УДК 514.76

©2003 р. С.С.Дрінь, І.І.Дрінь

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є-БЕССЕЛЯ ПРОСТОРІВ ТИПУ S та S'

Вивчаються властивості перетворення Фур'є-Бесселя функцій з просторів типу S та узагальнених функцій типу ультрарозподілів Жевре.

The properties of Fourier-Bessel transform are studied for functions of S-spaces and generalized functions of Jevre ultradisributions type.

Метод інтегральних перетворень (Фур'є, Фур'є-Бесселя, Лежандра, Лапласа, Вебера, Ганкеля та ін.) є одним із ефективних методів побудови розв'язків задач математичної фізики в різних формах, зручних для аналітичного дослідження. Тут вивчаються властивості перетворення Фур'є-Бесселя, яке діє в просторах нескінченно диференційовних функцій типу S, а також у просторах ультрарозподілів Жевре типу S' — просторах лінійних неперервних функціоналів зі слабкою збіжністю, заданих на основних функціях із просторів типу S.

1. Простори типу S та S^0. І.М. Гельфанд та Г.Є. Шилов ввели в [1] серію просторів, названих ними просторами типу S. Вони складаються з нескінченно диференційовних функцій, визначених на $\mathbb{R}$, на які накладаються певні умови спадання на нескінченності й зростання похідних. Ці умови задаються за допомогою нерівностей

$$|x^k\varphi^{(m)}(x)| \le c_{km}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \{k,m\} \subset \mathbb{Z}_+,$$

де $\{c_{km}\}$ — деяка подвійна послідовність додатних чисел. Якщо на елементи послідовності $\{c_{km}\}$ не накладаються жодні обмеження (тобто c_{km} можуть змінюватись довільно разом із функцією φ), то маємо, очевидно, простір S Л. Шварца швидко спадних функцій. Якщо ж числа c_{km} задовольняють певні умови, то відповідні конкретні простори містяться в S і називаються просторами типу S. Означимо деякі з них.

Для довільних $\alpha, \beta \ge 0$ покладемо

$$S_\alpha(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha := \{\varphi \in S \,|\, \forall \{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+$$
$$\exists c_n > 0 \,\exists A > 0 \,\forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|x^m\varphi^{(n)}(x)| \le c_n A^m m^{m\alpha}\},$$
$$S^\beta(\mathbb{R}) \equiv S^\beta := \{\varphi \in S \,|\, \forall \{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+$$
$$\exists c_m > 0 \,\exists B > 0 \,\forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|x^m\varphi^{(n)}(x)| \le c_m B^n n^{n\beta}\},$$
$$S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta := \{\varphi \in S \,|\, \exists c > 0 \,\exists A > 0$$
$$\exists B > 0 \,\forall \{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+ \,\forall x \in \mathbb{R} :$$
$$|x^m\varphi^{(n)}(x)| \le cA^m B^n m^{m\alpha} n^{n\beta}\}.$$

Введені простори типу S можна охарактеризувати ще й так [1].

$S_\alpha (\alpha > 0)$ складається з тих і тільки тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, для яких справджуються оцінки

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le c_n' \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\},$$
$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c_n' і a, які залежать лише від функції φ. При $\beta \in (0,1)$ простір S^β містить лише функції φ, що продовжуються з $\mathbb{R}$ до цілих функцій $\varphi(x+iy)$ і для яких

$$|x^m\varphi(x+iy)| \le c_m' \exp\{b|y|^{1/(1-\beta)}\},$$
$$c_m' > 0, \quad b > 0, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \quad \{x,y\} \subset \mathbb{R}.$$

S_α^β складається з тих і тільки тих нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють нерівності

$$|\varphi^{(n)}(x)| \le cB^n n^{n\beta} \exp\{-a|x|^{1/\alpha}\},$$
$$n \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

з деякими додатними сталими c, B і a, залежними лише від функції φ; при цьому $S_\alpha^\beta = S_\alpha \cap S^\beta$ для довільних $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$ [2]. Простори S_α^β не є тривіальними при: 1) $\alpha + \beta \geq 1$, $\alpha > 0$; $\beta > 0$; 2) $\alpha = 0$, $\beta > 1$; 3) $\beta = 0$, $\alpha > 1$. Ці простори утворюють щільні множини в $L_2(\mathbb{R})$. Якщо $0 < \beta < 1$ і $\alpha \geq 1 - \beta$, то елементами простору S_α^β є ті й тільки ті функції φ, які аналітично продовжуються в $\mathbb{C}$ і для яких

$$|\varphi(x+iy)| \leq c \exp\{-a|x|^{1/\alpha} + b|y|^{1/(1-\beta)}\},$$

$$c > 0, \quad a > 0, \quad b > 0, \quad \{x, y\} \subset \mathbb{R}.$$

Нехай $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, причому $\alpha + \beta \geq 1$. Символом $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$ ($S^\beta(\mathbb{C})$) позначатимемо сукупність функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є аналітичними продовженнями функцій з простору $S_\alpha^\beta(\mathbb{R}) \equiv S_\alpha^\beta$ (з простору $S^\beta(\mathbb{R}) \equiv S^\beta$) у комплексну площину. Простір $S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$ можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $S_{\alpha,a}^{\beta,b}(\mathbb{C})$, де $S_{\alpha,a}^{\beta,b}(\mathbb{C})$ складається з тих функцій $\varphi \in S_\alpha^\beta(\mathbb{C})$, для яких правильними є нерівності

$$|\varphi(x+iy)| \leq c\, exp\left\{-\bar{a}|x|^{1/\alpha} + \bar{b}|y|^{1/(1-\beta)}\right\},$$

$$z = x + iy \in \mathbb{C},$$

де $\bar{a}$ — довільна додатна стала, менша від a, $\bar{b}$ — довільна стала, більша від b. Якщо для $\varphi \in S_{\alpha,a}^{\beta,b}(\mathbb{C})$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho} := \sup_{z\in\mathbb{C}}\Big[|\varphi(z)| \cdot exp\Big\{a(1-\delta)|x|^{1/\alpha} -$$

$$-b(1+\rho)|y|^{1/(1-\beta)}\Big\}\Big], \quad \{\delta, \rho\} \subset \{1/n,\ n \geq 2\},$$

то з цими нормами простір $S_{\alpha,a}^{\beta,b}(\mathbb{C})$ стає повним зліченно нормованим простором. Аналогічно визначається топологія в просторі $S^\beta(\mathbb{C})$.

Символами $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta$, $\overset{\circ}{S}{}^\beta$, $\overset{\circ}{S}_\alpha$ позначатимемо сукупності всіх парних функцій з просторів S_α^β, S^β, S_α відповідно. Ці простори з відповідною топологією називатимемо основними просторами або просторами типу $\overset{\circ}{S}$, а їх елементи — основними функціями. Сукупності функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є аналітичними продовженнями функцій з простору $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta(\mathbb{R})$ або з простору $\overset{\circ}{S}{}^\beta(\mathbb{R})$, $\{\alpha, \beta\} \subset (1,0)$, $\alpha + \beta \geq 1$, у комплексну площину, позначатимемо відповідно символами $\overset{\circ}{S}{}_\alpha^\beta(\mathbb{C})$ та $\overset{\circ}{S}{}^\beta(\mathbb{C})$.

2. Перетворення Фур'є-Бесселя в просторах типу S^0. Із означення простору $\overset{\circ}{S}{}^\beta(\mathbb{C})$ випливає, що для функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^\beta(\mathbb{C})$, $\beta \in (0,1)$, еквівалентними є твердження

1) $\exists b > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_k' > 0 \quad \forall z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$|z^{2k}\varphi(x+iy)| \leq c_k' \exp\left\{b|y|^{1/(1-\beta)}\right\};$$

2) $\exists B > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists c_k'' > 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+$ $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|x^{2k}\varphi^{(2n)}(x)| \leq c_k'' B^n n^{2n\beta}.$$

На функціях із простору $\overset{\circ}{S}{}^\beta$, $\beta \in (0,1)$ визначені пряме та обернене перетворення Фур'є-Бесселя F_B, F_B^{-1}

$$\psi(\sigma) \equiv F_B[\varphi](\sigma) := \int_0^\infty \varphi(x)\, j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^\beta,$$

$$\varphi(x) \equiv F_B^{-1}[\psi](x) := c_\nu \int_0^\infty \psi(\sigma)\, j_\nu(\sigma x)\sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

де $c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}$, $\nu > -1/2$ — фіксований параметр, j_ν — нормована функція Бесселя, яка є розв'язком рівняння $B_\nu u = \lambda u$, де $B_\nu := \dfrac{d^2}{dx^2} + \dfrac{2\nu+1}{x}\dfrac{d}{dx}$ — оператор Бесселя, за умови, що $u(0) = 1$, $u'(0) = 0$. Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Правильною є формула*

$$F_B[\overset{\circ}{S}{}^\beta] = \overset{\circ}{S}_\beta, \quad \beta \in (0,1);$$

при цьому інтегральний оператор $F_B : \overset{\circ}{S}{}^\beta \to \overset{\circ}{S}_\beta$ *є обмеженим і неперервним* (тут $F_B[X]$ позначає простір Фур'є-образів елементів з простору X).

Доведення. Нехай $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}$, $\beta \in (0,1)$,

$$\psi(\sigma) := F_B[\varphi](\sigma) =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x)\, j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \quad \nu > -1/2,$$

Оскільки інтеграл

$$\int_0^\infty \varphi(x) \frac{\partial^{2n}}{\partial \sigma^{2n}} j_\nu(\sigma x) x^{2n+2\nu+1} dx$$

є абсолютно збіжним при кожному $n \in \mathbb{Z}_+$ (бо $\left| \frac{\partial^{2n}}{\partial \sigma^{2n}} j_\nu(\sigma x) \right| \leq \beta_{n,\nu} < +\infty$, $\forall n \in \mathbb{Z}_+$, $\{\sigma, x\} \subset \mathbb{R}$), то ψ — нескінченно диференційовна, парна на $\mathbb{R}$ функція, причому

$$\psi^{(2n)}(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(x) \frac{\partial^{2n}}{\partial \sigma^{2n}} j_\nu(\sigma x) x^{2n+2\nu+1} dx,$$

$$n \in \mathbb{Z}_+.$$

Здійснимо оцінку функції $\left|\sigma^{2k}\psi^{(2n)}(\sigma)\right|$, $\sigma \in \mathbb{R}$ при довільно фіксованих $\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+$. Із інтегральної формули Пуассона

$$j_\nu(s) = A_\nu \int_0^{\pi/2} \cos(s \cos\omega) \sin^{2\nu} \omega d\omega,$$

$$\nu > -1/2, \quad s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C},$$

$$A_\nu = 2\Gamma(\nu+1) \left(\sqrt{\pi}\Gamma(\nu + 1/2)\right)^{-1},$$

для нормованої функції Бесселя та теореми про середнє значення випливає, що

$$j_\nu(s) = \frac{\pi}{2} A_\nu \cos(s \cos\omega_0) \sin^{2\nu} \omega_0 =$$

$$= \tilde{A}_\nu \left(e^{i\, s\, \cos\omega_0} + e^{-i\, s\, \cos\omega_0}\right),$$

де $\omega_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\tilde{A}_\nu = \frac{\pi}{4} A_\nu \sin^{2\nu} \omega_0$. Тоді при $s = \sigma \in \mathbb{R}$ знаходимо, що

$$j_\nu^{(2n)}(\sigma) = \tilde{A}_\nu (i\, \cos\omega_0)^{2n} \left(e^{i\sigma\cos\omega_0} + e^{-i\sigma\cos\omega_0}\right), \quad n \in \mathbb{Z}_+. \tag{1}$$

Внаслідок (1) маємо співвідношення:

$$\sigma^{2k}\psi^{(2n)}(\sigma) = c_{n,\nu} \left(\int_0^\infty \Psi_1(\sigma, x) dx + \int_0^\infty \Psi_2(\sigma, x) dx \right), \tag{2}$$

де $c_{n,\nu} = \tilde{A}_\nu (i\cos\omega_0)^{2n}$,

$$\Psi_1(\sigma, x) = \sigma^{2k} \varphi(x) e^{i\sigma x \cos\omega_0} x^{2n+2\nu+1},$$

$$\Psi_2(\sigma, x) = \sigma^{2k} \varphi(x) e^{-i\sigma x \cos\omega_0} x^{2n+2\nu+1}.$$

Нехай $z \in \Pi_{h_0} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : 0 \leq x < +\infty, |y| \leq |h_0|\}$, де $h_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ — довільно фіксоване. Тоді

$$\left|e^{i\sigma z\cos\omega_0}\right| = \left|e^{i\sigma(x+iy)\cos\omega_0}\right| = \left|e^{-\sigma y\cos\omega_0}\right| \leq$$

$$\leq e^{|\sigma|\,|y|} \leq e^{|\sigma|\, h_0},$$

а

$$|z^{2n+2\nu+1}\varphi(z)| \leq \frac{c_k'}{|z|^p} \exp\left\{b|y|^{1/(1-\beta)}\right\} \leq$$

$$\leq \tilde{c}_k' \frac{1}{|z|^p} \leq \frac{\tilde{c}_k'}{x^p}, \quad |z| > 0, \;\; x > 0,$$

внаслідок умови 1), де

$$\tilde{c}_k' = c_k' \exp\left\{b|h_0|^{1/(1-\beta)}\right\},$$

$$p = 2n + 2([2\nu+1]+1) - 2n - 2\nu - 1 > 0,$$

тобто $z^{2n+2\nu+1}\varphi(z) \to 0$ при $x \to +\infty$ рівномірно за y в будь-якій смузі Π_{h_0}. Функція $\Psi_1(\sigma, z)$ неперервна в точці $z = 0$ і аналітична в півплощині $\operatorname{Im} z > 0$, тому інтеграл за z від функції $\Psi_1(\sigma, z)$ по замкненому контуру γ_h^1 (див. Рис. 1) дорівнює нулеві.

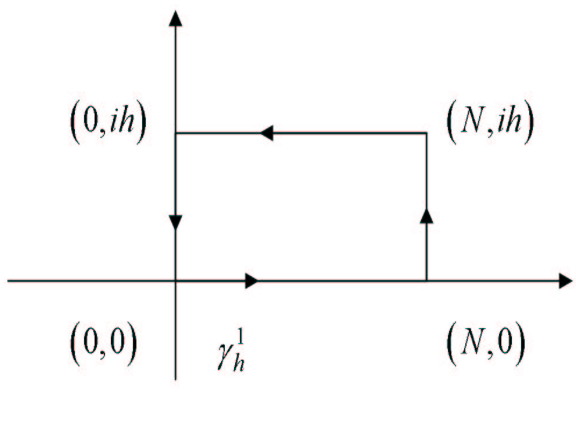

Рис.1

Отже,

$$\int_0^N \Psi_1(\sigma,x)dx = i\int_0^h \Psi_1(\sigma,iy)dy +$$

$$+\int_0^N \Psi_1(\sigma,x+ih)dx - i\int_0^h \Psi_1(\sigma,N+iy)dy. \quad (3)$$

Оскільки $(N+iy)^{2n+2\nu+1}\varphi(N+iy)\to 0$ при $N\to+\infty$ рівномірно за y в смузі Π_h, а функція $\exp\{i\sigma(N+iy)\cos\omega_0\}$ обмежена в Π_h за модулем, то третій інтеграл у правій частині співвідношення (3) прямує до нуля при $N\to+\infty$. Здійснивши в (3) граничний перехід при $N\to+\infty$, одержимо, що

$$\int_0^{+\infty} \Psi_1(\sigma,x)dx =$$

$$= i\int_0^h \Psi_1(\sigma,iy)dy + \int_0^\infty \Psi_1(\sigma,x+ih)dx.$$

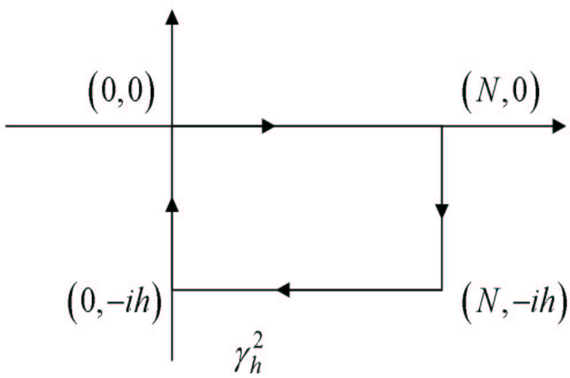

Рис.2

Властивості функції Ψ_2 аналогічні властивостям функції Ψ_1. Тому, якщо для функції Ψ_2 взяти за контур інтегрування контур γ_h^2 (Рис. 2), то, міркуючи аналогічно попередньому, знайдемо, що

$$\int_0^\infty \Psi_2(\sigma,x)dx =$$

$$= -i\int_0^h \Psi_2(\sigma,-iy)dy + \int_0^\infty \Psi_2(\sigma,x-ih)dx. \quad (4)$$

Оскільки $\Psi_2(\sigma,-iy)=\Psi_1(\sigma,iy)$, то внаслідок (2), (3), (4) дістаємо співвідношення

$$\sigma^{2k}\psi^{(2n)}(\sigma) = c_{h,\nu}\left(\int_0^h \Psi_1(\sigma,x+ih)dx + \right.$$

$$\left.\int_0^\infty \Psi_2(\sigma,x-ih)dx\right) \equiv c_{h,\nu}(\mathcal{J}_1(\sigma)+\mathcal{J}_2(\sigma)).$$

Оцінимо $\mathcal{J}_1$. Очевидно, що

$$|\mathcal{J}_1(\sigma)| \le |\sigma|^{2k}e^{-\sigma h\cos\omega_0}\times$$

$$\times\int_0^\infty |\varphi(x+ih)|\cdot|x+ih|^{2n+2\nu+1}dx.$$

Оскільки

$$|x+ih|^{2n+2\nu+1} = \left(\sqrt{x^2+h^2}\right)^{2n+2\nu+1} =$$

$$= (x^2+h^2)^{n+\nu+1/2} \le \left(2\max\{x^2,h^2\}\right)^{n+\nu+1/2} \le$$

$$\le 2^{n+\nu+1/2}\left(x^{2n+2\nu+1}+|h|^{2n+2\nu+1}\right),$$

то

$$|\mathcal{J}_1(\sigma)| \le$$

$$\le 2^{n+\nu+1/2}|\sigma|^{2k}e^{-\sigma h\cos\omega_0}\left(\Phi_1(h)+\Phi_2(h)\right),$$

де

$$\Phi_1(h) = \int_0^\infty |\varphi(x+ih)|x^{2n+2\nu+1}dx,$$

$$\Phi_2(h) = h^{2n+2\nu+1}\int_0^\infty |\varphi(x+ih)|dx.$$

З умови 1) випливають нерівності

$$\int_0^\infty |\varphi(x+ih)|dx =$$

$$= \int_0^\infty (1+x^2)|\varphi(x+ih)|\frac{dx}{1+x^2} \le$$

$$\le \sup_{x\in\mathbb{R}} \left\{(1+x^2)|\varphi(x+ih)|\right\} \cdot \frac{\pi}{2} \le$$

$$\le \sup_{z_h} \left\{\left(1+|x+ih|^2\right)|\varphi(x+ih)|\right\} \cdot \frac{\pi}{2} \le$$

$$\le b_0 \exp\left\{b|h|^{1/(1-\beta)}\right\},$$

$$b_0 = \frac{\pi}{2}(c_0' + c_1'), \quad z_h = x+ih \in \mathbb{C},$$

тобто

$$\Phi_2(h) \le b_0 |h|^{2n+2\nu+1} \exp\left\{b|h|^{1/(1-\beta)}\right\}.$$

Оскільки

$$|h|^{2n+2\nu+1} \le c_{0,n}(2n+[2\nu+1]+1)!\times$$

$$\times \exp\left\{b|h|^{1/(1-\beta)}\right\},$$

$$c_{0,n} = \frac{\tilde{c}_0}{b^{(1-\beta)(2n+2\nu+1)}}, \quad \tilde{c}_0 > 1,$$

то остаточно дістаємо, що

$$\Phi_2(h) \le p_{n,\nu} \exp\left\{b_1|h|^{1/(1-\beta)}\right\},$$

де $b_1 = 2b$, $p_{n,\nu} = b_0 c_{0,n}(2n+[2\nu+1]+1)!$. Аналогічно встановлюємо, що

$$\int_0^\infty |\varphi(x+ih)| x^{2n+2\nu+1} dx \le$$

$$\le b_{n,\nu} \exp\left\{b_1|h|^{1/(1-\beta)}\right\}.$$

Отже,

$$|\mathcal{J}_1(\sigma)| \le d_{n,\nu}|\sigma|^{2k} e^{-\sigma h \cos\omega_0} e^{b_1|h|^{1/(1-\beta)}},$$

де $d_{n,\nu} = 2^{n+\nu+1/2}(b_{n,\nu} + p_{n,\nu})$. Параметр h був вибраний довільно, тому покладемо $h = \varepsilon_0 \operatorname{sgn}\sigma \cdot |\sigma|^{(1-\beta)/\beta}$, $\varepsilon_0 > 0$. Тоді

$$|\mathcal{J}_1(\sigma)| \le d_{n,\nu}|\sigma|^{2k} \exp\left\{-\varepsilon_0|\sigma|^{1/\beta}\cos\omega_0 + \right.$$

$$\left. + b_1|\sigma|^{1/\beta}\varepsilon_0^{1/(1-\beta)}\right\} = d_{n,\nu}|\sigma|^{2k}\times$$

$$\times \exp\left\{-\left(\varepsilon_0\cos\omega_0 - b_1\varepsilon_0^{1/(1-\beta)}\right)|\sigma|^{1/\beta}\right\}.$$

Якщо взяти тепер ε_0 з інтервалу $\left(0, \left(\frac{\cos\omega_0}{b_1}\right)^{(1-\beta)/\beta}\right)$, то $\varepsilon_0 \cos\omega_0 - b_1\varepsilon_0^{1/(1-\beta)} \equiv \alpha_0 > 0$. Аналогічно оцінюємо $\mathcal{J}_2(\sigma)$. Отже, в результаті отримаємо нерівності

$$|\sigma^{2k}\psi^{(2n)}(\sigma)| \le \gamma_n|\sigma|^n \exp\left\{-\tilde{\alpha}|\sigma|^{1/\beta}\right\} \le$$

$$\le \gamma_n\left(\frac{2k\beta}{\tilde{\alpha}}\right)^{2\beta k} e^{-2k} = \gamma_n B^k k^{2\beta k},$$

де γ_n — деяка стала, залежна також ще від параметра ν, $\tilde{\alpha} > 0$, $B = \left(\frac{2\beta}{\tilde{\alpha}}\right)^{2\beta} e^{-2}$. Цим доведено, що $F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}_\beta$, тобто $F_B[\overset{\circ}{S}{}^\beta] \subset \overset{\circ}{S}_\beta$. Звідси випливає також, що оператор F_B обмежений і неперервний.

Кожну функцію $\psi \in \overset{\circ}{S}{}^\beta$ можна подати у вигляді $\psi = F_B^{-1}[F_B[\psi]]$, тобто ψ є оберненим перетворенням Фур'є-Бесселя функції $\varphi = F_B[\psi] \in \overset{\circ}{S}_\beta$. Якщо $F_B[\psi] = 0$, то $\psi = F_B^{-1}[F_B[\psi]] = F_B^{-1}[0] = 0$. Отже, перетворення Фур'є-Бесселя відображає $\overset{\circ}{S}{}^\beta$ на $\overset{\circ}{S}_\beta$ взаємно однозначно. Такі ж властивості має й операція оберненого перетворення Фур'є-Бесселя. Таким чином, $F_B[\overset{\circ}{S}{}^\beta] = \overset{\circ}{S}_\beta$. Теорема доведена.

Зупинимося тепер на властивостях перетворення Фур'є-Бесселя просторів $\overset{\circ}{S}_\alpha$. Передусім зазначимо, що із нерівностей

$$|\varphi^{(2k)}(x)| \le c_k \exp\left\{-a|x|^{1/\alpha}\right\},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R},$$

для функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}_\alpha$ випливають нерівності

$$|B_\nu^k \varphi(x)| \le c_k' \exp\left\{-a_1|x|^{1/\alpha}\right\},$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Справді, нехай функція ψ з простору $\overset{\circ}{S}{}^\alpha$ така, що $F_B[\psi] = \varphi$. Тоді, врахувавши властивості перетворення Фур'є-Бесселя у просторі S (див. [3]), знайдемо, що

$$B_\nu^k F_B[\psi] = F_B[(-x^2)^k\psi(x)], \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Функція $\psi_k(x) = (-x^2)^2\psi(x)$ належить до простору $\overset{\circ}{S}{}^\alpha$ при кожному $k \in \mathbb{Z}_+$. Тоді, внаслідок теореми 1, $F_B[\psi_k] \in \overset{\circ}{S}_\alpha$ при кожному

$k \in \mathbb{Z}_+$, тобто $B_\nu^k F_B[\psi] \equiv B_\nu^k \varphi \in \overset{\circ}{S}_\alpha$. Звідси вже випливають нерівності (5).

Теорема 2. *Правильною є формула* $F_B[\overset{\circ}{S}_\alpha] = \overset{\circ}{S}{}^\alpha$, $\alpha \in (0,1)$*; при цьому оператор* $F_B : \overset{\circ}{S}_\alpha \to \overset{\circ}{S}{}^\alpha$ *є обмеженим і неперервним.*

Доведення. Нехай $\varphi \in \overset{\circ}{S}_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, $\psi := F_B[\varphi]$. Із властивостей перетворення Фур'є-Бесселя в просторі S випливає співвідношення

$$F_B[B_\nu^k \varphi](\sigma) = (-\sigma^2)^k F_B[\varphi] =$$
$$= (-1)^k \sigma^{2k} \psi(\sigma), \quad k \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже,
$$\sigma^{2k}\psi(\sigma) = (-1)^k \times$$
$$\times \int_0^\infty (B_\nu^k \varphi)(x)\, j_\nu(\sigma x)\, x^{2\nu+1}\, dx,\ k \in \mathbb{Z}_+.$$

Функцію $\sigma^{2k}\psi(\sigma)$ при кожному $k \in \mathbb{Z}_+$ можна продовжити на комплексні значення $s = \sigma + i\tau$ за формулою

$$(\sigma + i\tau)^{2k}\psi(\sigma + i\tau) =$$
$$= (-1)^k \int_0^\infty (B_\nu^k \varphi)(x)\, j_\nu((\sigma + i\tau)x) x^{2\nu+1} dx. \tag{6}$$

Справді, з інтегрального зображення Пуассона функції $j_\nu(s)$, $s \in \mathbb{C}$ випливають оцінки

$$|j_\nu((\sigma + i\tau)x)| \le c_\nu e^{|\tau| x} \le$$
$$\le c c_\nu e^{\varepsilon |\tau| x^{1/\alpha}},\ \alpha \in (0,1),\ c > 1,\ x \ge 0, \tag{7}$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Крім того, $B_\nu^k \varphi \in \overset{\circ}{S}_\alpha$, тобто $|B_\nu^k \varphi(x)| \le c_k' \exp\left\{-a|x|^{1/\alpha}\right\}$; $c_k' > 0$, $a > 0$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Оскільки в (7) $\varepsilon > 0$ — довільний параметр, то звідси дістаємо абсолютну збіжність інтеграла $\int_0^\infty (B_\nu^k \varphi)(x) j_\nu((\sigma + i\tau)x) x^{2\nu+1} dx$ і рівність (6) у кожній точці $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}$.

Функція $s^{2k}\psi(s)$, $k \in \mathbb{Z}_+$, диференційовна в кожній точці $s \in \mathbb{C}$. Справді, після формального диференціювання за s інтеграл (6) перейде в інтеграл

$$\int_0^\infty (B_\nu^k \varphi)(x) \frac{\partial}{\partial s} j_\nu(sx) x^{2\nu+2} dx,$$

який внаслідок властивостей функцій $B_\nu^k \varphi(x)$ та $\dfrac{\partial}{\partial s} j_\nu(sx)$ також буде абсолютно збіжним. Звідси дістаємо, що $s^{2k}\psi(s)$ — ціла функція при кожному $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже,

$$|s^{2k}\psi(s)| \le$$
$$\le \int_0^\infty \left|(B_\nu^k \varphi)(x)\right| \cdot |j_\nu((\sigma + i\tau)x)|\, x^{2\nu+1} dx \le$$
$$\le c_\nu\, c_k' \int_0^\infty e^{-a x^{1/\alpha}} \cdot e^{|\tau| x} x^{2\nu+1} dx.$$

Далі скористаємося нерівністю Юнга:

$$\forall\, a, b \ge 0 :\ ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Для довільного $\varepsilon_0 > 0$ маємо, що

$$x|\tau| = (\varepsilon_0 x)\frac{|\tau|}{\varepsilon_0} \le \alpha(\varepsilon_0 x)^{1/\alpha} +$$
$$+ (1-\alpha)\left(\frac{|\tau|}{\varepsilon_0}\right)^{1/(1-\alpha)},\ \ x \ge 0.$$

Тоді
$$|s^{2k}\psi(s)| \le$$
$$\le c_\nu\, c_k' \int_0^\infty \exp\left\{-(a - \alpha\varepsilon_0^{1/\alpha}) x^{1/\alpha}\right\} x^{2\nu+1} dx \times$$
$$\times \exp\left\{\alpha_0 |\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\} \le \tilde{c}_k \exp\left\{\alpha_0 |\tau|^{1/(1-\alpha)}\right\},$$

де
$$\alpha_0 = (1-\alpha)\varepsilon_0^{1/(1-\alpha)},\ \ \varepsilon_0 < \left(\frac{a}{\alpha}\right)^\alpha,$$

$$\tilde{c}_k = c_\nu c_k' \int_0^\infty \exp\left\{-(a - \alpha\varepsilon_0^{1/\alpha}) x^{1/\alpha}\right\} x^{2\nu+1} dx.$$

Звідси дістаємо, що $\psi = F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}$, тобто $F_B[\overset{\circ}{S}_{\alpha}] \subset \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}$. Обгрунтування співвідношення $F_B[\overset{\circ}{S}_{\alpha}] = \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}$ здійснюється аналогічно тому, як це було зроблено при доведенні формули $F_B[\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}] = \overset{\circ}{S}_{\alpha}$ у теоремі 1.

Зауважимо, що оператор Фур'є-Бесселя відображає обмежену множину $A \subset \overset{\circ}{S}_{\alpha}$ в обмежену множину $\tilde{A} \subset \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}$, тому він є неперервним. Теорема доведена.

Із наведених результатів випливає таке твердження.

Теорема 3. *Правильною є формула*

$$F_B[\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}] = \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}, \ \ \{\alpha, \beta\} \subset (0,1), \ \ \alpha + \beta = 1;$$

оператори F_B та F_B^{-1} є неперевними.

Отже, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, то функція $F_B[\varphi]$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і $F_B[\varphi](z) \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}(\mathbb{C})$, $z \in \mathbb{C}$, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, $\alpha + \beta = 1$.

3. Перетворення Фур'є-Бесселя узагальнених функцій з просторів типу $(\overset{\circ}{S})'$. Символом $(\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})'$, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, $\alpha + \beta = 1$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ визначається формулою

$$< f, \varphi >= \int\limits_0^{\infty} f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx.$$

Кожна локально інтегровна парна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists c_{\varepsilon} > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} :$$

$$|f(x)| \le c_{\varepsilon} \exp\left(\varepsilon |x|^{1/\alpha}\right), \qquad (8)$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in (\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})'$:

$$< F_f, \varphi >= \int\limits_0^{\infty} f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx, \ \ \forall \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}.$$

Теорема 4. *Якщо локально інтегровні парні на $\mathbb{R}$ функції f і g, які задовольняють умову (8), не збігаються на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ така, що $< f, \varphi_0 > \neq < g, \varphi_0 >$, тобто $F_f \neq F_g$.*

Навпаки, якщо $F_f \neq F_g$, то функції f і g не збігаються на множині додатної міри Лебега.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми з праці [4].

У просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ визначена операція узагальненого зсуву $\varphi \mapsto T^{\xi}_x\varphi$, $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, де T^{ξ}_x — оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [5]:

$$T^{\xi}_x\varphi(x) =$$

$$= b_{\nu} \int\limits_0^{\pi} \varphi\left(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}\right) \sin^{2\nu}\omega \, d\omega,$$

де $b_{\nu} = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\,\Gamma(\nu+1/2))$, $\nu > -1/2$. У праці [6] встановлено, що операція узагальненого зсуву в просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ не лише неперевна, але й нескінченно диференційовна. У зв'язку з цим згортку узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) =< f_{\xi}, T^{\xi}_x\varphi(x) >=< f_{\xi}, T^{x}_{\xi}\varphi(\xi) >$$

(тут f_{ξ} позначає дію функціонала f по змінній ξ); при цьому $f * \varphi$ є нескінченно диференційовною на $\mathbb{R}$ функцією. Якщо $f * \varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$ для довільної основної функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$, то функціонал $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha})'$ називається *згортувачем* у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\beta}_{\alpha}$.

Оскільки $F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$, якщо $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{\beta}$, $\{\alpha, \beta\} \subset (0,1)$, $\alpha + \beta = 1$, то перетворення Фур'є-Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha})'$ визначимо за допомою співвідношення

$$< F_B[f], \varphi >=< f, F_B[\varphi] >, \tag{9}$$

$$\forall\, \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{1-\alpha}^{\alpha},\ \alpha \in (0,1).$$

Із (9), властивостей лінійності й неперервності функціонала f та перетворення Фур'є-Бесселя основних функцій випливає лінійність та неперервність функціонала $F_B[f]$ над простором основних функцій $\overset{\circ}{S}{}_{1-\alpha}^{\alpha}$. Отже, перетворення Фур'є-Бесселя узагальненої функції f, заданої на $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$, є узагальненою функцією на просторі $\overset{\circ}{S}{}_{1-\alpha}^{\alpha}$.

Теорема 5. *Нехай $\alpha \in (0,1)$. Якщо узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha})'$ — згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$ правильною є формула*

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми, $f * \varphi \in \overset{\circ}{S}{}_{\alpha}^{1-\alpha}$. Тоді, скориставшись означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо такі співвідношення:

$$\forall\, \psi \in \overset{\circ}{S}{}_{1-\alpha}^{\alpha}: \quad < F_B[f * \varphi], \psi >=$$

$$=< f * \varphi, F_B[\psi] >=$$

$$= \int_0^\infty (f * \varphi)(x)\, F_B[\psi](x)\, x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^\infty < f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) > F_B[\psi](x)\, x^{2\nu+1} dx =$$

$$=< f_\xi, \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x)\, x^{2\nu+1} dx > \tag{10}$$

(зазначимо, що остання рівність записана, поки що, формально).

Нехай

$$\mathcal{J}(\xi) := \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) \cdot x^{2\nu+1} dx.$$

Тоді

$$\mathcal{J}(\xi) = \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \times$$

$$\times \Big(\int_0^\infty \psi(\sigma)\, j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \Big) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x)\, \psi(\sigma) T_x^\xi\, j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} x^{2\nu+1} d\sigma dx =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} \times$$

$$\times \Big(\int_0^\infty \varphi(x)\, j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \Big) d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi](\xi)$$

(тут ми скористались теоремою Фубіні, врахувавши, що збіжним є інтеграл

$$\int_0^\infty \Big(\int_0^\infty |\psi(\sigma)\, \varphi(x)\, j_\nu(\sigma\xi)| \times$$

$$\times j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1}\, x^{2\nu+1} d\sigma \Big) dx).$$

Отже,

$$< F_B[f * \varphi], \psi >=< f, F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi] >=$$

$$=< F_B[f], F_B[\varphi] \cdot \psi >=< F_B[f] \cdot F_B[\varphi], \psi >,$$

$$\forall \psi \in \overset{\circ}{S}{}_{1-\alpha}^{\alpha}.$$

Звідси дістаємо рівність $F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi]$.

Залишається обґрунтувати коректність співвідношень (10). Введемо позначення:

$$\mathcal{J}_r(\xi) := \int_0^r T_x^{\xi}\varphi(x) F_B[\psi](x)\cdot x^{2\nu+1}dx =$$

$$= \int_0^r \psi(\sigma)F_B[\varphi](\sigma)j_\nu(\sigma\xi)\cdot \sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Для доведення (10) досить показати, що $\mathcal{J}_r \to \mathcal{J}$ при $r\to+\infty$ у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, тобто $\gamma_r := \mathcal{J} - \mathcal{J}_r \to 0$, $r\to+\infty$, за топологією простору $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}(\mathbb{C})$.

Із інтегральної формули Пуассона

$$j_\nu(z) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\nu+1/2)}\times$$

$$\times \int_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\,\sin^{2\nu} t dt,\ \ z\in\mathbb{C},\ \ \nu>-1/2,$$

для нормованої функції Бесселя j_ν випливає оцінка

$$|j_\nu(z)| \le c_\nu e^{|\omega|}, \quad \forall z = \xi + i\omega\in\mathbb{C},$$

$$c_\nu = \frac{\sqrt{\pi}\ \Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)}, \quad \nu > -1/2.$$

Тоді

$$|\gamma_r(z)| \le$$

$$\le \int_r^{+\infty} |\psi(\sigma)|\cdot|F_B[\varphi](\sigma)|\cdot|j_\nu(\sigma z)|\sigma^{2\nu+1}d\sigma \le$$

$$\le c_\nu \int_r^{\infty} |\psi(\sigma)|\cdot|F_B[\varphi](\sigma)|e^{\sigma|\omega|}\sigma^{2\nu+1}d\sigma,$$

$$z = \xi + i\omega \in\mathbb{C}.$$

Якщо $z\in\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ — обмежена область, то $|\omega|\le c_0$. Тоді $\forall\, z\in\mathbb{K}$

$$|\gamma_r(z)| \le c_\nu \int_r^{\infty} |\psi(\sigma)|\cdot|F_B[\varphi](\sigma)|e^{c_0\sigma}\sigma^{2\nu+1}d\sigma.$$

Оскільки функція $\psi\cdot F_B[\varphi](\sigma)\in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$, то інтеграл

$$\int_0^{\infty} |\psi(\sigma)|\cdot|F_B[\varphi](\sigma)|e^{c_0\sigma}\sigma^{2\nu+1}d\sigma$$

збіжний (нагадаємо, що $0<\alpha<1$). Отже,

$$\int_r^{+\infty} |\psi(\sigma)|\cdot|F_B[\varphi](\sigma)|e^{c_0\sigma}\sigma^{2\nu+1}d\sigma \to 0$$

при $r\to+\infty$ (як залишок збіжного інтеграла). Цим доведено, що $\gamma_r(z)$ збігається до нуля при $r\to+\infty$ рівномірно за z у кожній обмеженій області $\mathbb{K}\subset\mathbb{C}$.

Доведемо тепер, що правильною є нерівність

$$|\gamma_r(z)| \le c\exp\left\{-a|\xi|^{1/\alpha} + b|\omega|^{1/\alpha}\right\}, \qquad (11)$$

де сталі $a,b,c>0$ не залежать від r.

Оскільки $\gamma_r(\xi) = \mathcal{J}(\xi) - \mathcal{J}_r(\xi)$, то $|\gamma_r(\xi)| \le |\mathcal{J}(\xi)| + |\mathcal{J}_r(\xi)|$. Розглянемо функції $\mathcal{J}_{r,+}(\xi) = \max\limits_{\xi\in\mathbb{R}}(\mathcal{J}_r(\xi),0)$, $\mathcal{J}_{r,-}(\xi) = -\min\limits_{\xi\in\mathbb{R}}(\mathcal{J}_r(\xi),0)$, які є невід'ємними, і врахуємо те, що $|\mathcal{J}_r(\xi)| = \mathcal{J}_{r,+}(\xi) + \mathcal{J}_{r,-}(\xi) \le 2|\mathcal{J}(\xi)|$. Отже, $|\gamma_r| \le 3|\mathcal{J}| = 3|F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi]|$, $\forall\, r>0$. Звідси вже випливає нерівність (11), оскільки $F_B[F_B[\varphi]\cdot\psi]\in\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, якщо $\psi\in\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$. Теорема доведена.

Зауваження 1. *Із формули $F_B[f*\varphi] = F_B[f]\cdot F_B[\varphi]$ випливає, що якщо узагальнена функція f є згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, то її перетворення Фур'є-Бесселя — мультиплікатор у просторі $F_B[\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}] = \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$.*

Теорема 5. *Якщо узагальнена функція f є мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, то її перетворення Фур'є-Бесселя — згортувач у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$.*

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що $F_B[f]*\varphi =< F_B[f], T_x^{\xi}\varphi(x) >= <$

$f, F_B[T_x^{\xi}\varphi(x)] \quad >, \; \forall \varphi \;\in\; \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$. Оскільки $F_B[T_x^{\xi}\varphi(x)] = j_{\nu}(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma)$, то

$$F_B[f] * \varphi =< f, j_{\nu}(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma) >= \int\limits_0^{+\infty} f(\sigma)\times$$

$$\times j_{\nu}(\sigma\xi)F_B[\varphi](\sigma)\,\sigma^{2\nu+1}d\sigma = F_B[f \cdot F_B[\varphi]].$$

Звідси випливає, що $F_B[f \cdot F_B[\varphi]] \in \overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$, бо $f \cdot F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ (тут враховано те, що $F_B[\varphi] \in \overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, а f — мультиплікатор у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$). Теорема доведена.

Зауваження 2. *Результати, наведені в теоремах 4, 5, можна формулювати так: для того, щоб узагальнена функція $f \in (\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha})'$ була згортувачем у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{1-\alpha}_{\alpha}$, необхідно й досить, щоб її перетворення Фур'є-Бесселя було мультиплікатором у просторі $\overset{\circ}{S}{}^{\alpha}_{1-\alpha}$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1953.— 307 с.

2. *Горбачук В.И., Горбачук М.Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.— К.: Наук. думка, 1984.— 284 с.

3. *Житомирский В.В.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб.— 1955.— Т. 36, N 2.— С. 299–310.

4. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши // Успехи мат. наук.— 1953.— Т. 8, вып. 6.— С. 3–54.

5. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук.— 1951.— Т. 6, вып. 2.— С. 102–143.

6. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу.— Чернівці: Рута, 1998.—255 с.

Стаття надійшла до редколегії 23.10.2002