УДК 517.983

©2003 р. **Т.І.Звоздецький**

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ДВОХ ОПЕРАТОРІВ УЗАГАЛЬНЕНОГО ІНТЕГРУВАННЯ У ПРОСТОРІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

У даній роботі встановлюються необхідні й достатні умови еквівалентності двох операторів узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва у просторах функцій, аналітичних у зіркових відносно нуля областях комплексної площини.

The necessary and sufficient conditions of similarity of two Gelfond-Leontiev integration operators in the spaces of all analytic in the starlike with respect to zero domains of the complex plane are obtained.

Нехай для $i = 1, 2$ область G_i комплексної площини є зірковою відносно нуля, $\mathcal{H}(G_i)$ – простір усіх аналітичних у G_i функцій, наділений топологією компактної збіжності, $\varrho_i > 0$, $\mu_i \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}\,\mu_i > 0)$, а $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}$ – оператор узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва в $\mathcal{H}(G_i)$, який для $f \in \mathcal{H}(G_i)$ визначається формулою

$$(\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i} f)(z) =$$

$$= \frac{z}{\Gamma(1/\varrho_i)} \int\limits_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\varrho_i}-1} t^{\mu_i - 1} f(z t^{\frac{1}{\varrho_i}}) dt.$$

У даній роботі розглядається задача про умови еквівалентності операторів $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{H}(G_1)$ та $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{H}(G_2)$.

Відзначимо, що в [1] встановлено умови еквівалентності двох операторів узагальненого інтегрування в просторі послідовностей, наділеному нормальною топологією. Якщо $G_1 = G_2 = K_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ $(0 < R \le +\infty)$, то відповідний простір аналітичних функцій $\mathcal{H}(K_R)$ топологічно ізоморфний певному простору послідовностей, наділеному нормальною топологією. У цьому випадку результати даної роботи узгоджуються з відповідними результатами роботи [1].

Припустимо, що оператор $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ в $\mathcal{H}(G_1)$ еквівалентний до оператора $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ в $\mathcal{H}(G_2)$. Тоді існує такий ізоморфізм $T : \mathcal{H}(G_1) \to \mathcal{H}(G_2)$, що

$$\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2} T = T \mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}. \tag{1}$$

Для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$ позначимо $E_\lambda^{(i)}(z) = E_{\varrho_i}(\lambda z, \mu_i)$ $(i = 1, 2)$, де для $\varrho > 0$, $\mu \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}\,\mu > 0)$ функція

$$E_\varrho(z, \mu) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k/\varrho + \mu)}, z \in \mathbb{C},$$

є функцією Міттаґ-Лефлера.

Подіємо обома частинами рівності (1) на функцію $E_\lambda^{(1)}(z)$. Позначивши

$$t(\lambda, z) = (T E_\lambda^{(1)})(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad z \in G_2,$$

отримаємо, що

$$(E - \lambda \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}) t(\lambda, z) = \frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \varphi(z), \tag{2}$$

де E – тотожний оператор в $\mathcal{H}(G_2)$, а $\varphi(z) = T1$ – деяка функція з $\mathcal{H}(G_2)$.

У [2] було встановлено, що коли G – зіркова відносно нуля область комплексної площини, то для чисел $\varrho > 0$ та $\mu \in \mathbb{C}$ $(\mathrm{Re}\ \mu > 0)$ існує ізоморфізм $A_{\varrho,\mu}$ простору $\mathcal{H}(G)$ на себе, для якого

$$A_{\varrho,\mu} z^n = \frac{\Gamma(n/\varrho + \mu)}{\Gamma(n/\varrho + 1)} z^n, \quad n = 0, 1, 2, ...,$$

причому для $f \in \mathcal{H}(G)$

$$(A_{\varrho,\mu}^{-1} f)(z) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\mu)} \left(\mu + \frac{z}{\varrho} \frac{d}{dz} \right) \int_0^1 (1-t)^{\mu-1} f(zt^{\frac{1}{\varrho}}) dt.$$

Тому, враховуючи співвідношення

$$(E - \lambda \mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \mathcal{I}^k_{\varrho_2,\mu_2}$$

та

$$(\mathcal{I}^k_{\varrho_2,\mu_2}\varphi)(z) = \Gamma(\mu_2) \frac{z^k}{\Gamma(k/\varrho_2 + \mu_2)} \varphi(0) +$$

$$+ \frac{z}{\varrho_2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\varrho_2}-1} t^{\mu_2 - 1} (A_{\varrho_2,\mu_2}\varphi)'(z(1-t)^{\frac{1}{\varrho_2}}) \times$$

$$\times \frac{z^k t^{\frac{k}{\varrho_2}}}{\Gamma(k/\varrho_2 + \mu_2)} dt, \quad k \ge 0,$$

одержимо, що

$$t(\lambda, z) = \frac{1}{\Gamma(\mu_1)} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k (\mathcal{I}^k_{\varrho_2,\mu_2}\varphi)(z) =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)} \varphi(0) E^{(2)}_\lambda(z) +$$

$$+ \frac{z}{\Gamma(\mu_1)\varrho_2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\varrho_2}-1} t^{\mu_2-1} \times$$

$$\times (A_{\varrho_2,\mu_2}\varphi)'(z(1-t)^{\frac{1}{\varrho_2}}) E^{(2)}_\lambda(zt^{\frac{1}{\varrho_2}}) dt. \qquad (3)$$

Розглянемо в просторі $\mathcal{H}(G_2)$ оператор B, який діє за правилом

$$(Bf)(z) = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)} \varphi(0) f(z) +$$

$$+ \frac{z}{\Gamma(\mu_1)\varrho_2} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\varrho_2}-1} t^{\mu_2-1} \times$$

$$\times (A_{\varrho_2,\mu_2}\varphi)'(z(1-t)^{\frac{1}{\varrho_2}}) f(zt^{\frac{1}{\varrho_2}}) dt, \quad f \in \mathcal{H}(G_2).$$

Очевидно, що він є лінійним та неперервним на $\mathcal{H}(G_2)$. Тоді матимемо, що

$$t(\lambda, z) \equiv (TE^{(1)}_\lambda)(z) = (BE^{(2)}_\lambda)(z),$$

звідки

$$E^{(1)}_\lambda(z) = T^{-1} B E^{(2)}_\lambda(z), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad z \in G_1.$$

Оскільки порядок функції Міттаґ-Лефлера $E_\varrho(z,\mu)$ дорівнює ϱ і оператор $T^{-1}B$ діє лінійно та неперервно з $\mathcal{H}(G_2)$ в $\mathcal{H}(G_1)$, то порядок правої частини останньої рівності як цілої відносно λ функції не перевищує ϱ_2. Але порядок правої частини як цілої відносно λ функції дорівнює порядкові функції $E_{\varrho_1}(\lambda z, \mu_1)$, тобто ϱ_1. Тому $\varrho_1 \le \varrho_2$. Цілком аналогічно можна отримати й нерівність $\varrho_2 \le \varrho_1$.

Отже, якщо оператори $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ та $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ є еквівалентними, то $\varrho_1 = \varrho_2$. Тому надалі вважатимемо, що $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$.

Якщо G – довільна зіркова відносно нуля область комплексної площини, то оператор S, який на степенях z визначається формулою

$$Sz^n = \frac{\Gamma(n/\varrho + \mu_1)}{\Gamma(n/\varrho + \mu_2)} z^n, \quad n \ge 0,$$

продовжується до ізоморфізму простору $\mathcal{H}(G)$ на себе, оскільки $S = A_{\varrho,\mu_1} A^{-1}_{\varrho,\mu_2}$. Тоді з (3) одержимо, що

$$t(\lambda, z) = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)} \varphi(0) (SE^{(1)}_\lambda)(z) +$$

$$+ \frac{z}{\Gamma(\mu_1)\varrho} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\varrho}-1} t^{\mu_2-1} \times$$

$$\times (A_{\varrho,\mu_2}\varphi)'(z(1-t)^{\frac{1}{\varrho}}) (SE^{(1)}_\lambda)(zt^{\frac{1}{\varrho}}) dt.$$

Враховуючи повноту в $\mathcal{H}(G_1)$ системи функцій $\{E^{(1)}_\lambda : \lambda \in \mathbb{C}\}$ та лінійність і неперервність операторів T і S, отримаємо, що для всіх $f \in \mathcal{H}(G_1)$

$$(Tf)(z) = \frac{\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1)} \varphi(0) (Sf)(z) +$$

$$+ \frac{z}{\Gamma(\mu_1)\varrho} \int_0^1 (1-t)^{\frac{1}{\varrho}-1} t^{\mu_2-1} \times$$

$$\times (A_{\varrho,\mu_2}\varphi)'(z(1-t)^{\frac{1}{\varrho}}) (Sf)(zt^{\frac{1}{\varrho}}) dt.$$

Візьмемо функцію f, для якої G_2 є областю аналітичності, і позначимо $g = T^{-1}BSf$. Зрозуміло, що $g \in \mathcal{H}(G_1)$.

Нехай V – деякий окіл нуля, що міститься в $G_1 \cap G_2$ (він існує, бо $0 \in G_1 \cap G_2$). Оскільки для кожного $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(TE_\lambda^{(1)})(z) = (BSE_\lambda^{(1)})(z),$$

то

$$E_\lambda^{(1)}(z) = (T^{-1}BSE_\lambda^{(1)})(z), \quad z \in G_1.$$

Тому, враховуючи повноту в $\mathcal{H}(G_2)$ системи функцій $\{E_\lambda^{(1)}(z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ і лінійність та наперервність на $\mathcal{H}(G_2)$ операторів S, B і T^{-1}, для $z \in V$ одержимо

$$f(z) = (T^{-1}BSf)(z),$$

тобто $f(z) = g(z)$, $z \in V$. Звідси маємо, що f аналітично продовжується в G_1. Оскільки G_2 є областю аналітичності функції f, то $G_2 \supseteq G_1$. Цілком аналогічно можна отримати й включення $G_2 \subseteq G_1$.

Таким чином, доведено необхідні умови наступної теореми.

Теорема. *Нехай для* $i = 1, 2$ *область* G_i *комплексної площини є зірковою відносно нуля, а для сталих* $\varrho_i > 0$ *та* $\mu_i \in \mathbb{C}$ $(\operatorname{Re} \mu_i > 0)$ $\mathcal{I}_{\varrho_i,\mu_i}$ *– оператор узагальненого інтегрування Гельфонда-Леонтьєва в просторі* $\mathcal{H}(G_i)$. *Для того щоб оператор* $\mathcal{I}_{\varrho_1,\mu_1}$ *в* $\mathcal{H}(G_1)$ *був еквівалентним до оператора* $\mathcal{I}_{\varrho_2,\mu_2}$ *в* $\mathcal{H}(G_2)$, *необхідно й досить, щоб* $\varrho_1 = \varrho_2$ *і* $G_1 = G_2$.

Доведення. Достатність. Нехай $G_1 = G_2 = G$ і $\varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$. Розглянемо оператор $S = A_{\varrho,-mu_1}A_{\varrho,\mu_2}^{-1}$, який є ізоморфізмом простору $\mathcal{H}(G)$ на себе. Тоді

$$(\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}SE_\lambda^{(1)})(z) = \mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k Sz^k}{\Gamma(k/\varrho+\mu_1)} =$$

$$= \mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k Sz^k}{\Gamma(k/\varrho+\mu_2)} = (\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}E_\lambda^{(2)})(z) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(E_\lambda^{(2)}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu_2)}\right);$$

$$(S\mathcal{I}_{\varrho,\mu_1}E_\lambda^{(1)})(z) = \frac{1}{\lambda}S\left(E_\lambda^{(1)}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu_1)}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\left(E_\lambda^{(2)}(z) - \frac{1}{\Gamma(\mu_2)}\right).$$

Отже, для $z \in G$ і $\lambda \in \mathbb{C}$

$$(\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}SE_\lambda^{(1)})(z) = (S\mathcal{I}_{\varrho,\mu_1}E_\lambda^{(1)})(z).$$

Звідси, використовуючи повноту в $\mathcal{H}(G)$ системи функцій $\{E_\lambda^{(1)}(z) : \lambda \in \mathbb{C}\}$ та лінійність і неперервність на $\mathcal{H}(G)$ операторів S, $\mathcal{I}_{\varrho,\mu_1}$ та $\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}$, отримуємо, що

$$\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}Sf = S\mathcal{I}_{\varrho,\mu_1}f, \quad f \in \mathcal{H}(G).$$

А це означає, що оператори $\mathcal{I}_{\varrho,\mu_1}$ та $\mathcal{I}_{\varrho,\mu_2}$ еквівалентні в $\mathcal{H}(G)$. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Звоздецький Т.І., Лінчук С.С.* Про еквівалентність операторів узагальненого диференціювання в просторах послідовностей // Наук. вісн. Чернівецького університету. Випуск 76. Математика.— 2000.— С.42—43.

2. *Линчук Н.Е.* Представление коммутантов оператора обобщенного интегрирования Гельфонда-Леонтьева // Изв. вузов. Математика.— 1985.— N 5.— С.72—74.

Стаття надійшла до редколегії 18.01.2003