УДК 517.51

©2003 р. О.О.Карлова, О.В.Собчук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ЛЕБЕҐІВСЬКА КЛАСИФІКАЦІЯ МНОГОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ ДВОХ ЗМІННИХ

У даній роботі узагальнюються теореми Куратовського-Монтґомері і В.К.Маслюченка про лебеґівську класифікацію відображень двох змінних на випадок многозначних відображень.

The Kuratowski-Montgomery theorem and the Maslyuchenko theorem on Lebesgue classification of mappings of two variables are generalized to the case of multivalued mappings.

1. Ще в 1931 році К. Куратовський [1; 2, с.387] встановив, що кожне відображення $f : XY \to Z$, визначене на добутку метризовного простору X і сепарабельного метризовного простору Y зі значеннями в метризовному просторі Z, яке лебеґівського класу α відносно першої змінної й неперервне відносно другої змінної, є лебеґівського класу $\alpha + 1$ за сукупністю змінних. Цей результат невдовзі був покращений: Д. Монтґомері [3] та сам К. Куратовський [4; 2, с.388] зняли умову сепарабельності з другого співмножника. В їх доведенні використовувалась так звана $\mathcal{M}$-операція Монтґомері [2, с.287]. В. Маслюченко [5, 6] запропонував інший підхід, який базується на теоремі Стоуна [7, с.414] про паракомпактність метризовного простору й отримав узагальнення теореми Куратовського-Монтґомері на випадок, коли X – досконалий, Y – метризовний, а Z – досконало нормальний простори.

Г. Квєцінська [8] перенесла первісний результат Куратовського [1] на многозначні відображення, задані на добутку досконало нормального й сепарабельного метризовного просторів. Виявляється, метод В. Маслюченка може бути модифікований і це дає змогу отримати досить загальні теореми про лебеґівську класифікацію многозначних відображень $F : XY \to Z$, де X – досконалий простір, Y – метризовний простір і Z – досконало нормальний простір, які перекривають відповідні теореми Г. Квєцінської.

2. Нехай X, Y і Z – топологічні простори, $F : X \to Z$ – многозначне відображення, $\emptyset \neq F(x) \subseteq Z$ для кожного $x \in X$. Для довільної підмножини $A \subseteq Z$ введемо два наступних прообрази:

$$F^+(A) = \{x \in X : F(x) \subseteq A\},$$

$$F^-(A) = \{x \in X : F(x) \Cap A \neq \emptyset\}.$$

Легко перевірити, що ці прообрази пов'язані між собою наступними рівностями:

$$F^-(A) = X \setminus F^+(X \setminus A),$$

$$F^+(A) = X \setminus F^-(X \setminus A).$$

Многозначне відображення $F : X \to Z$ називається *напівнеперервним зверху (знизу) в точці* $x_0 \in X$, якщо для будь-якої відкритої в Z множини G з того, що $F(x_0) \subseteq G$ випливає, що $x_0 \in \mathrm{int} F^+(G)$ ($F(x_0) \Cap G \neq \emptyset \Rightarrow x_0 \in \mathrm{int} F^-(G)$). Відображення F називається *напівнеперервним зверху (знизу)*, якщо воно є таким у кожній точці простору X, і *неперервним*, якщо воно одночасно напівнеперервне зверху й знизу.

Очевидно, має місце наступне твердження.

Твердження 1. *Многозначне відображення $F : X \to Z$ є напівнеперервним зверху (знизу) тоді й тільки тоді, коли для будь-якої відкритої в Z множини G прообраз $F^+(G)$ $(F^-(G))$ є відкритою в X множиною.*

Зауваження. *Зрозуміло, що многозначне відображення $F : X \to Z$ буде напівнеперервним зверху (знизу) тоді й тільки тоді, коли для будь-якої замкненої в Z множини B прообраз $F^-(B)$ ($F^+(B)$) є замкненою в X множиною.*

Твердження 2. *Нехай X і Z — топологічні простори. Тоді многозначне відображення $F : X \to Z$ буде напівнеперервним знизу тоді й тільки тоді, коли $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)}$ для довільної множини $\emptyset \neq A \subseteq X$.*

Доведення. *Необхідність.* Нехай $x_0 \in \overline{A}$, $z_0 \in F(x_0)$ і W – відкритий окіл точки z_0. Оскільки F – напівнеперервне знизу відображення, то прообраз $F^-(W) = \{x \in X : F(x) \Cap W \neq \emptyset\}$ – відкрита в X множина. Зауважимо, що точка $z_0 \in F(x_0) \Cap W$, тому $x_0 \in F^-(W)$ і $\overline{A} \Cap F^-(W) \neq \emptyset$. Тому існує точка $a \in A \Cap F^-(W)$. Тоді $F(a) \Cap W \neq \emptyset$, отже і $F(A) \Cap W \neq \emptyset$. Оскільки W – довільний окіл точки z_0, то $z_0 \in \overline{F(A)}$.

Достатність. Нехай B – довільна замкнена підмножина простору Z. Покладемо $A = F^+(B)$ і покажемо, що A – замкнена множина в X. Оскільки

$$F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)} \subseteq \overline{B} = B,$$

то $\overline{A} \subseteq F^+(B) = A$. Отже, A – замкнена множина.

Наслідок 3. *Нехай X і Z – топологічні простори, G – відкрита в Z множина, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ – збіжна в просторі X до точки x_0 послідовність і $F : X \to Z$ – таке напівнеперервне знизу многозначне відображення, що $F(x_n) \subseteq G$ для кожного $n \in \mathbf{N}$. Тоді $F(x_0) \subseteq \overline{G}$.*

Доведення. Нехай $A = \{x_n : n \in \mathbf{N}\}$. Тоді $x_0 \in \overline{A}$. Згідно з твердженням 2, $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)}$. Але $F(A) \subseteq G$, тому $F(\overline{A}) \subseteq \overline{F(A)} \subseteq \overline{G}$. Отже, $F(x_0) \subseteq F(\overline{A}) \subseteq \overline{G}$.

Нехай α – довільне зліченне порядкове число ($\alpha < \omega_1$). Через $\mathcal{G}_\alpha(X)$ ($\mathcal{F}_\alpha(X)$) позначатимемо адитивний (мультиплікативний) клас α борелевих підмножин топологічного простору X.

Наступне твердження можна знайти в [5,6].

Твердження 4. *Нехай X — досконалий простір, Y — метризовний простір, $(B_i : i \in I)$ — локально скінченна сім'я множин мультиплікативного (адитивного) класу α у просторі Y і $(A_i : i \in I)$ — сім'я множин мультиплікативного (адитивного) класу α в просторі X. Тоді й множина $E = \Cup_{i\in I}(A_i \times B_i)$ буде того ж класу в добутку $X \times Y$.*

Многозначне відображення $F\colon X \to Z$ називається *відображенням верхнього (нижнього) класу α Лебеґа*, якщо для будь-якої відкритої в Z підмножини G прообраз $F^+(G) \in \mathcal{G}_\alpha(X)$ ($F^-(G) \in \mathcal{G}_\alpha(X)$). Зрозуміло, що відображення F буде верхнього (нижнього) класу α Лебеґа, якщо $F^-(B) \in \mathcal{F}_\alpha(X)$ ($F^+(B) \in \mathcal{F}_\alpha(X)$) для довільної замкненої в Z підмножини B.

Зауважимо, що відображення F є верхнього (нижнього) нульового класу Лебеґа, якщо воно є напівнеперервним зверху (знизу).

Нехай $F : XY \to Z$ – многозначне відображення двох змінних, $p_0 = (x_0, y_0) \in X \times Y$. Відображення $F^{x_0} : Y \to Z$, $F^{x_0}(y) = F(x_0, y)$ ($F_{y_0} : X \to Z$, $F_{y_0}(x) = F(x, y_0)$) називатимемо *x_0-розрізом (y_0-розрізом) відображення F.*

3. У цьому пункті ми доведемо основні результати.

Теорема 5. *Нехай X – досконалий простір, Y – метризовний простір, S – всюди щільна в Y множина, Z – досконало нормальний простір і $F : XY \to Z$ – многозначне відображення таке, що для кожного $y \in S$ y-розріз F_y є верхнього класу α і для кожного $x \in X$ x-розріз F^x є неперервним. Тоді F є нижнього класу $\alpha + 1$ на добутку XY.*

Доведення. Нехай D — замкнена в Z множина. Покажемо, що

$$F^+(D) \in \mathcal{F}_{\alpha+1}(XY).$$

Оскільки Z – досконало нормальний простір, то існує послідовність $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих у Z множин, така, що

$$D = \Cap_{n=1}^{\infty} G_n = \Cap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n}$$

і $\overline{G_{n+1}} \subseteq G_n$ для будь-якого $n \in \mathbf{N}$. Нехай $|\cdot - \cdot|$ – метрика на Y, що породжує його топологію і $B_\varepsilon(y) = \{y' \in Y : |y - y'| < \varepsilon\}$ — відкрита куля з центром у точці y радіуса ε. Сім'я $(B_{\frac{1}{3k}}(y) : y \in Y)$ – це відкрите покриття простору Y для кожного $k \in \mathbf{N}$. Згідно з теоремою Стоуна [7, с.414], у кожне таке покриття можна вписати локально скінченне відкрите покриття $(V_{k,i} : i \in I_k)$, що складається з непорожніх множин. Оскільки множини $V_{k,i}$ відкриті, а множина S всюди щільна, то перетин $V_{k,i} \Cap S$ непорожній, отже, в кожній множині $V_{k,i} \Cap S$ можна вибрати деяку точку $y_{k,i}$. Покладемо

$$E_{n,k,i} = [F_{y_{k,i}}]^+(G_n)V_{k,i}$$

і покажемо, що

$$F^+(D) = \Cap_{n=1}^{\infty} \Cup_{k=n}^{\infty} \Cup_{i\in I_k} E_{n,k,i}. \qquad (1)$$

Візьмемо точку $p = (x, y) \in F^+(D)$. Тоді $F(p) \subseteq D$, отже, $F(p) \subseteq G_n$ для всіх $n \in \mathbf{N}$. Зафіксуємо номер n. Оскільки відображення F^x неперервне, а отже, напівнеперервне зверху в точці y, то множина

$$H = [F^x]^+(G_n) = \{y' \in Y : F^x(y') \subseteq G_n\}$$

відкрита в Y. Тоді існує такий номер $k \geq n$, що $B_{\frac{1}{k}}(y) \subseteq H$. Далі, існує індекс $i \in I_k$ такий, що $y \in V_{k,i}$. Оскільки $\mathrm{diam} V_{k,i} < \frac{1}{k}$, то $V_{k,i} \subseteq B_{\frac{1}{k}}(y) \subseteq H$. Таким чином, $y_{k,i} \in H$, тобто $F(x, y_{k,i}) \subseteq G_n$. Отже, точка $p \in E_{n,k,i}$ і тому належить правій частині рівності (1).

Навпаки, нехай $p = (x, y)$ належить правій частині рівності (1), тобто для кожного $n \in \mathbf{N}$ існують $k_n \geq n$ і $i_n \in I_{k_n}$ такі, що $F(x, y_{k_n,i_n}) \subseteq G_n$.

Припустимо, що $p \notin F^+(D)$. Тоді існує номер $m \in \mathbf{N}$ такий, що

$$F(p) \Cap (Z \setminus \overline{G_m}) \neq \emptyset. \qquad (2)$$

Для кожного n точка $y \in V_{k_n,i_n}$, тому $|y - y_{k_n,i_n}| \leq \mathrm{diam} V_{k_n,i_n} \leq \frac{1}{k_n}$. Отже, $y_{k_n,i_n} \to y$ при $n \to \infty$. Оскільки $F(x, y_{k_n,i_n}) \subseteq G_n \subseteq G_{n-1}$ для всіх $n \in \mathbf{N}$, то $F(x, y_{k_{m+j},i_{m+j}}) \subseteq G_m$ для всіх $j \in \mathbf{N}$. Тоді, згідно з наслідком 3, $F(x, y) \in \overline{G_m}$, адже F^x напівнеперервне знизу відображення, що суперечить (2). Таким чином, наше припущення неправильне і рівність (1) доведено.

Зауважимо, що множини $V_{k,i}$ відкриті в Y, а множини $[F_{y_{k,i}}]^+(G_n)$ належать до адитивного класу α, адже розрізи $F_{y_{k,i}}$ є верхнього класу α за вибором точки $y_{k,i}$, а множини G_n відкриті. Тоді за твердженням 4 множина

$$E_{n,k} = \Cup_{i\in I_k} E_{n,k,i} = \Cup_{i\in I_k} [F_{y_{k,i}}]^+(G_n)V_{k,i}$$

належить до класу $\mathcal{G}_\alpha(XY)$. Тоді й множина $E_n = \Cup_{k=n}^{\infty} E_{n,k}$ також належить до класу $\mathcal{G}_\alpha(XY)$. Тому $F^+(D) = \Cap_{n=1}^{\infty} E_n$ є множиною мультиплікативного класу $\alpha + 1$, а це й означає, що відображення F є нижнього класу $\alpha + 1$ на добутку XY.

Теорема 6. *Нехай X — досконалий простір, Y — метризовний простір, S — всюди щільна в Y множина, Z — досконало нормальний простір і $F : XY \to Z$ — компактнозначне відображення таке, що для кожного $y \in S$ y-розріз F_y є нижнього класу α і для кожного $x \in X$ x-розріз F^x є неперервним. Тоді F є верхнього класу $\alpha + 1$ на добутку XY.*

Доведення. Нехай D — замкнена підмножина простору Z множина. Оскільки Z — досконало нормальний простір, то існує послідовність $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ відкритих в Z множин така, що

$$D = \Cap_{n=1}^{\infty} G_n = \Cap_{n=1}^{\infty} \overline{G_n},$$

причому $\overline{G_{n+1}} \subseteq G_n$ для всіх $n \in \mathbf{N}$. Нехай $|\cdot - \cdot|$ — метрика на просторі Y, що породжує його топологію, $(B_{\frac{1}{3k}}(y) : y \in Y)$ — відкрите покриття простору Y кулями радіуса $\frac{1}{3k}$, $k \in \mathbf{N}$. Впишемо в кожне таке покриття локально скінченне відкрите покриття $(V_{k,i} : i \in I_k)$ і виберемо в кожній множині $V_{k,i} \Cap S$ точку $y_{k,i}$. Покладемо

$$E_{n,k,i} = [F_{y_{k,i}}]^-(G_n)V_{k,i}$$

і покажемо, що

$$F^-(D) = \Cap_{n=1}^{\infty} \Cup_{k=n}^{\infty} \Cup_{i\in I_k} E_{n,k,i}. \qquad (3)$$

Нехай $p = (x, y) \in F^-(D)$. Тоді $F(p) \Cap G_n \neq \emptyset$ для всіх $n \in \mathbf{N}$. Зафіксуємо номер $n \in \mathbf{N}$. Оскільки відображення F_x неперервне, а отже, напівнеперервне знизу в точці y, то множина $H = [F^x]^-(G_n)$ відкрита в Y.

Існують номер $k \geq n$ і індекс $i \in I_k$ такі, що $B_{\frac{1}{k}}(y) \subseteq H$ і $y \in V_{k,i}$. Оскільки $\mathrm{diam} V_{k,i} < \frac{1}{k}$, то $V_{k,i} \subseteq B_{\frac{1}{k}}(y) \subseteq H$ і $y_{k,i} \in H$. Отже, $F(x, y_{k,i}) \Cap G_n \neq \emptyset$, тобто $p \in E_{n,k,i}$. Тому точка p належить правій частині рівності (3).

Навпаки, нехай $p = (x, y)$ належить правій частині рівності (3), тобто для кожного $n \in \mathbf{N}$ існують $k_n \geq n$ і $i_n \in I_{k_n}$ такі, що $F(x, y_{k_n,i_n}) \Cap G_n \neq \emptyset$. Оскільки (G_n) – спадна послідовність, то

$$F(x, y_{k_{n+j},i_{n+j}}) \Cap G_n \neq \emptyset$$

для довільних номерів n і j. Припустимо тепер, що $p \notin F^-(D)$, тобто

$$F(p) \subseteq Z \setminus D = \Cup_{n=1}^{\infty} (Z \setminus \overline{G_n}).$$

Зрозуміло, що множини $Z \setminus \overline{G_n}$ утворюють зростаючу послідовність.

Оскільки $F(p)$ – компактна множина, то існує номер $m \in \mathbf{N}$ такий, що $F(p) \subseteq (Z \setminus \overline{G_m})$. Розріз F^x напівнеперервний зверху в точці y. Тоді множина $W = [F^x]^+(Z \setminus \overline{G_m})$ є відкритим околом точки y. Оскільки $y_{k_n,i_n} \to y$ при $n \to \infty$, то існує номер $N \in \mathbf{N}$ такий, що $y_{k_n,i_n} \in W$ для всіх $n \geq N$. Таким чином,

$$F(x, y_{k_n,i_n}) \subseteq (Z \setminus \overline{G_m}).$$

Але $F(x, y_{k_{m+j},i_{m+j}}) \Cap G_m \neq \emptyset$ для всіх $j \in \mathbf{N}$. Отримується суперечність і рівність (3) доведено.

За побудовою множини $V_{k,i}$ відкриті в Y, а множини $[F_{y_{k,i}}]^-(G_n) \in \mathcal{G}_\alpha(X)$ за вибором точки $y_{k,i}$. Тоді за твердженням 4 множина

$$E_{n,k} = \Cup_{i \in I_k} E_{n,k,i} = \Cup_{i \in I_k} [F_{y_{k,i}}]^-(G_n) V_{k,i}$$

належить до класу $\mathcal{G}_\alpha(XY)$. Тоді й множина $E_n = \Cup_{k=n}^{\infty} E_{n,k}$ також належить до класу $\mathcal{G}_\alpha(XY)$. Тому $F^-(D) = \Cap_{n=1}^{\infty} E_n$ є множиною мультиплікативного класу $\alpha + 1$, а це й означає, що відображення F є верхнього класу $\alpha + 1$ на добутку XY. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Kuratowski C.* Sur la théorie des fonctions dans les espaces métriques // Fund. Math.— 1931.— **17**.— P.275—282.
2. *Куратовский К.* Топология. Т.1.— М.: Мир, 1966.— 594с.
3. *Montgomery D.* Non-separable metric spaces // Fund. Math.— 1935.— P.527-533.
4. *Kuratowski C.* Quelques problémes concernant les espaces métriques non-séparables // Fund. Math.— 1935.— P.534—545.
5. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете. Дис. ... доктора фіз.-мат. наук.— Чернівці, 1999.— 345 с.
6. *Maslyuchenko V.K., Maslyuchenko O.V., Mykhaylyuk V.V., Sobchuk O.V.* Paracompactness and separately continuous mappings // General Topology in Banach Spaces.— Nova Sci. Publ. - Nantintong-New York, 2001.— P.147—169.
7. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.
8. *Kwiecińska G.* On Lebesgue theorem for multivalued functions of two variables // Proceedings of the Ninth Prague Topological Symposium, 2001.— P.181—189.

Стаття надійшла до редколегії 4.12.2002