\times$$
$$\times\Big(v_{2n+1}(A,\lambda)\frac{d}{dr}v_{2n+1}(A,\beta)-$$
$$-v_{2n+1}(A,\beta)\frac{d}{dr}v_{2n+1}(A,\lambda)\Big)\Big]. \quad (20)$$

Для довільних додатних чисел c і d ($c<d$) та довільної скінченної функції $\Psi(\lambda)$, заданої на сегменті $[c,d]$, обчислимо подвійний інтеграл

$$\int\limits_{R_0}^{\infty}\int\limits_{c}^{d}\Psi(\lambda)V(r,\lambda)d\lambda V(r,\beta)\sigma(r)dr=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\int\limits_{R_0}^{A}\Big(\int\limits_{c}^{d}(\Psi(\lambda)V(r,\lambda)d\lambda)V(r,\beta)\sigma(r)\Big)dr=$$
$$=\lim_{A\to\infty}\int\limits_{c}^{d}\Big(\int\limits_{R_0}^{A}\Psi(\lambda)V(r,\lambda)V(r,\beta)\sigma(r)dr\Big)d\lambda. \quad (21)$$

Згідно із формулою (20), інтеграл (21) зобразимо у вигляді

$$\lim_{A\to\infty}\int\limits_{c}^{d}\frac{\Psi(\lambda)}{\lambda^2-\beta^2}\Big[A^{2\alpha_{n+1}+1}\Big(v_{2n+1}(A,\lambda)\times$$
$$\times\frac{d}{dr}v_{2n+1}(A,\beta)-v_{2n+1}(A,\beta)\times$$
$$\times\frac{d}{dr}v_{2n+1}(A,\lambda)\Big)\Big]d\lambda. \quad (22)$$

Оскільки $0<c<d$, то при обчисленні границі (22) скористаємося для функцій v_{2n+1} і $\frac{d}{dr}v_{2n+1}$ асимптотичними формулами при великих значеннях аргументу A, беручи

до уваги асимптотику циліндричних функцій 1-го і 2-го роду дійсного аргументу [4]:

$$J_{\nu,\alpha}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-(\alpha+1/2)} \cos\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right);$$

$$N_{\nu,\alpha}(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} x^{-(\alpha+1/2)} \sin\left(x - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Безпосередньо встановлюємо, що

$$v_{2n+1}(A,\lambda) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} (Aq_{2n+1})^{-(\alpha_{n+1}+1/2)} \Big[\omega_1(\lambda) \times$$
$$\times \sin\left(q_{2n+1}A - \frac{\pi\nu_{n+1}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) -$$
$$-\omega_2(\lambda) \cos\left(q_{2n+1}A - \frac{\pi\nu_{n+1}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\Big].$$

$$\frac{d}{dr} v_{2n+1}(A,\lambda) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} (Aq_{2n+1})^{-(\alpha_{n+1}+1/2)} \times$$
$$\times\Big\{\left(\omega_1(\lambda)\frac{\nu_{n+1}-\alpha_{n+1}}{A} + q_{2n+1}\omega_2(\lambda)\right)\times$$
$$\times \sin\left(q_{2n+1}A - \frac{\pi\nu_{n+1}}{2} - \frac{\pi}{4}\right) -$$
$$-\left(\omega_2(\lambda)\frac{\nu_{n+1}-\alpha_{n+1}}{A} - q_{2n+1}\omega_1(\lambda)\right)\times$$
$$\times \cos\left(q_{2n+1}A - \frac{\pi\nu_{n+1}}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\Big\}.$$

Після елементарних перетворень маємо

$$v_{2n+1}(A,\lambda)\frac{d}{dr}v_{2n+1}(A,\beta) -$$
$$-v_{2n+1}(A,\beta)\frac{d}{dr}v_{2n+1}(A,\lambda) \approx$$
$$\approx \frac{1}{\pi A^{2\alpha_{n+1}+1}} \frac{1}{[q_{2n+1}(\lambda)q_{2n+1}(\beta)]^{\alpha_{n+1}+1/2}} \times$$
$$\times\{(q_{2n+1}(\lambda) + q_{2n+1}(\beta)) \sin A(q_{2n+1}(\lambda) -$$
$$-q_{2n+1}(\beta))[\omega_1(\lambda)\omega_1(\beta) + \omega_2(\lambda)\omega_2(\beta)] +$$
$$+(q_{2n+1}(\lambda) + q_{2n+1}(\beta)) \cos A(q_{2n+1}(\lambda) -$$
$$-q_{2n+1}(\beta))[\omega_1(\lambda)\omega_2(\beta) - \omega_2(\lambda)\omega_1(\beta)] +$$
$$+(q_{2n+1}(\lambda) - q_{2n+1}(\beta)) \sin[A(q_{2n+1}(\lambda) +$$
$$+q_{2n+1}(\beta)) - \pi\nu_{n+1}][\omega_1(\lambda)\omega_2(\beta) + \omega_2(\lambda)\omega_1(\beta)] +$$
$$+(q_{2n+1}(\lambda) - q_{2n+1}(\beta)) \cos[A(q_{2n+1}(\lambda) +$$
$$+q_{2n+1}(\beta)) - \pi\nu_{n+1}][\omega_1(\lambda)\omega_1(\beta) - \omega_2(\lambda)\omega_2(\beta)]\}. \quad (23)$$

Якщо функція $\Psi(\lambda)$ неперервна, абсолютно інтегровна й має обмежену варіацію на $[c,d]$, то підстановка (23) в (22) з використанням лем Рімана й Діріхле [5] приводить до рівності

$$\int_{R_0}^{\infty}\int_{c}^{d} \Psi(\lambda)V(r,\lambda)V(r,\beta)d\lambda\sigma(r)dr =$$
$$= \begin{cases} \Psi(\beta)\Omega^{-1}(\beta), & \beta \in [c,d], \\ 0, & \beta \notin [c,d]. \end{cases}$$

Якщо ж функція $\Psi(\lambda)$ володіє вказаними вище властивостями на множині $(0,\infty)$, то

$$\int_{R_0}^{\infty}\left(\int_{0}^{\infty} \Psi(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\right)V(r,\beta)\sigma(r)dr =$$
$$= \begin{cases} \Psi(\beta), & \beta \geq 0, \\ 0, & \beta < 0. \end{cases} \quad (24)$$

Припустимо тепер, що функція

$$f(r) = \int_{0}^{\infty} \Psi(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda. \quad (25)$$

Помножимо рівність (25) на $V(r,\beta)\sigma(r)$, де β - довільне додатне число, і проінтегруємо за r від $r = R_0$ до $r = \infty$.

Згідно із формулою (24),

$$\int_{R_0}^{\infty} f(r)V(r,\beta)\sigma(r)dr = \Psi(\beta).$$

Підставивши функцію

$$\Psi(\lambda) = \int_{R_0}^{\infty} f(\rho)V(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho$$

у рівність (25), одержимо інтегральне зображення

$$f(r) = \int_{0}^{\infty} V(r,\lambda)\Omega(\lambda)\int_{R_0}^{\infty} f(\rho)V(\rho,\lambda)\sigma(\rho)d\rho d\lambda. \quad (26)$$

Якщо f - кусково-неперервна на I_{2n}^{+}, то прийдемо до рівності (13).

З метою застосування одержаних інтегральних перетворень для розв'язування відповідних задач математичної фізики одержимо основну тотожність інтегрального перетворення гібридного диференціального оператора

$$\mathfrak{M} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}^2 \theta(r-R_{2k})\theta(R_{2k+1}-r) B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 \theta(r-R_{2k-1})\theta(R_{2k}-r)\Lambda_{\mu_k} +$$

$$+ a_{2n+1}^2 \theta(r-R_{2n}) B_{\nu_{n+1},\alpha_{n+1}}. \qquad (27)$$

Теорема 2. *Якщо функція* $f(r)$ *двічі неперервно диференційовна на* I_{2n}^+, *задовольняє умови спряження, крайову умову* $\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) f|_{r=R_0} = g_0$ *і* $\lim\limits_{r\to\infty} f(r) = \lim\limits_{r\to\infty} (r^{\alpha_{n+1}+3/2} \frac{df}{dr}) = 0$, *то має місце тотожність*

$$H_{2n}[\mathfrak{M}[f(r)]] = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - a_1^2 \sigma_1 (\alpha_{11}^0)^{-1} g_0 \times$$

$$\times v_1(R_0,\lambda) R_0^{2\alpha_1+1} - \sum_{k=0}^{n} \gamma_{2k+1}^2 \int\limits_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f(r) \times$$

$$\times v_{2k+1}(r,\lambda) r^{2\alpha_{k+1}+1} \sigma_{2k+1} dr -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} \gamma_{2k}^2 \int\limits_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f(r) v_{2k}(r,\lambda) \mathrm{sh} r \sigma_{2k} dr,$$

$$R_{2n+1} = \infty. \qquad (28)$$

Доведення. Введемо позначення

$$\overset{-}{f}(R_m) = \lim_{r\to R_m-0} f(r), \overset{+}{f}(R_m) = \lim_{r\to R_m+0} f(r).$$

Із умов спряження в точці $r = R_m$

$$\alpha_{j1}^m \frac{d\overset{-}{f}(R_m)}{dr} + \beta_{j1}^m \overset{-}{f}(R_m) = \alpha_{j1}^m \frac{d}{dr} \overset{+}{f}(R_m) +$$

$$+ \beta_{j1}^m \overset{+}{f}(R_m) (j = 1, 2)$$

знаходимо співвідношення

$$\frac{d\overset{-}{f}(R_m)}{dr} = \frac{1}{c_{1m}} \Big[(\alpha_{22}^m \beta_{11}^m - \alpha_{12}^m \beta_{21}^m) \frac{d\overset{+}{f}(R_m)}{dr} +$$

$$+ (\beta_{11}^m \beta_{22}^m - \beta_{12}^m \beta_{21}^m) \overset{+}{f}(R_m) \Big],$$

$$\overset{-}{f}(R_m) = -\frac{1}{c_{1m}} \Big[(\alpha_{11}^m \alpha_{22}^m - \alpha_{12}^m \alpha_{21}^m) \frac{d\overset{+}{f}(R_m)}{dr} +$$

$$+ (\alpha_{11}^m \beta_{22}^m - \alpha_{21}^m \beta_{12}^m) \overset{+}{f}(R_m) \Big]. \qquad (29)$$

Такими же рівностями пов'язані в точці $r = R_m$ і функції $v_m(r,\lambda)$ і $v_{m+1}(r,\lambda)$, якщо вважати $\overset{-}{f}(R_m) = v_m(R_m,\lambda)$, а $\overset{+}{f}(R_m) = v_{m+1}(R_m,\lambda)$.

Тоді на основі (29) в результаті безпосередніх обчислень одержимо базову тотожність

$$v_m(R_m,\lambda) \frac{d\overset{-}{f}(R_m)}{dr} - \overset{-}{f}(R_m) \frac{dv_m(R_m,\lambda)}{dr} =$$

$$= \frac{c_{2m}}{c_{1m}} [v_{m+1}(R_m,\lambda) \frac{d\overset{+}{f}(R_m)}{dr} -$$

$$- \overset{+}{f}(R_m) \frac{dv_{m+1}(R_m,\lambda)}{dr}].$$

Розглянемо

$$H_{2n}[\mathfrak{M}[f(r)]] = \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1}^2 \int\limits_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}(f) \times$$

$$\times v_{2k+1}(r,\lambda) r^{2\alpha_{k+1}+1} \sigma_{2k+1} dr +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2 \int\limits_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} \Lambda_{\mu_k}(f) v_{2k}(r,\lambda) \mathrm{sh} r \sigma_{2k} dr. \quad (31)$$

Інтегруючи два рази частинами й враховуючи те, що функції $v_k(r,\lambda)$ є розв'язками системи (1), отримаємо співвідношення

$$\int\limits_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} \Lambda_{\mu_k}(f) v_{2k}(r,\lambda) \mathrm{sh} r dr =$$

$$= \left(v_{2k}(r,\lambda) \frac{df}{dr} - f(r) \frac{d}{dr} v_{2k}(r,\lambda) \right) \mathrm{sh} r \Big|_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} -$$

$$-\int\limits_{R_{2k-1}}^{R_{2k}} f(r)\mathrm{sh}r\frac{b_{2k}^2(\lambda)}{a_{2k}^2}v_{2k}(r,\lambda)dr,$$

$$\int\limits_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} B_{\nu_{k+1},\alpha_{k+1}}(f)v_{2k+1}(r,\lambda)r^{2\alpha_{k+1}+1}dr =$$

$$= \left(v_{2k+1}(r,\lambda)\frac{df}{dr} - f(r)\frac{dv_{2k+1}}{dr}(r,\lambda)\right)\times$$

$$\times r^{2\alpha_{k+1}+1}\Big|_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} -$$

$$-\int\limits_{R_{2k}}^{R_{2k+1}} f(r)r^{2\alpha_{k+1}+1}\frac{b_{2k+1}^2(\lambda)}{a_{2k+1}^2}v_{2k+1}(r,\lambda)dr,$$

де $b_j^2(\lambda) = \lambda^2 + \gamma_j^2$.

Підставивши результати інтегрування в (31), маємо

$$H_{2n}[\mathfrak{M}[f(r)]] = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n} a_{2k}^2\Big\{\Big[v_{2k}(R_{2k},\lambda)\frac{d\overset{-}{f}(R_{2k})}{dr}-$$

$$-\overset{-}{f}(R_{2k})\frac{d}{dr}v_{2k}(R_{2k},\lambda)\Big]\mathrm{sh}R_{2k}-$$

$$-\Big[v_{2k}(R_{2k-1},\lambda)\frac{d\overset{+}{f}(R_{2k-1})}{dr}-$$

$$-\overset{+}{f}(R_{2k-1})\frac{d}{dr}v_{2k}(R_{2k-1},\lambda)\Big]\mathrm{sh}R_{2k-1}\Big\}\sigma_{2k}+$$

$$+\sum_{k=0}^{n-1} a_{2k+1}^2\Big\{\Big[v_{2k+1}(R_{2k+1},\lambda)\frac{d\overset{-}{f}(R_{2k+1})}{dr}-$$

$$-\overset{-}{f}(R_{2k+1})\frac{d}{dr}v_{2k+1}(R_{2k+1},\lambda)\Big]R_{2k+1}^{2\alpha_{k+1}+1}-$$

$$-\Big[v_{2k+1}(R_{2k},\lambda)\frac{d\overset{+}{f}(R_{2k})}{dr}- \qquad (32)$$

$$-\overset{+}{f}(R_{2k})\frac{d}{dr}v_{2k+1}(R_{2k},\lambda)\Big]R_{2k}^{2\alpha_{k+1}+1}\Big\}\sigma_{2k+1}-$$

$$-a_{2n+1}^2\Big[v_{2n+1}(R_{2n},\lambda)\frac{d\overset{+}{f}(R_{2n})}{dr}-$$

$$-\overset{+}{f}(R_{2n})\frac{d}{dr}v_{2n+1}(R_{2n},\lambda)\Big]R_{2n}^{2\alpha_{n+1}+1}\sigma_{2n+1}+$$

$$+a_{2n+1}^2\Big[v_{2n+1}(r,\lambda)\frac{df(r)}{dr}-$$

$$-f(r)\frac{d}{dr}v_{2n+1}(r,\lambda)\Big]r^{2\alpha_{n+1}+1}|_{r=\infty}\sigma_{2n+1}-$$

$-\mathcal{R}_n(\lambda)$, де $\tilde{f}(\lambda) = H_{2n}[f]$, а $\mathcal{R}_n(\lambda)$ - сума доданків, що містять інтеграли.

Використовуючи рівність (30), співвідношення (32) перепишемо так:

$$H_{2n}[\mathfrak{M}[f(r)]] = -\lambda^2\tilde{f}(\lambda)+$$

$$-a_1^2\Big\{\Big[v_1(R_0,\lambda)\frac{d\overset{+}{f}(R_0)}{dr}-$$

$$-\overset{+}{f}(R_0)\frac{d}{dr}v_1(R_0,\lambda)\Big]R_0^{2\alpha_1+1}\sigma_1+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_{2k}^2\sigma_{2k}\mathrm{sh}R_{2k}\frac{c_{2,2k}}{c_{1,2k}}-a_{2k+1}^2\sigma_{2k+1}R_{2k}^{2\alpha_{k+1}+1}\Big)\times$$

$$\times\Big[v_{2k+1}(R_{2k},\lambda)\frac{d\overset{+}{f}(R_{2k})}{dr}-$$

$$-\overset{+}{f}(R_{2k})\frac{d}{dr}v_{2k+1}(R_{2k},\lambda)\Big]+ \qquad (33)$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\Big(a_{2k-1}^2\sigma_{2k-1}\frac{c_{2,2k-1}}{c_{1,2k-1}}R_{2k-1}^{2\alpha_k+1}-$$

$$-\sigma_{2k}a_{2k}^2\mathrm{sh}R_{2k-1}\Big)\Big[v_{2k}(R_{2k-1},\lambda)\frac{d\overset{+}{f}(R_{2k-1})}{dr}-$$

$$-\overset{+}{f}(R_{2k-1})\frac{d}{dr}v_{2k}(R_{2k-1},\lambda)\Big]+$$

$$+\sigma_{2n+1}a_{2n+1}^2\Big[v_{2n+1}(r,\lambda)\frac{df(r)}{dr}-$$

$$-f(r)\frac{d}{dr}v_{2n+1}(r,\lambda)\Big]r^{2\alpha_{n+1}+1}\Big|_{r=\infty} - \mathcal{R}_n(\lambda).$$

Згідно з вибором σ_j, доданки під знаком сум у формулі (33) перетворюються на нуль. Доданок при $r=\infty$ перетворюється на нуль завдяки умовам на функції $f(r)$ і $v_{2n+1}(r,\lambda)$.

У точці $r=R_0$ з урахуванням крайової умови на функцію $v_1(r,\lambda)$ будемо мати, що при $\alpha_{11}^0 \neq 0$

$$v_1(R_0,\lambda)\frac{d\overset{+}{f}(R_0)}{dr} - \overset{+}{f}(R_0)\frac{d}{dr}v_1(R_0,\lambda) =$$

$$= \frac{1}{\alpha_{11}^0}\left(\alpha_{11}^0 \frac{d\overset{+}{f}(R_0)}{dr} + \beta_{11}^0 \overset{+}{f}(R_0)\right) v_1(R_0,\lambda) -$$

$$- \frac{\beta_{11}^0}{\alpha_{11}^0} \overset{+}{f}(R_0) v_1(R_0,\lambda) - \overset{+}{f}(R_0) \frac{dv_1(R_0,\lambda)}{dr} =$$

$$= \frac{v_1(R_0,\lambda)}{\alpha_{11}^0} \left(\alpha_{11}^0 \frac{df}{dr} + \beta_{11}^0 f\right)\Bigg|_{r=R_0} -$$

$$- \frac{\overset{+}{f}(R_0)}{\alpha_{11}^0} \left[\left(\alpha_{11}^0 \frac{d}{dr} + \beta_{11}^0\right) v_1(r,\lambda)\Bigg|_{r=R_0} \right] =$$

$$= (\alpha_{11}^0)^{-1} v_1(R_0,\lambda) g_0.$$

Остання рівність завершує доведення теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ленюк М.П.* Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя. - Киев, 1983. - 64 с. - (Препринт / АН УССР. Институт математики; 83.3).

2.*Ленюк М.П., Шинкарик Н.И.* Гибридные интегральные преобразования Лежандра. - Львов, 1989. - 60 с. - (Препринт / АН УССР. Ин-т прикл. проблем механики и математики).

3. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. - М.: Наука, 1965. - 328 с.

4. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. - М.: Наука, 1971. - 1108 с.

5. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и нитегрального исчисления: В 3-х т. - М.: Наука, 1969. - Т. 3. - 656 с.

Стаття надійшла до редколегії 4.09.2002