УДК 517.51

©2003 р. **О.В.Євстаф'євич, В.В.Михайлюк**

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ З НЕПЕРЕРВНИМИ ЗВУЖЕННЯМИ

У даній роботі вивчаються необхідні й достатні умови на систему $\mathcal{A}$ підмножин топологічного простору X для того, щоб для довільної функції $f: X \to \mathbb{R}$ з неперервності кожного звуження $f|_A$, де $A \in \mathcal{A}$, на A (чи в деякій точці $x_0 \in X$) випливала неперервність f на X (чи в точці x_0).

It is investigated necessary and sufficient conditions on such system $\mathcal{A}$ of subsets of a topological space X that for every function $f: X \to \mathbb{R}$ the continuity of all restrictions $f|_A$, where $A \in \mathcal{A}$, on A (or in some point $x_0 \in X$) implies the continuity f on X (or in x_0).

1. Добре відомий класичний приклад Шварца нарізно неперервної, тобто неперервної відносно кожної змінної зокрема, розривної функції $\mathrm{sp}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathrm{sp}(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2+y^2 = 0, \end{cases}$$

показує, що функція двох дійсних змінних, звуження якої на кожну вертикальну чи горизонтальну пряму є неперервним, не зобов'язана бути неперервною. Юнґи в [1] побудували приклад неперервної на кожній прямій функції $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка має досить масивну множину точок розриву. А. Розенталь у [2] довів, що функція двох дійсних змінних із неперервним звуженням на кожну диференційовну опуклу криву обов'язково є неперервною, показавши, крім того, що з неперервності звуження функції $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ на кожну двічі диференційовну криву не випливає неперервність f. У зв'язку з цим природно виникає питання: які необхідні і достатні умови на систему $\mathcal{A}$ підмножин топологічного простору X для того, щоб для довільної функції $f: X \to \mathbb{R}$ з неперервності звуження функції f на кожну множину $A \in \mathcal{A}$ випливала неперервність f на X? Вивченню цього питання присвячена дана праця.

2. Почнемо з дослідження неперервності функції в одній точці.

Нехай X – топологічний простір, $x_0 \in X$, $\mathcal{A}$ – така система підмножин простору X, що $x_0 \in A$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Казатимемо, що система $\mathcal{A}$ *сильно забезпечує неперервність функцій у точці* x_0, якщо для довільної функції $f: X \to \mathbb{R}$ з того, що звуження $f|_A: A \to \mathbb{R}$, $f|_A(x) = f(x)$ для кожного $x \in A$, є неперервним у точці x_0 для кожного $A \in \mathcal{A}$, випливає, що f також є неперервною в точці x_0. Зрозуміло, що якщо система $\mathcal{A}$ містить деякий окіл точки x_0 в X, то $\mathcal{A}$ сильно забезпечує неперервність функцій у точці x_0.

Твердження 1. *Нехай X – топологічний простір, $x_0 \in X$ і $\mathcal{A}$ – непорожня система множин $A \subseteq X$, що містять точку x_0. Тоді $\mathcal{A}$ сильно забезпечує неперервність функцій в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли для довільної множини $B \subseteq X$ такої, що $x_0 \in \overline{B}$, існує така множина $A \in \mathcal{A}$, що $x_0 \in \overline{A \cap B}$.*

Доведення. Необхідність. Нехай $B \subseteq X$ і $x_0 \in \overline{B}$. Якщо $x_0 \in B$, то для довільної множини $A \in \mathcal{A}$ маємо $x_0 \in A \cap B$, тому $x_0 \in \overline{A \cap B}$.

Нехай $x_0 \notin B$. Тоді характеристична функція множини B розривна в точці x_0. Оскільки система $\mathcal{A}$ сильно забезпечує неперервність функцій у точці x_0, то існує таке $A \in \mathcal{A}$, що звуження характеристичної функції множини B на множину A розривне в точці x_0, тобто $x_0 \in \overline{A \cap B}$.

Достатність. Нехай $f: X \to \mathbb{R}$ – така функція, що всі звуження $f|_A$, де $A \in \mathcal{A}$, неперервні в точці x_0. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покладемо $B = \{x \in X : |f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon\}$. Зауважимо, що $x_0 \notin \overline{A \cap B}$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Тому $x_0 \notin \overline{B}$ і множина $U = X \setminus B = \{x \in X : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$ є околом точки x_0 в X. Отже, f неперервна в точці x_0. Тому $\mathcal{A}$ сильно забезпечує неперервність функцій у точці x_0.

Дане твердження не дуже зручне для безпосередньої перевірки того, чи сильно забезпечує та чи інша система неперервність функцій у даній точці, оскільки воно вимагає дослідження поведінки цієї системи на всіх множинах, замикання яких містять дану точку. Наступний результат дає можливість у певних просторах обмежитися розглядом зліченних множин або збіжних послідовностей.

Нагадаємо, що топологічний простір називається *спадково сепарабельним*, якщо довільна його підмножина є сепарабельною.

Теорема 1. *Нехай X – T_1-простір, $x_0 \in X$ і $\mathcal{A}$ – непорожня система підмножин простору X, які містять точку x_0. Тоді кожне з наступних тверджень випливає з попереднього, причому імплікація $(ii) \Longrightarrow (i)$ має місце, якщо X спадково сепарабельний, і всі ці твердження рівносильні, якщо в X існує зліченна база околів точки x_0:*

(i) *$\mathcal{A}$ сильно забезпечує неперервність функцій у точці x_0;*

(ii) *для довільної зліченної множини $B \subseteq X$ такої, що $x_0 \in \overline{B}$, існує така множина $A \in \mathcal{A}$, що $x_0 \in \overline{A \cap B}$;*

(iii) *для довільної послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $x_n \in X$, яка збігається до x_0, існує множина $A \in \mathcal{A}$ така, що множина $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in A\}$ є нескінченною.*

Доведення. Імплікація $(i) \Longrightarrow (ii)$ безпосередньо випливає з твердження 1.

Нехай виконується (ii). Для доведення імплікації $(ii) \Longrightarrow (iii)$ досить перевірити (iii) для довільної збіжної до x_0 послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ точок $x_n \in X$, відмінних від x_0, причому оскільки X – T_1-простір, то можна вважати, що всі точки x_n різні. Залишилось використати (ii) для множини $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Нехай X – спадково сепарабельний простір. Тоді імплікація $(ii) \Longrightarrow (i)$ випливає безпосередньо з твердження 1 й означення спадково сепарабельного простору, причому оскільки X є T_1-простором, то відповідну умову з твердження 1 достатньо перевірити тільки для нескінченних множин B.

Нехай в X існує зліченна база $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ околів U_n точки x_0. Використовуючи твердження 1, доведемо імплікацію $(iii) \Longrightarrow (i)$. Нехай $B \subseteq X$ і $x_0 \in \overline{B}$, причому $x_0 \notin B$. Вибравши для кожного $n \in \mathbb{N}$ точку $x_n \in B \cap (\bigcap\limits_{k=1}^{n} U_k)$, ми одержимо збіжну до x_0 послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Оскільки X є T_1-простором, то з цієї послідовності можна виділити підпослідовність, яка складається з різних точок. Тому ми можемо вважати, що всі точки x_n різні. З (iii) випливає, що існує множина $A \in \mathcal{A}$, яка містить множину значень деякої підпослідовності послідовності $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Тепер легко перевірити, що $x_0 \in \overline{A \cap B}$.

Наведемо приклади, які вказують на істотність у попередній теоремі умов спадкової сепарабельності та існування зліченної бази околів. Крім того, приклад 2 доводить, що спадкова сепарабельність не є достатньою для одержання імплікації $(iii) \Longrightarrow (i)$.

Приклад 1. Нехай $X = [0,1]^{[0,1]}$, тобто X – це простір усіх функцій $x : [0,1] \to [0,1]$ з топологією поточкової збіжності, і $x_0 \equiv 0$, тобто $x_0(t) = 0$ для всіх $t \in [0,1]$. Позначимо через $\mathcal{P}$ систему всіх скінченних підмножин відрізка $[0,1]$. Нехай для кожного $P \in \mathcal{P}$

$$x_P(t) = \begin{cases} 0, & t \in P; \\ 1, & t \in [0,1] \setminus P, \end{cases}$$

Розглянемо множину $B_0 = \{x_P : P \in \mathcal{P}\}$. Оскільки $x_P(t) = x_0(t)$ для кожного $t \in P$ і $\mathcal{P}$ – система всіх скінченних підмножин відрізка $[0,1]$, то $x_0 \in \overline{B_0}$.

Нехай $\mathcal{A}$ – система всіх зліченних підмножин A простору X таких, що $x_0 \in A$, $A \cap B_0 = \emptyset$ і $x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$. Зауважимо, що $\mathcal{A}$ непорожня. Покажемо, що $\mathcal{A}$ задовольняє умову (ii) теореми 1. Візьмемо довільну зліченну множину $B \subseteq X$ таку, що $x_0 \in \overline{B}$. Якщо $x_0 \in B$, то $x_0 \in B \cap A \subseteq \overline{B \cap A}$ для довільної множини $A \in \mathcal{A}$. Нехай $x_0 \notin B$. Позначимо $B_1 = B \cap B_0$, $B_2 = B \setminus B_1$. Оскільки множина B_1 не більш ніж зліченна, то множина $S = \bigcup\limits_{x_P \in B_1} P$ також не більш ніж зліченна, і тому $[0,1] \setminus S \neq \emptyset$. Для довільних $t \in [0,1] \setminus S$ і $x \in B_1$ маємо $x(t) = 1$, а $x_0(t) = 0$, тому $x_0 \notin \overline{B_1}$. Але $x_0 \in \overline{B}$ і $\overline{B} = \overline{B_1} \cup \overline{B_2}$, отже, $x_0 \in \overline{B_2}$, причому множина B_2 нескінченна, адже $x_0 \notin B_2$. Таким чином, зліченна множина $A = B_2 \cup \{x_0\}$ входить в систему $\mathcal{A}$ і $x_0 \in \overline{A \cap B} = \overline{B_2}$.

Отже, система $\mathcal{A}$ задовольняє умову (ii) теореми 1, але $x_0 \in \overline{B_0}$ і $A \cap B_0 = \emptyset$ для всіх $A \in \mathcal{A}$. Значить, згідно з твердженням 1, $\mathcal{A}$ не задовольняє умову (i) теореми 1.

Приклад 2. Нехай X – це простір l_1 зі слабкою топологією, $x_0 = (0, 0, 0, \ldots)$, $\mathcal{A}$ – система всіх множин $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$ таких, що послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ слабко збігається до x_0 в l_1 і $B = \{x \in l_1 : \|x\| = 1\}$.

Оскільки кожний простір з другою аксіомою зліченності, зокрема сепарабельний метризовний простір, є спадково сепарабельним, то l_1 спадково сепарабельний. Крім того, сепарабельність зберігається при ослабленні топології, тому X також спадково сепарабельний і для простору X умови (i) та (ii) рівносильні.

Згідно з означенням, система $\mathcal{A}$ задовольняє умову (iii) в просторі X для точки x_0 і точка x_0 входить у замикання множини B в X. Як випливає з теореми Шура [3, с.297], кожна слабко збіжна до x_0 послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ сильно збігається до x_0, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$. Тому множина $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B\}$ скінченна. Значить, множина $A \cap B$ також скінченна і $x_0 \notin \overline{A \cap B}$ для кожного $A \in \mathcal{A}$. Таким чином, $\mathcal{A}$ не задовольняє умову (i) теореми 1.

З наступного прикладу випливає, що спадкова сепарабельність та існування зліченної бази околів не є необхідними умовами для одержання відповідних імплікацій з теореми 1.

Приклад 3. Нехай D – довільний незліченний дискретний простір, $X = D \bigcup \{x_0\}$ – компактифікація Александрова (див. [4, с.261]) простору D. Оскільки довільна послідовність $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ різних точок $x_n \in X$ збігається до x_0, то довільна нескінченна множина $B \subseteq X$ містить множину значень деякої збіжної до x_0 послідовності. Тому виконується імплікація $(iii) \Longrightarrow (i)$. Отже, умови (i), (ii) та (iii) з теореми 1 для цього простору X рівносильні.

З іншого боку, оскільки простір D незліченний, то X не сепарабельний і не має зліченної бази околів точки x_0.

3. Неперервність функції в даній точці може гарантуватися не тільки неперервністю деяких звужень даної функції лише в цій точці, а й неперервністю в інших точках, причому в такій постановці доцільно розглядати також звуження на множини, які не містять дану точку.

Будемо казати, що система $\mathcal{A}$ підмножин топологічного простору X *забезпечує неперервність функцій у точці* $x_0 \in X$, якщо для довільної функції $f : X \to \mathbb{R}$ з того, що звуження $f|_A$ функції f на множину A є неперервним для кожного $A \in \mathcal{A}$, випливає, що функція f неперервна в точці x_0. Якщо система $\mathcal{A}$ забезпечує неперервність у кожній точці $x \in X$, то казатимемо, що система $\mathcal{A}$ *забезпечує неперервність функцій на* X.

З відповідних означень випливають наступні твердження.

Твердження 2. *Нехай система $\mathcal{A}$ підмножин топологічного простору X така, що система $\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ сильно забезпечує неперервність функцій у деякій точці $x \in X$. Тоді $\mathcal{A}$ забезпечує неперервність функцій у точці x.*

Твердження 3. *Нехай система $\mathcal{A}$ підмножин топологічного простору X така, що для кожного $x \in X$ система $\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$ сильно забезпечує неперервність функцій у точці x. Тоді $\mathcal{A}$ забезпечує неперервність функцій на X.*

Наведемо приклад, який показує, що твердження, обернені до щойно сформульованих, не справджуються навіть у випадку $X = \mathbb{R}$.

Приклад 4. Нехай $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ – система всіх таких множин $A \subseteq X$, що множина $\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \in A\}$ скінченна. Для кожного $x \in X$ нехай $\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{A} : x \in A\}$. Оскільки для довільної точки $x \neq 0$ існує такий окіл U_x точки x в $\mathbb{R}$, що множина $\{n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} \in U_x\}$ скінченна, тобто $U_x \in \mathcal{A}_x$, то система $\mathcal{A}_x$ сильно забезпечує неперервність функцій у точці x. Але з теореми 1 випливає, що система $\mathcal{A}_0$ не забезпечує сильно неперервність функцій у точці 0.

Покажемо тепер, що $\mathcal{A}$ забезпечує неперервність функцій у точці 0. Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ така, що звуження $f|_A$ неперервне для кожного $A \in \mathcal{A}$. Тоді, як випливає з одержаного вище, f неперервна в кожній точці $x \neq 0$. Залишилось перевірити неперервність функції f у точці 0. Оскільки звуження функції f на множину $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} = A \in \mathcal{A}$ неперервне, то досить показати, що $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = f(0)$. Використовуючи неперервність f у точках $\frac{1}{n}$, де $n \in \mathbb{N}$, для кожного $n \in \mathbb{N}$ виберемо точку $x_n \in A$ таку, що $|f(x_n) - f(\frac{1}{n})| < \frac{1}{n}$ і $|x_n - \frac{1}{n}| < \frac{1}{n}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ і $\lim\limits_{n\to\infty} f(\frac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$. Отже, $\mathcal{A}$ забезпечує неперервність на X.

Твердження 2 і 3 разом із теоремою 1 дають відповідні достатні умови того, щоб система $\mathcal{A}$ забезпечувала неперервність функцій у точці x_0 чи на всьому просторі X, а приклад 4 показує, що ці умови не є необхідними.

Наступний результат дає необхідну умову того, що система $\mathcal{A}$ забезпечує неперервність функцій у точці, яка є певним аналогом умови (iii) з теореми 1.

Нагадаємо, що підмножина G топологічного простору X називається *функціонально відкритою*, якщо існує така неперервна функція $f : X \to [0,1]$, що $G = f^{-1}((0,1]) = \{x \in X : f(x) > 0\}$. Об'єднання зліченної кількості й перетин скінченної кількості функціонально відкритих множин також є функціонально відкритими (див. [4, с.78]).

Теорема 2. *Нехай X – гаусдорфовий простір, x_0 – неізольована точка в просторі X і система $\mathcal{A}$ підмножин простору X забезпечує неперервність функцій у точці x_0. Тоді для довільної послідовності $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх функціонально відкритих в X множин G_n такої, що для кожного околу U точки x_0 в X існує такий номер $n_0 \in \mathbb{N}$, що $G_n \subseteq U$ для всіх $n > n_0$, існує таке $A \in \mathcal{A}$, що $x_0 \in A$ і множина $\{n \in \mathbb{N} : A \cap G_n \neq \emptyset\}$ нескінченна.*

Доведення. Нехай $(G_n)_{n=1}^{\infty}$ – довільна послідовність непорожніх функціонально відкритих множин в X, що задовольняє умову теореми.

а). Спочатку доведемо теорему у випадку, коли $x_0 \notin G_n$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Візьмемо такі неперервні функції $f_n : X \to [0,1]$, що $G_n = f_n^{-1}((0,1])$. Оскільки множини G_n непорожні, то $r_n = \sup\limits_{x\in X} f_n(x) > 0$ для кожного $n \in \mathbb{N}$. Функції $g_n : X \to [0,1]$, $g_n(x) = \frac{f_n(x)}{r_n}$, де $x \in X$, неперервні на X, причому $g_n^{-1}((0,1]) = G_n$ і $\sup\limits_{x\in X} g_n(x) = 1$. Розглянемо функцію $g = \sum\limits_{n=1}^{\infty} g_n$. Покажемо, що функція g визначена на X, неперервна на $X \setminus \{x_0\}$ і розривна в точці x_0.

Нехай $x_1 \in X$ і $x_1 \neq x_0$. Оскільки X гаусдорфовий, то існують околи U_1 і U_0 в X точок x_1 і x_0 відповідно такі, що $U_1 \cap U_0 = \emptyset$. Виберемо номер $n_0 \in \mathbb{N}$ такий, що $G_n \subseteq U_0$ для всіх $n > n_0$. Тоді $g_n(x) = 0$ для всіх $x \in U_1$ і $n > n_0$. Тому $g(x) = \sum\limits_{n=1}^{n_0} g_n(x)$ на U_1, функція g визначена на U_1 і неперервна в точці x_1.

Оскільки $g_n(x_0) = 0$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, то $g(x_0) = 0$. Для довільного околу U точки x_0 виберемо такий номер n, що $G_n \subseteq U$. Тоді $\sup\limits_{x\in U} g(x) \geq \sup\limits_{x\in U} g_n(x) = 1$. Отже, функція g розривна в точці x_0.

Нагадаємо, що система $\mathcal{A}$ забезпечує неперервність функцій у точці x_0. Тому існує $A \in \mathcal{A}$ таке, що функція $g|_A$ не є неперервною. З неперервності g на $X \setminus \{x_0\}$ випливає, що $x_0 \in A$. Позначимо $N_1 = \{n \in \mathbb{N} : A \cap G_n \neq \emptyset\}$. Тоді $g|_A = \sum\limits_{n \in N_1} g_n|_A$. Оскільки всі функції $g_n|_A$ неперервні, а функція $g|_A$ розривна, то множина N_1 нескінченна й теорема в цьому випадку доведена.

б). Якщо множина $N = \{n \in \mathbb{N} : x_0 \notin G_n\}$ нескінченна, то досить розглянути послідовність $(G_n)_{n \in N}$ і використати результат, доведений в *а)*.

в). Нехай множина N – скінченна. Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $N = \emptyset$. Покажемо, що для довільного $n \in \mathbb{N}$ існує непорожня функціонально відкрита множина $G'_n \subseteq G_n$ така, що $x_0 \notin G'_n$. Зафіксуємо $n \in \mathbb{N}$. Оскільки точка x_0 не є ізольованою точкою в X, то існує таке $x_n \in G_n$, що $x_n \neq x_0$. З умови теореми випливає, що існує таке $k \in \mathbb{N}$, що $x_n \notin G_k$. Зауважимо, що $x_0 \in G_k$, тому існує деяка неперервна функція на X, яка має різні значення в точках x_n і x_0. Звідси випливає, що існує така функціонально відкрита множина G, що $x_n \in G$ і $x_0 \notin G$. Тоді множина $G'_n = G \cap G_n$ є шуканою.

Оскільки послідовність $(G'_n)_{n=1}^{\infty}$ задовольняє умову випадку *а)* і $G'_n \subseteq G_n$, то висновок теореми, доведений в *а)* для послідовності $(G'_n)_{n=1}^{\infty}$, справджується і для послідовності $(G_n)_{n=1}^{\infty}$.

Теорема 2 дає також відповідну необхідну умову того, що система $\mathcal{A}$ забезпечує неперервність функцій на гаусдорфовому просторі X. Але, як показує наступний приклад, ці умови не є достатніми.

Приклад 5. Нехай $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \{\mathbb{Q}, \mathbb{I}\}$, де $\mathbb{Q}$ та $\mathbb{I}$ – множини раціональних та ірраціональних чисел відповідно. Легко бачити, що $\mathcal{A}$ задовольняє умову з теореми 2 для довільної точки $x \in X$. Але скрізь розривна функція Діріхле $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}; \\ 0, & x \in \mathbb{I}, \end{cases}$$

така, що звуження $f|_{\mathbb{Q}}$ і $f|_{\mathbb{I}}$ є неперервними.

4. На завершення даної роботи сформулюємо деякі питання, які природно постають у зв'язку з викладеними результатами.

Питання 1. *Описати клас топологічних просторів, для яких умови (i) та (ii) (чи (i) та (iii)) рівносильні.*

Питання 2. *Які необхідні й достатні умови повинна задовольняти система множин $\mathcal{A}$, яка забезпечує неперервність функцій у точці (чи на всьому просторі X), якщо $X = \mathbb{R}$ чи, загальніше, X – довільний метризовний простір?*

Аналогічно, як у теорії нарізно неперервних відображень, вивчається множина точок розриву нарізно неперервних функцій (див., наприклад, [5] і вказану там літературу), виникає двоїста задача про дослідження множини точок розриву функцій, визначених на даному просторі, і неперервних на заданих множинах.

Питання 3. *Охарактеризувати множини точок розриву функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, звуження яких на кожну пряму (двічі диференційовну криву) неперервні.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Young G., Young W.* Discontinuous functions continuous with respect to every straight line // Quart. J. Pure Appl. Math.— 1909.— **41**.— P.87—99.

2. *Rosenthal A.* On the continuiuty of functions of several variables // Math. Z.— 1955.— **63**.— S.31—38.

3. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1977.— 744 с.

4. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

5. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете. Дис. ... доктора фіз.-мат. наук.— Чернівці, 1999.— 345 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.01.2003