УДК 517. 956

©2003 р. У.В.Жидик, Г.П.Лопушанська

Львівський національний університет імені Івана Франка, Львів

РОЗВ'ЯЗКИ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У КЛАСАХ ФУНКЦІЙ ІЗ СТЕПЕНЕВИМИ ОСОБЛИВОСТЯМИ

Встановлені умови існування розв'язку інтегро-диференціального рівняння, що є узагальненням нелінійного інтегрального рівняння типу Гаммерштейна, в класі функцій, які мають точкові особливості.

The existence of the solution of the integro-differential equation, being the generalization of nonlinear integral equation of Hammershtein type, in the class of the function, having the point singularities is established.

Нехай Ω-область в R^n, $n \geqslant 3$ обмежена замкненою поверхнею S класу C^∞, $D(\bar{\Omega}) = C^\infty(\bar{\Omega})$, $D(S) = C^\infty(S)$, $D'(\bar{\Omega})$, $D'(S)$ – простори лінійних неперервних функціоналів на $D(\bar{\Omega})$ і $D(S)$ відповідно.

Нехай $x_0 \in \bar{\Omega}$, $\rho(x,x_0)$ – невід'ємна нескінченно диференційовна в $\bar{\Omega}$ функція, $\rho(x_0,x_0) = 0$, а в околі точки x_0 має порядок $d(x,x_0) = |x-x_0|$, $\rho(x,x_0) \leqslant \rho_1$, $x \in \Omega$.

Для $p \in R$ визначено [1] простори

$$\widetilde{Z}_p(\bar{\Omega},x_0) = \Big\{ \varphi \in C^\infty\left(\bar{\Omega}\backslash x_0\right) : \rho^{|\gamma|}(x,x_0)$$

$$D^\gamma\varphi(x) = \rho^p(x,x_0)\, h_\gamma(x),\ h_\gamma \in C(\bar{\Omega})$$

для довільного мультиіндексу $\gamma\Big\}$,

$$Z_p(\bar{\Omega},x_0) = \Big\{ \varphi \in C^\infty(\bar{\Omega}\backslash x_0) : |D^\gamma\varphi(x)| \leqslant$$ $\left(\rho^{p-|\gamma|}(x,x_0)+1\right) h_\gamma(x)$, $h_\gamma \in C(\bar{\Omega})$ для довільного мультиіндексу $\gamma\Big\}$.

Введемо клас функцій:

$$\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0) = \Big\{ u : u \in C^r(\bar{\Omega}\backslash x_0) :$$

$$\|u\|_{\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0)} = \sum_{|\gamma|\leqslant r} \|u\|_{k,\gamma,x_0} =$$

$$= \sum_{|\gamma|\leqslant r} \int_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\, |D^\gamma_x u(x)|\, dx < +\infty \Big\}.$$

Зауважимо, що $m^r_{k_2}(\bar{\Omega},x_0) \subset m^r_{k_1}(\bar{\Omega},x_0)$, якщо $k_2 < k_1$, $\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0) = \Big\{ u \in \tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0) :$ $\|u\|_{\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0)} \leqslant C \Big\}$ – замкнена опукла підмножина в $\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0)$.

Лема. *Нехай $p > -n$, $K(\bullet,y) \in Z_p(\bar{\Omega},y)$ для довільного $y \in \bar{\Omega}$ і є розв'язком рівняння $A(x,D)K(x,y) = 0$, $x \in \Omega$, $x \neq y$, де A – еліптичний диференціальний оператор з нескінченно диференційовними коефіцієнтами порядку $2m \leqslant p+n$, $\varphi \in \tilde{Z}_k(\bar{\Omega},x_0)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$, $k > -n$.*

Тоді $\int\limits_\Omega \varphi(x)\, K(x,\bullet)\, dx \in Z_{k+p+n}(\bar{\Omega},x_0)$, $x_0 \in \bar{\Omega}$.

Лема доводиться як відповідне твердження для спряжених операторів Гріна в [1].

Нехай $D^\alpha u = \left(\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}\right)$, $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n \leqslant r$, $z = (z_1,...,z_M)$, M – певне натуральне число. Функція $f = f(y,u,z)$ визначена й неперервна при $y \in \bar{\Omega}$, $u \in (-\infty;+\infty)$, $z_i \in (-\infty;+\infty)$, $i = \overline{1,M}$.

З'ясуємо, за яких умов існує розв'язок у $\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0)$, $k \geqslant 0$ рівняння

$$u(x) = \int_\Omega K(x,y)\, f(y,u(y),D^\alpha u(y))\, dy + g(x), \quad (1)$$

$$x \in \Omega.$$

Теорема 1. *Нехай $p > -n$, $K(\bullet,y) \in \tilde{Z}_p(\bar{\Omega},y)$, $y \in \bar{\Omega}$, $K(\bullet,y)$ є розв'язком рів-*

няння $A(x,D)K(x,y)=0$, $x\in\Omega$, $x\neq y$, де A – еліптичний диференціальний оператор з нескінченно диференційовними коефіцієнтами порядку $2m\leqslant p+n$; функція $f(y,u,z)$ визначена й неперервна для $y\in\bar{\Omega}$, $u\in(-\infty;+\infty)$, $z_i\in(-\infty;+\infty)$ майже для всіх $y\in\Omega$ диференційована за u, z_i, $i=\overline{1,M}$, існують такі додатні сталі C_0, C_1, C_1', C_2, $\tilde{C}_\alpha$, $|\alpha|\leqslant r$, $r\leqslant 2m-1$, що $g\in\tilde{m}_{k,C_1}(\bar{\Omega})$, $g_{x_j}\in\tilde{m}_{k-1,C_1'}(\bar{\Omega})$, $j=\overline{1,n}$, для довільної сталої $C>\max(C_0,2C_1)$

$$\int\limits_{\Omega}|f(y,u(y),D^\alpha u(y))|\,dy\leqslant C_2, \qquad (2)$$

$$u\in\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0),\ \text{\textit{причому}}$$

$$2\sum_{|\gamma|\leqslant r}L_\gamma\rho_1^{k+|\gamma|}C_2<C,\ \text{\textit{де}}\ \rho_1=\max_{x\in\bar{\Omega}}\rho(x,x_0),$$

$$L_\gamma=\max_{y\in\bar{\Omega}}\int\limits_{\Omega}|D_x^\gamma K(x,y)|\,dx.$$

$$|f_u'(y,u(y),D^\alpha u(y))|\leqslant C_0\rho^k(y,x_0), \qquad (3)$$
$$u\in\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0),$$

$$|f_{D^\alpha u}'(y,u,D^\alpha u)|\leqslant\tilde{C}_\alpha\rho^{k+|\alpha|}(y,x_0), \qquad (4)$$
$$|\alpha|\leqslant r,\quad u\in\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0).$$

Існує розв'язок $u\in\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0)$ рівняння (1).

Доведення. Використаємо теорему Шаудера [2,с.291].

Введемо оператор

$$H:(Hu)(x)=$$

$$\int\limits_{\Omega}K(x,y)\,f(y,u(y),D^\alpha u(y))\,dy+g(x),$$

$$x\in\Omega,\quad u\in\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0).$$

Покажемо, що для довільної сталої $C>\max(C_0,2C_1)$ $H:\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0)\to\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0)$ є неперервним відображенням множини $\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0)$ в себе і множина функцій $\left\{Hu:u\in\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0)\right\}$ є відносно компактною в $\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0)$.

Введемо позначення: $V_\varepsilon(x_0)=\{x\in\Omega;\ \ |x-x_0|<\varepsilon\}$. При $x\in\Omega\backslash V_\varepsilon(x_0)$ запишемо

$$(Hu)(x)=$$

$$\int\limits_{\Omega\backslash V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)}K(x,y)f(y,u(y),D^\alpha u(y))\,dy+$$

$$+g_1(x,u)+g(x),$$

де

$$g_1(\bullet,u)=\int\limits_{V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)}K(\bullet,y)f(y,u(y),D^\alpha u(y))\,dy.$$

Функція $K\in C^\infty\left(\overline{\Omega\backslash V_\varepsilon(x_0)},\overline{V_{\frac{\varepsilon}{2}}(y)}\right)$ і обмежена там, тому $g_1(\bullet,u)\in C^\infty\left(\overline{\Omega\backslash V_\varepsilon(x_0)}\right)$ при $u\in\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0)$ для будь-якого $\varepsilon>0$, тобто $g_1(\bullet,u)\in C^\infty(\bar{\Omega}\backslash x_0)$ при $u\in\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0)$.

Оскільки $u\in C^r(\bar{\Omega}\backslash x_0)$, f – неперервна, то існує така стала $\tilde{C}>0$, $\tilde{C}=\tilde{C}(u)$, що $|(fu)(y)|=|f(y,u(y),D^\alpha u(y))|\leqslant\tilde{C}$ при $y\in\overline{\Omega\backslash V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)}$, а тоді існують неперервні та обмежені в $\overline{\Omega\backslash V_\varepsilon(x_0)}$ функції $\int\limits_{\Omega\backslash V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)}D_x^\gamma K(x,y)\,f(y,u(y),D^\alpha u(y))\,dy$, $|\gamma|\leqslant r$, $u\in\tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega},x_0)$. Отже, при $r\leqslant 2m-1$, $g\in C^r(\bar{\Omega}\backslash x_0)$ також $Hu\in C^r(\bar{\Omega}\backslash x_0)$.

Крім того,

$$\left|\int\limits_{\Omega\backslash V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)}D_x^\gamma K(x,y)\,f(y,u(y),D^\alpha u(y))\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{x\in\overline{\Omega\backslash V_\varepsilon(x_0)},y\in\overline{V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)}}|D_x^\gamma K(x,y)|\times$$

$$\times\int\limits_{\Omega\backslash V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)}|f(y,u(y),D^\alpha u(y))|\,dy\leqslant C_\gamma',$$

$$x\in\bar{\Omega}\backslash V_\varepsilon(x_0).$$

Тому існують такі сталі $C_\gamma''>0$, що при довільному $\varepsilon>0$

$$\left|D_x^\gamma\int\limits_{\Omega}K(x,y)\,f(y,u(y),D^\alpha u(y))\,dy\right|\leqslant C_\gamma'', \qquad (5)$$

$$x \in \overline{\Omega\backslash V_\varepsilon(x_0)}, \quad u \in \tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega}, x_0), \quad |\gamma| \leqslant r,$$

$$\|Hu\|_{\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega},x_0)} =$$

$$= \sum_{|\gamma|\leqslant r} \|Hu\|_{k,\gamma,x_0} = \sum_{|\gamma|\leqslant r} \int\limits_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) \times$$

$$\times \left| D^\gamma_x \left(\int\limits_\Omega K(x,y)\, f(y,u(y),z)\, dy + g(x) \right) \right| dx.$$

При $k > 0$, $|\gamma| \leqslant r$ за теоремою про середнє $\int\limits_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\ |D^\gamma_x K(x,y)|\ dx \leqslant$

$$\leqslant \max_{x\in\bar{\Omega}} \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) \max_{y\in\bar{\Omega}} \int\limits_\Omega |\, D^\gamma_x K\,(x,y)\,|\, dx =$$

$$= \rho_1^{k+|\,\gamma\,|}\, L_\gamma\,.$$

Тому з умови (2) та теореми Фубіні випливає, що при $u \in \tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega}, x_0)$

$$\sum_{|\gamma|\leqslant r} \int\limits_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) \times$$

$$\times \left| D^\gamma_x \int\limits_\Omega K(x,y)\, f(y,u(y),(D^\alpha u)(y))\, dy \right| dx$$

$$\leqslant C_2 \sum_{|\gamma|\leqslant r} \rho_1^{k+|\gamma|}\, L_\gamma < \frac{C}{2}.$$

Звідси при $g \in \tilde{m}^r_{k,C_1}(\bar{\Omega}, x_0)$ та $C > \max(C_0, 2C_1)$ одержуємо, що

$$\|\, Hu\,\|_{\tilde{m}^r_k\left(\bar{\Omega},x_0\right)} \leqslant \frac{C}{2} + C_1 < \frac{C}{2} + \frac{C}{2} = C, \quad (6)$$

$$u \in \tilde{m}^r_{k,C}\left(\bar{\Omega}, x_0\right).$$

Отже, при $g \in \tilde{m}^r_{k,C_1}(\bar{\Omega}, x_0)$, $C > \max(C_0, 2C_1)$ та умові (2) $H : \tilde{\tilde{m}}^r_{k,C}\,(\Omega, x_0) \to \tilde{m}^r_{k,C}\,(\Omega, x_0)$.

Доведемо компактність множини $\Big\{Hu : u \in \tilde{m}^r_{k,C}(\bar{\Omega}, x_0)\Big\}$ в $\tilde{m}^r_k(\bar{\Omega}, x_0)$. Оскільки при $u \in \tilde{m}^r_k\left(\bar{\Omega}, x_0\right)$ $\rho^{k+|\,\gamma\,|}\,(x,x_0)\ D^\gamma_x u\,(x) \in L_1\,(\Omega)$ для довільного γ, $|\gamma| \leqslant r$, $u \in C^r\left(\overline{\Omega\backslash V_\varepsilon\,(x_0)}\right)$ для довільного $\varepsilon > 0$, то за теоремою Ріса [2, с. 242] та теоремою Арцела для цього досить виконання умов:

1) Існує така стала $C' > 0$, що $\|Hu\|_{\tilde{m}^r_k\left(\bar{\Omega},x_0\right)} \leqslant C'$, $u \in \tilde{m}^r_{k,C}\left(\bar{\Omega}, x_0\right)$;

2) для довільного $\eta > 0$ існує таке $\delta = \delta\,(\eta) > 0$, що для $z \in \Omega$, $|\,z\,| \leqslant \delta$, $|\,\gamma\,| \leqslant r$, та довільної $u \in \tilde{m}_{k,C}\left(\bar{\Omega}, x_0\right)$

$$\int\limits_\Omega \Big| \rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0)\, D^\gamma_x((Hu)(x+z)) \quad (7)$$

$$-\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) D^\gamma_x((Hu)(x) \Big| dx \leqslant \eta,$$

3) множина функцій $\{\, D^\gamma\,(Hu)\,,\, u \in \tilde{m}_{k,C}\left(\bar{\Omega}, x_0\right)\,\}$ є рівномірно обмеженою та одностайно неперервною в $\bar{\Omega}\backslash V_\varepsilon\,(x_0)$ при $|\gamma| \leqslant r$ та довільних $\varepsilon > 0$, $u \in \tilde{m}^r_{k,C}\left(\bar{\Omega}, x_0\right)$.

Умова 1) випливає з (6).

Перевіримо виконання умови 2). При $|\gamma| \leqslant r$

$$\int\limits_\Omega \Big| \rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0)\,(D^\gamma_x Hu)\,(x+z) -$$

$$-\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\,(D^\gamma_x Hu)\,(x)\,\Big|\, dx =$$

$$= \int\limits_\Omega |\ \rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0) D^\gamma_x \Big(\int\limits_\Omega K(x+z,y) \times$$

$$\times f(y,u(y),D^\alpha u(y)) \Big)\, dy + g(x+z) -$$

$$-\rho^{k+\gamma}(x,x_0)\, D^\gamma_x \Big(\int\limits_\Omega K(x,y) \times$$

$$\times f(y,u(y),D^\alpha u(y))\, dy + g(x) \Big) \Big|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Omega \Big| \int\limits_\Omega \Big(\rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0) D^\gamma_x K(x+z,y) -$$

$$-\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0) D^\gamma_x K(x,y) \Big) \times$$

$$\times f(y,u(y),D^\alpha u(y))\, dy \Big| dx +$$

$$+ \int\limits_\Omega \Big| \rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0) D^\gamma_x g(x+z) -$$

$$\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\,D_x^\gamma g(x)\Big|\,dx.$$

При $|\gamma|\leqslant r-1$ записуємо останній вираз у вигляді

$$\int\limits_\Omega\Big|\int\limits_\Omega\sum_{i=1}^n\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho^{k+|\gamma|}(x+\beta z,x_0)\times$$

$$\times D_x^\gamma K(x+\beta z,y))d\beta\,z_i f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy\Big|dx+$$

$$+\int\limits_\Omega\Big|\sum_{i=1}^n\int\limits_0^1\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\rho^{k+|\gamma|}(x+\beta z,x_0)\,D_x^\gamma\times$$

$$\times g(x+\beta z)\Big)\,d\beta\,z_i\,dx\Big|.$$

Оскільки $K(\bullet,y)\in Z_p(\bar\Omega,y)$, то $|D_x^\gamma K(x+\beta z,y)|\leqslant(\rho^{p-|\gamma|}(x+\beta z,x_0)+1)h_\gamma(y)$, $y\in\bar\Omega$, $h_\gamma\in C(\bar\Omega)$, тому

$$\int\limits_\Omega\Big(\int\limits_0^1\Big|\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\rho^{k+|\gamma|}(x+\beta z,x_0)\,D_x^\gamma\times$$

$$\times K(x+\beta z,y)\Big)\Big|\,d\beta\Big)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_\Omega\left(\int\limits_0^1\Big|\Big(\rho^{k+p-1}(x+\beta z,x_0)\,\tilde h_\gamma(y)\Big)\Big|\,d\beta\right)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C_\gamma'''(\rho^{k+p+n-1}(y,x_0)+1).$$

Звідси та з умови (2) одержуємо, що при $g_{x_j}\in\tilde m^r_{k-1,C_1'}(\bar\Omega,x_0)$, $u\in\tilde m^r_{k,C}(\bar\Omega,x_0)$ та $|\gamma|\leqslant r-1$

$$\int\limits_\Omega\Big|\rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0)\Big(D_x^\gamma Hu\Big)(x+z)-$$

$$\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)(D_x^\gamma Hu)(x)\Big|\,dx\leqslant C'|z|\leqslant C'\delta.$$

Нехай $|\gamma|=r$. $V_{\varepsilon_1}(x,z)=\Big\{y\in\Omega:|y-x|<\varepsilon_1,\ |y-x-z|<\varepsilon_1$ при $|z|<\delta\Big\}$.

$$\int\limits_\Omega\Big|\rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0)(D_x^\gamma Hu)(x+z)-$$

$$-\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)(D_x^\gamma Hu)(x)\Big|dx\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_\Omega\Big|\int\limits_{\Omega\setminus V_{\varepsilon_1}(x,z)}\Big[\rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0)\times$$

$$D_x^\gamma K(x+z,y)-\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)D_x^\gamma K(x,y)\Big]\times$$

$$f(y,u(y),D^\alpha u(y))\,dy\Big|\,dx+$$

$$+\int\limits_\Omega\rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0)\Big|D_x^\gamma\int\limits_{V_{\varepsilon_1}(x,z)}K(x+z,y)\times$$

$$\times f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy\Big|dx+$$

$$+\int\limits_\Omega\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\Big|D_x^\gamma\int\limits_{V_{\varepsilon_1}(x,z)}K(x,y)\times$$

$$\times f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy\Big|dx+$$

$$+\int\limits_\Omega\Big|\rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0)D_x^\gamma g(x+z)-$$

$$-\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\,D_x^\gamma g(x)\Big|dx.$$

Перший та останній доданки перетворюємо, як при $|\,\gamma\,|<r$, з (5) випливає, що при $|\,z\,|<\delta$ та досить малих ε_1

$$\int\limits_\Omega\rho^{k+|\gamma|}(x+z,x_0)\Big|D_x^\gamma\int\limits_{V_{\varepsilon_1}(x,z)}K(x+z,y)\times$$

$$\times f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy\Big|dx<C_{1\gamma}\delta,$$

$$\int\limits_\Omega\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\Big|D_x^\gamma\int\limits_{V_{\varepsilon_1}(x,z)}K(x,y)\times$$

$$\times f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy\Big|dx<C_{2\gamma}\delta,$$

тому одержуємо (7) для всіх γ, $|\gamma|\leqslant r$.

Рівномірна обмеженість в $\overline{\Omega\setminus V_\varepsilon(x_0)}$ множини функцій $(D^\gamma Hu)(x)$ при $|\,\gamma\,|\leqslant r$ та довільних $u\in\tilde m^r_{k,C}\left(\bar\Omega,x_0\right)$, $\varepsilon>0$, випливає з

(5) і того, що $g \in \tilde{m}^r_{k,C_1}(\bar{\Omega}, x_0)$. Покажемо її одностайну неперервність в $\overline{\Omega \backslash V_\varepsilon(x_0)}$.

Нехай $x_1,\ x_2 \in \overline{\Omega \backslash V_\varepsilon(x_0)}$,

$$\int\limits_{\Omega \backslash V_\varepsilon(x_0)} \Big| D^\gamma_x K(x_1, y) - D^\gamma_x K(x_2, y) \Big| \times$$

$$\times \Big| f(y, u(y) D^\alpha u) \Big| dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega \backslash V_\varepsilon(x_0)} \Big| \sum_{j=1}^n \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} D^\gamma_x K(x_2 + \theta(x_1 - x_2), y) \times$$

$$\times d\theta (x_1 - x_2) \Big| \, |f(y, u(y), D^\alpha u)| \, dy \leqslant C''_3 \, \delta$$

при $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$ та $|\gamma| < r$ за неперервністю $(fu)(y)$ в $\overline{\Omega \backslash V_\varepsilon\,(x_0)}$ та властивостями функції $K(x,y)$. При $|\gamma| = r$ вибираємо $\delta_1 \in (0,1)$, щоб $V_{\delta_1}(x_1) \cap V_{\delta_1}(x_2) = \emptyset$. Тоді при $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$

$$\Big| D^\gamma_x \int\limits_{\Omega \backslash V_\varepsilon(x_0)} \Big[K(x_1, y) - K(x_2, y) \Big] \times$$

$$\times f(y, u(y), D^\alpha u(y)) dy \Big| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega \backslash (V_\varepsilon(x_0) \cup V_{\delta_1}(x_1) \cup V_{\delta_1}(x_2))} \Big| D^\gamma_x \Big[K(x_1, y) - K(x_2, y) \Big] \Big| \times$$

$$\Big| f(y, u(y), D^\alpha u(y)) \Big| dy +$$

$$+ \int\limits_{V_{\delta_1}(x_1)} |D^\gamma_x K(x_1, y)| \, |f(y, u(y), D^\alpha u(y))| \, dy +$$

$$+ \int\limits_{V_{\delta_1}(x_2)} |D^\gamma_x K(x_2, y)| \, |f(y, u(y), D^\alpha u(y))| \, dy \leqslant$$

$$\leqslant C_{3\gamma} \, \delta$$

(перший доданок перетворюємо як при $|\gamma| < r$, а другий і третій доданки є малі за теоремою про абсолютну неперервність інтеграла). Отже, для будь-яких $\varepsilon > 0$, $|\gamma| \leqslant r$, умовах на функцію g та (2) множина $\Big\{ D^\gamma(Hu) : u \in \tilde{m}_{k,C}(\bar{\Omega}, x_0) \Big\}$ є рівномірно обмеженою та одностайно неперервною в $\overline{\Omega \backslash V_\varepsilon\,(x_0)}$.

Перевіримо, чи оператор H є неперервним відображенням $\tilde{m}^r_{k,C}\left(\bar{\Omega}, x_0\right)$ в себе. Для $u_1\,,\ u_2 \in \tilde{m}^r_{k,C}\left(\bar{\Omega}, x_0\right)$ маємо

$$\|Hu_1 - Hu_2\|_{k,\gamma,x_0} = \int\limits_\Omega \rho^{k+|\gamma|}(x, x_0) \times$$

$$\times \Bigg| D^\gamma_x \Bigg[\int\limits_\Omega K(x,y) \; \big(f(y, u_1(y), D^\alpha u_1(y)) -$$

$$- f\,(y, u_2(y), D^\alpha u_2(y)) \Big) dy \Bigg] \Bigg| \, dx.$$

З попереднього випливає існування такої сталої $C_{4\gamma} > 0$, що

$$\|Hu_1 - Hu_2\|_{k,\gamma,x_0} \leqslant C_{4\gamma} \int\limits_\Omega \left(\rho^{k+p+n}(y, x_0) + 1 \right) \times$$

$$\times \, |f(y, u_1, D^\alpha u_1(y)) - f(y, u_2, D^\alpha u_2(y))| \, dy =$$

$$= C_{4\gamma} \int\limits_\Omega \left(\rho^{k+p+n}(y, x_0) + 1 \right) \Bigg| \int\limits_0^1 {f'}_u(y, u_2(y) +$$

$$+ \xi(u_1(y) - u_2(y)), D^\alpha u_2(y) +$$

$$+ \xi(D^\alpha u_1(y) - D^\alpha u_2(y))) \, d\xi (u_1(y) - u_2(y)) +$$

$$+ \sum_{|\alpha| \leqslant r} \int\limits_0^1 f'_{D^\alpha u}(y, u_2(y) + \xi(u_1(y) - u_2(y)),$$

$$D^\alpha u_2(y) + \xi(D^\alpha u_1(y) - D^\alpha u_2(y))) d\xi \times$$

$$\times \, (D^\alpha u_1(y) - D^\alpha u_2(y)) \Bigg| \, dy,$$

тому якщо правильні оцінки (3) та (4), то $\|\, Hu_1 - Hu_2 \,\|_{k,\gamma,x_0} \leqslant C_{5\gamma} \,\|\, u_1 - u_2 \,\|_{k,\gamma,x_0}$, $u_1\,, u_2 \in \tilde{m}^r_{k,C}\left(\bar{\Omega}, x_0\right)$, тобто оператор H неперервно відображає в $\tilde{m}^r_{k,C}\left(\bar{\Omega}, x_0\right)$ в себе. Теорема доведена.

Зауважимо, що насправді $H : \tilde{m}^l_k(\bar{\Omega}, x_0) \to \tilde{m}^l_k(\bar{\Omega}, x_0)$ для довільного натурального числа l, якщо $r \leqslant 2m - 2$, $g \in \tilde{m}^l_k(\Omega, x_0)$, $f(x,y,z)$ $\Big(x \in \Omega,\ u \in$

$(-\infty;+\infty)$, $z_i \in (-\infty;+\infty)$, $i=\overline{1,M}\Big)$ має неперервні похідні до порядку $l-r-1$ та задовольняє умову (2) при $u \in \tilde{m}^l_k\left(\bar{\Omega},\, x_0\right)$.

Справді, при $|\gamma|>r$, $|t|=r$, $\varepsilon_1<\varepsilon$ записуємо

$$\int\limits_{(\Omega\setminus V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0))\setminus V_{\varepsilon_1}(x)} D^\gamma_x K(x,y)\, f(y,u(y),D^\alpha u(y))\, dy =$$

$$\int\limits_{(\Omega\setminus V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0))\setminus V_{\varepsilon_1}(x)} ((D_x+D_y)-D_y)^{\gamma-t}\times$$

$$\times D^t_x K(x,y) f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy =$$

$$\sum_{|\beta|\leqslant|\gamma|-|t|} C_{\gamma\beta} \int\limits_{(\Omega\setminus V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0))\setminus V_{\varepsilon_1}(x)} D^\beta_y (D_x+D_y)^{\gamma-t-\beta}\times$$

$$\times D^t_y K(x,y) f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy =$$

$$=\sum_{|\beta|\leqslant|\gamma-t|} C'_{\gamma\beta} \int\limits_{(\Omega\setminus V_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0))\setminus V_{\varepsilon_1}(x)} (D_x+D_y)^{\gamma-t-\beta}\times$$

$$\times D^t_x K(x,y) D^\beta_y f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy+$$

$$+\sum_{\substack{|\beta|\leqslant|\gamma-t|\\ |q|\leqslant|\beta|-1}} C''_{\gamma\beta} \int\limits_{S\cup S_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)\cup S_{\varepsilon_1}(x)} (D_x+D_y)^{\gamma-t-\beta}\times$$

$$\times D^t_x K(x,y) \nu^q(y) D^q f(y,u(y),D^\alpha u(y))\, dS_y,$$

$S_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)=\left\{x:|x-x_0|=\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$. Оскільки $(D_x+D_y)^{\gamma-t-\beta}D^t_x K(x,y)$ має таку ж особливість при $x=y$, як $D^t_x K(x,y)$, то при вказаних умовах на функцію f та $r\leqslant 2m-2$, як при доведенні теореми 1, одержимо, що при $u\in C^l\left(\bar{\Omega}\setminus x_0\right)$, $g\in C^l(\bar{\Omega}\setminus x_0)$ також $D^\gamma Hu\in C^l\left(\bar{\Omega}\setminus x_0\right)$ для всіх $|\gamma|\leqslant l$.

Нехай $\varphi_\gamma(x)=\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)$,
$h(x,u(x))=\int\limits_\Omega K(x,y)f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy$.

Інтегруючи частинами, одержимо

$$\int\limits_{\Omega\setminus V_\varepsilon(x_0)} \varphi_\gamma(x) D^\gamma h(x,u(x))\, dx =$$

$$=(-1)^{|\gamma|}\int\limits_{\Omega\setminus V_\varepsilon(x_0)} D^\gamma\varphi_\gamma(x)h(x,u(x))dx+ \qquad (8)$$

$$+\sum_{|\beta|\leqslant|\gamma|-1}\;\int\limits_{S\cup S_\varepsilon(x_0)} \varphi_\gamma(x)\nu^\beta(x)D^\beta h(x,u(x))dS$$

Розглянемо

$$\int\limits_{\Omega\setminus V_\varepsilon(x_0)} D^\gamma\varphi_\gamma(x)h(x,u(x))\, dx =$$

$$\int\limits_{\Omega\setminus V_\varepsilon(x_0)} D^\gamma\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\times$$

$$\times\left(\int\limits_\Omega K(x,y)\, f(y,u(y),D^\alpha u(y))\, dy\right) dx.$$

За властивостями функції K для довільного мультиіндексу γ існує така стала $C_\gamma>0$, що $\int\limits_\Omega \left|D^\gamma\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)K(x,y)\right|\, dx\leqslant C_\gamma$, $y\in\bar{\Omega}$. Тоді з (2) при $u\in\tilde{m}^l_{k,C}(\bar{\Omega},x_0)$ одержимо, що $\left|\int\limits_\Omega D^\gamma\varphi_\gamma(x)h(x,u(x))\, dx\right|\leqslant C_\gamma C_2$. Зауважимо, що числа C_γ малі при малих $\rho_1=\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}\rho(x)$.

Враховуючи існування такого еліптичного диференціального оператора $A(x,D)$ з нескінченно диференційовними коефіцієнтами порядку $2m<p+n$, що $A(x,D)K(x,y)=0$ при $x\neq y$ (а отже, при $x\in S_\varepsilon\cup S$), та переходячи до локальної розпрямляючої системи координат на S_ε, і записуючи $D^\beta_x=\sum\limits_{t=0}^{2m-1} R'_t\left(\dfrac{\partial}{\partial\nu}\right)^t$, де R'_t – дотичний диференціальний оператор на S_ε порядку $q\leqslant|\beta|-t-2mi$, якщо $2mi\leqslant|\beta|<2m(i+1)$, $i=0,1,\ldots$ і R'^*_t – спряжений на S_ε до нього, одержимо

$$\int\limits_{S_\varepsilon}\varphi(x)\,\nu^\beta(x)\, D^\beta h(x,u)dS =$$

$$=\sum_{t\leqslant 2m-1\leqslant p+n-1}\int\limits_{S_\varepsilon} R'^*_t\left(\varphi(x)\,\nu^\beta(x)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^t h(x,u)\, dS.$$

При $t\leqslant 2m-1$

$$\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^t\int\limits_\Omega K(x,y)\, f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy =$$

$$= \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^t K(x,y)\ f(y,u(y), D^\alpha u(y))\ dy,$$

тому

$$\int\limits_{S_\varepsilon} \varphi_\gamma(x)\nu^\beta(x)\times$$

$$\times D^\beta \left(\int\limits_{\Omega} K(x,y)f(y,u(y),D^\alpha u(y))dy\right) dS =$$

$$= \sum_{t\leqslant p+n-1} \int\limits_{S_\varepsilon} R'^*_t(\varphi_\gamma(x)\nu^\beta(x))\times$$

$$\times \left(\int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^t K(x,y)\, f(y,u(y), D^\alpha u)\ dy\right) dS.$$

Розглянемо

$$\int\limits_{\Omega} \left(\int\limits_{S_\varepsilon} R'^*_t(\varphi_\gamma(x)\nu^\beta(x))\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^t K(x,y)dS_x\right) dy.$$

$$\left|R'^*_t(\varphi_\gamma(x)\nu^\beta(x))\right| = \left|R'^*_t(\rho^{k+|\gamma|}(x,x_0)\nu^\beta(x))\right|$$
$$\leqslant C'\rho^{k+|\gamma|-|\beta|+t+2mi}(x,x_0),$$

$|\gamma| - |\beta| + t + 2mi \geqslant 1$. Тому $R'^*_t\left(\varphi_\gamma(x)\ \nu^\beta(x)\right) = O\left(\rho^{k+1}(x,x_0)\right)$ і є неперервною на S_ε. $\left|\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^t K(x,y)\right| \leqslant C''\left(|x-y|^{p-t}+1\right)$, $p-t \geqslant p-2m+1 > 1-n$. Тоді

$$\sum_{|\gamma|\leqslant l}\ \sum_{|\beta|\leqslant|\gamma|-1} \int\limits_{S_\varepsilon} \left| R'^*_t\left(\varphi_\gamma(x)\nu^\beta(x)\right)\times\right.$$

$$\left.\times \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^t K(x,y)\right| dS_x = \psi_\varepsilon(y),\ \ \psi_\varepsilon \in C(\bar\Omega),$$

$$\psi_\varepsilon = O\left(\rho^{k+p+n}(x,x_0)\right), \quad k+p+n>0,$$

тому з (2) при $u \in \tilde m^l_{k,C}(\bar\Omega,x_0)$ та теореми Фубіні випливає збіжність $\sum\limits_{|\gamma|\leqslant l}\ \sum\limits_{|\beta|\leqslant|\gamma|-1} \int\limits_{S_\varepsilon} \varphi(x)\,\nu^\beta(x)D^\beta h(x,u)\,dS =$ $= \int\limits_{\Omega} \psi_\varepsilon(y)\, f(y,u(y),D^\alpha u)\,dy$ до нуля при $\varepsilon \to 0$ для довільного $l \geqslant r+1$.

Оскільки $(fu)(y)$ є неперервною при $y \in \overline{\Omega\backslash V_\varepsilon(x_0)}$, то існує така стала $\widehat C > 0$, що $\sum\limits_{|\gamma|\leqslant l}\ \sum\limits_{|\beta|\leqslant|\gamma|-1} \int\limits_{S} \varphi_\gamma(x)\nu^\beta(x)D^\beta h(x,u)\,dS \leqslant \widehat C$ при $u \in \tilde m^l_{k,C}(\bar\Omega,x_0)$. Стала $\widehat C$ мала при малих ρ_1.

Тепер оцінимо $\|Hu\|_{\tilde m^l_k(\bar\Omega,x_0)}$ при $u \in \tilde m^l_{k,C}(\bar\Omega,x_0)$. Якщо існує така стала $C_0 > 0$, що для довільних $C > C_0$, $l \in N$, $u \in \tilde m^l_{k,C}(\Omega,x_0)$

$$\int\limits_{\Omega} |f(y,u(y),D^\alpha u(y))|\ dy \leqslant C_2, \qquad (9)$$

$$u \in \tilde m^l_{k,C}(\Omega,x_0),$$

причому $4C_2 \sum\limits_{|\gamma|\leqslant r} C_\gamma < C$, то матимемо

$$\sum_{|\gamma|\leqslant l} \int\limits_{\Omega} |D^\gamma \varphi_\gamma(x)\, h(x,u(x))|\ dx < \frac{C}{4}.$$

З (2) одержимо, що друга група доданків у (8) є меншою від $\dfrac{C}{4}$.

Як при доведенні теореми 1, на підставі (8) та проведених міркувань при виконанні умови (9) для довільної сталої $C > \max(C_0, 4\widehat C, 2C_1)$ та $g \in \tilde m^l_{k,C_1}(\bar\Omega,x_0)$, одержимо $\|Hu\|_{\tilde m^l_k(\bar\Omega,x_0)} < \dfrac{C}{4} + \widehat C + C_1 < \dfrac{C}{4} + \dfrac{C}{4} + \dfrac{C}{2} = C$.

Використовуючи вказані міркування, подібно до теореми 1 доводиться

Теорема 2. Нехай функція $K(x,y)$ задовольняє умови теореми 1; функція $f(y,u,D^\alpha u)$ визначена при $y \in \bar\Omega$, $u \in (-\infty;+\infty)$, $D^\alpha u \in (-\infty;+\infty)$, $|\alpha| \leqslant r \leqslant 2m-2$ і має неперервні похідні за всіма аргументами до порядку $l-r-1$; існують такі додатні сталі C_0, C_1, C_1', C_0, $\tilde C_\alpha$, $|\alpha| \leqslant 2m-2$, N, що $g \in \tilde m^l_{k,C_1}(\bar\Omega,x_0)$, $g_{x_j} \in \tilde m^l_{k-1,C_1'}(\bar\Omega,x_0)$, $j=\overline{1,n}$, виконуються умови

$$\int\limits_{\Omega} |f(y,u(y),D^\alpha u(y))|\ dy \leqslant C_2, \qquad (10)$$

$$u \in \tilde m^l_{k,C}(\bar\Omega,x_0),$$

причому $C_2 \sum\limits_{|\gamma|\leqslant l} C_\gamma < CN_1$ для всіх $C > C_0$, N_1 – стала; виконуються умови (3) та (4) для довільної $u \in \tilde{m}^l_{k,C}(\bar{\Omega}, x_0)$. Існує розв'язок $u \in \tilde{m}^l_{k,C}(\bar{\Omega}, x_0)$ рівняння (1).

Введемо клас $\tilde{m}_k(\bar{\Omega}, x_0) = \Big\{ u \in C^\infty(\bar{\Omega}, x_0) : \|u\|_{k,|\gamma|,x_0} < +\infty$, для довільного мультиіндексу $\gamma \Big\}$. З теореми 2 випливає, що при $g \in \tilde{Z}_{k-1}(\bar{\Omega}, x_0)$, $K(\bullet, y) \in \tilde{Z}_p(\bar{\Omega}, y)$, $y \in \bar{\Omega}$, $p > -n$, вказаних умовах на K, нескінченно диференційовній функції f, що задовольняє умови (10), (3), (4), для довільного натурального $l \geqslant r+1$ існує розв'язок $u \in \tilde{m}_k(\bar{\Omega}, x_0)$.

Всі результати правильні й при $x_0 \in S$. Коли K є функцією Гріна крайової задачі для еліптичного диференціального оператора A, подібно до доведення теореми 1, одержуємо достатні умови розв'язності крайової задачі при заданих на межі області узагальнених функціях із $D'(S)$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Лопушанська Г.П.* Розв'язки узагальнених еліптичних задач із сильними степеневими особливостями // Мат. студії.— 1998.— **9**, N 1.— С.29—41.

2. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа.— М.: Наука, 1965.— 520 с.

Стаття надійшла до редколегії 24.12.2002