УДК 514.76

©2003 р. **Р.Ф. Домбровський, Д.М. Кац***

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці
*Ізраїль

ТИПИ ІЗОТРОПНИХ НЕПЕРЕРВНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ВЕКТОРНИХ ПОЛІВ ПСЕВДОЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

У точковому дійсному чотиривимірному псевдоевклідовому просторі $\mathcal{E}_{4,3}$ індексу 3 досліджується неперервно диференційовне ізотропне векторне поле. Знайдена тензорна характеристика всіх шести типів ізотропних векторних полів.

The continuous differentiable isotropic vector field is investigated in dot real four-dimensioned pseudoeuclidean space $\mathcal{E}_{4,3}$ of index 3. The tensor characteristic of all six type of isotropic vector fields is obtained.

1. Якщо $x \in \mathcal{E}_{4,3}$ і (x^I) — локальні координати точки x у карті (u, φ), то $\varphi(x) = (x^1, x^2, x^3, x^4)$, $I, K, L, ... = \overline{1,4}$. Лінійні лінійно незалежні диференціальні форми $\omega^I := x^I_K dx^K$, $\det x^I_K \neq 0$ є головними формами над $u \subset \mathcal{E}_{4,3}$ і тому

$$d\omega^I = \omega^L \wedge \tilde{\omega}^I_L, d\tilde{\omega}^I_L = \tilde{\omega}^K_L \wedge \tilde{\omega}^I_K. \qquad (1)$$

Диференціальні форми $\tilde{\tilde{\omega}}^I_L = \tilde{\omega}^I_L|_{\omega^K=0}$ є інваріантними формами групи автоморфізмів лінеалу V_4 простору $\mathcal{E}_{4,3}$ [1].

Нехай $\{\underset{xI}{\vec{e}}\}$ — деякий афінний базис лінеалу V_4 і $g : V_4 \times V_4 \to \mathbb{R}$ — метрична форма така, що $g_{IK}(x) = (\underset{xI}{\vec{e}}, \underset{xK}{\vec{e}})$. Умови

$$dg_{IK} - g_{LK}\tilde{\omega}^L_I - g_{IL}\tilde{\omega}^L_K = g_{IKL}\omega^L \qquad (2)$$

є умовами інваріантності метричної форми g у $\mathcal{E}_{4,3}$ (див. теорему 1 у праці [2]). Здійснимо перетворення форм

$$\tilde{\omega}^L_I = \omega^L_I - \Gamma^L_{IK}\omega^K,$$

де $\Gamma^L_{IK} = \dfrac{1}{2}g^{LP}(g_{PIK} + g_{PKI} - g_{IKP})$ — символи Рімана другого роду. Тоді форми $\{\omega^L_I\}$ стають інваріантними формами метричної зв'язності ∇ простору $\mathcal{E}_{4,3}$. Система (2) в термінах форм метричної зв'язності ∇ набуває вигляду

$$dg_{IK} - g_{LK}\omega^L_I - g_{IL}\omega^L_K = 0. \qquad (3)$$

Система диференціальних рівнянь (3) виражає факт коваріантної сталості метричного тензора $g = \{g_{IK}\}$ у просторі $\mathcal{E}_{4,3}$ відносно метричної зв'язності ∇ [4,5].

Афінний базис $\{\underset{xI}{\vec{e}}\}$ лінеалу $V_4, x \in \mathcal{E}_{4,3}$, назвемо стандартним базисом, якщо відносно нього матриця метричного тензора має діагональний вигляд

$$(g_{IK}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\delta_{ij} \end{pmatrix}, \quad i, j, l, ... = 2, 3, 4.$$

Відносно стандартного базису система (3) вказує на залежності між інваріантними формами метричної зв'язності ∇:

$$\omega^1_1 = \omega^2_2 = \omega^3_3 = \omega^4_4 = 0,$$
$$\omega^1_2 = \omega^2_1, \omega^1_3 = -\omega^3_1,$$
$$\omega^2_3 = -\omega^3_2, \omega^1_4 = -\omega^4_1,$$
$$\omega^2_4 = -\omega^4_2, \omega^3_4 = -\omega^4_3. \qquad (4)$$

Теорема 1. *Група автоморфізмів лінеалу псевдоевклідового простору $\mathcal{E}_{4,3}$ редукується до підгрупи G, яка є шестичленною групою Лі з інваріантними формами $\{\bar{\omega}^2_1, \bar{\omega}^3_1, \bar{\omega}^4_1, \bar{\omega}^3_2, \bar{\omega}^4_2, \bar{\omega}^4_3\}$.*

Доведення. У кожній фіксованій точці $x \in \mathcal{E}_{4,3}$ форми $\bar{\omega}^2_1, \bar{\omega}^3_1, \bar{\omega}^4_1, \bar{\omega}^3_2, \bar{\omega}^4_2$ і $\bar{\omega}^4_3$ лінійно незалежні та утворюють цілком інтегровну систему форм, оскільки вони задовольняють систему зовнішніх диференціальних рівнянь типу (1):

$$d\bar\omega_1^4 = \bar\omega_1^2 \wedge \bar\omega_2^4 + \bar\omega_1^3 \wedge \bar\omega_3^4,$$
$$d\bar\omega_1^2 = -\bar\omega_1^3 \wedge \bar\omega_2^3 - \bar\omega_1^4 \wedge \bar\omega_2^4,$$
$$d\bar\omega_1^3 = \bar\omega_1^2 \wedge \bar\omega_2^3 - \bar\omega_1^4 \wedge \bar\omega_3^4,$$
$$d\bar\omega_2^3 = \bar\omega_1^2 \wedge \bar\omega_1^3 - \bar\omega_2^4 \wedge \bar\omega_3^4,$$
$$d\bar\omega_2^4 = \bar\omega_1^2 \wedge \bar\omega_1^4 + \bar\omega_2^3 \wedge \bar\omega_3^4,$$
$$d\bar\omega_3^4 = -\bar\omega_1^3 \wedge \bar\omega_1^4 - \bar\omega_2^3 \wedge \bar\omega_2^4.$$

При виведенні цих структурних рівнянь використано залежності (4).

Оскільки на $\mathcal{E}_{4,3}$ метричний тензор $g = \{g_{IK}\}$ невироджений, то на $\mathcal{E}_{4,3}$ існує йому обернений тензор $\tilde g \in T_{(2,0)}$ з компонентами $\{g^{IK}\}$ такий, що $g^{IK}g_{KL} = \delta^I_L$. Очевидно, що тензор $\tilde g$ коваріантно сталий у метричній зв'язності ∇:

$$dg^{IK} + g^{LK}\omega^I_L + g^{IL}\omega^K_L = 0.$$

Відносно стандартного базису матриці компонент метричного тензора g і тензора $\tilde g$ збігаються.

2. Векторне поле $\underset{x}{\vec\Lambda} = \Lambda^I \underset{xI}{\vec e}$ буде інваріантним, якщо функції Λ^I задовольняють рівняння [3]

$$d\Lambda^I + \Lambda^K\omega^I_K = \Lambda^I_K\omega^K. \qquad (5)$$

Функції $\{\Lambda^I_K\}$ називаються додатковими функціями для векторного поля $\underset{x}{\vec\Lambda}$ [1]. Послідовно замикаючи систему (5) та наступні системи диференціальних рівнянь і застосовуючи лему Е.Картана, отримуємо

$$d\Lambda^I_K - \Lambda^I_L\omega^L_K + \Lambda^L_K\omega^I_L = \Lambda^I_{KL}\omega^L,$$

$\Lambda^I_{KL} = \Lambda^I_{LK}$ — коефіцієнти Картана,

$$d\Lambda^I_{KL} - \Lambda^I_{PL}\omega^P_K - \Lambda_{KP}\omega^P_L + \Lambda^P_{KL}\omega^I_P = \Lambda^I_{KLP}\omega^P,$$

Λ^I_{KLP} — симетричні за довільною парою нижніх індексів,

$$d\Lambda^I_{K_1\ldots K_s} - \Lambda^I_{PK_2\ldots K_s}\omega^P_{K_1} - \ldots - \Lambda^I_{K_1\ldots K_{s-1}P}\omega^P_{K_s} + $$
$$+\Lambda^P_{K_1\ldots K_s}\omega^I_P = \Lambda^I_{K_1\ldots K_sP}\omega^P, \qquad (6)$$

$\Lambda^I_{K_1\ldots K_sP}$ — симетричні за будь-якою парою нижніх індексів.

Теорема 2. *Функції* $\{\Lambda^I_{K_1\ldots K_s}\}$ *утворюють лінійні однорідні геометричні об'єкти (тензори) для кожного натурального s.*

Висновок теореми 2 випливає з аналізу систем (5) і (6). Послідовність тензорів $\{\Lambda^I\}$, $\{\Lambda^I_K\}$, $\{\Lambda^I_{K_1K_2}\}$, ..., $\{\Lambda^I_{K_1\ldots K_s}\}$, ... така, що всі вони приєднані до однієї й тієї ж групи $G \subset \mathrm{Aut}\,V_4$. При вивченні геометрії векторного поля конструюють послідовність фундаментальних об'єктів (за термінологією Г.Ф. Лаптєва) векторного поля: $\{\Lambda^I\} \subset \{\Lambda^I, \Lambda^I_K\} \subset \{\Lambda^I, \Lambda^I_K, \Lambda^I_{K_1K_2}\} \subset \ldots \subset \{\Lambda^I, \Lambda^I_{K_1}, \Lambda^I_{K_1K_2}, \ldots, \Lambda^I_{K_1\ldots K_s}\} \subset \ldots$. Якщо вміщуючий многовид не елементарний, то для компонент векторного поля теорема 2 не правильна. Якщо векторне поле $\{\underset{x}{\vec\Lambda}\}$ неперервно диференційовне, то функції $\Lambda^I(x^1, x^2, x^3, x^4)$ неперервно диференційовні. Фундаментальний об'єкт $\{\Lambda^I, \Lambda^I_K\}$ визначає векторне поле $\{\underset{x}{\vec\Lambda}\}$ на його диференціальному околі другого порядку. Отже, додаткові функції визначені й неперервні для двічі неперервно диференційовного векторного поля.

Скалярний квадрат $(\underset{x}{\vec\Lambda}, \underset{x}{\vec\Lambda}) = \Lambda^I\Lambda^K(\underset{xI}{\vec e}, \underset{xK}{\vec e}) = \Lambda^I\Lambda^K g_{IK}(x)$ є тензором типу $(0,0)$ і називається квадратом норми вектора $\underset{x}{\vec\Lambda}$. Вектор $\underset{x}{\vec\Lambda} \neq \vec 0$ називається ізотропним, якщо його квадрат норми дорівнює нулеві. Векторне поле $\underset{x}{\vec\Lambda} = \Lambda^I \underset{xI}{\vec e}$ на $\mathcal{E}_{4,3}$ буде ізотропним, якщо в кожній точці x простору $\mathcal{E}_{4,3}$ тензор $\Lambda^I\Lambda^K g_{IK} = 0$ [4].

Ознака ізотропності векторного поля $\underset{x}{\vec\Lambda}$, $x \in \mathcal{E}_{4,3}$ відносно стандартного базису в лінеалі V_4 набуває вигляду [3]

$$(\Lambda^1)^2 = (\Lambda^2)^2 + (\Lambda^3)^2 + (\Lambda^4)^2. \qquad (7)$$

Одним із розв'язків рівняння (7) є такі значення компонент векторного поля $\underset{x}{\vec\Lambda}$:

$$\Lambda^1 = 1, \Lambda^2 = 1, \Lambda^3 = \Lambda^4 = 0. \qquad (8)$$

Тоді $\underset{x}{\vec\Lambda} = \underset{x1}{\vec e} + \underset{x2}{\vec e}$, де $\underset{xI}{\vec e}$ — вектори стандартного базису.

Аналітичний крок канонізації стандартного базису за формулами (8) зводить систему (5) до вигляду

$$\omega_1^2 = \Lambda_K^1 \omega^K, \omega_1^3 = \Lambda_K^3 \omega^K - \omega_2^3,$$

$$\omega_1^4 = \Lambda_K^4 \omega^K - \omega_2^4, \Lambda_K^2 = \Lambda_K^1. \qquad (9)$$

При цьому система диференціальних рівнянь для додаткових функцій ізотропного векторного поля $\underset{x}{\vec{\Lambda}}$, $x \in \mathcal{E}_{4,3}$ така:

$$d\Lambda_K^1 - \Lambda_L^1 \omega_K^L + \Lambda_K^3 \omega_2^3 + \Lambda_K^4 \omega_2^4 =$$

$$= (\Lambda_{KL}^1 - \Lambda_K^1 \Lambda_L^1 + \Lambda_K^3 \Lambda_L^3 + \Lambda_K^4 \Lambda_L^4)\omega^L,$$

$$d\Lambda_K^2 - \Lambda_L^2 \omega_K^L - \Lambda_K^3 \omega_2^3 - \Lambda_K^4 \omega_2^4 = (\Lambda_{KL}^2 - \Lambda_K^1 \Lambda_L^1)\omega^L,$$

$$d\Lambda_K^3 - \Lambda_L^3 \omega_K^L - \Lambda_K^4 \omega_3^4 = (\Lambda_{KL}^3 - \Lambda_K^1 \Lambda_L^3)\omega^L,$$

$$d\Lambda_K^4 - \Lambda_L^4 \omega_K^L + \Lambda_K^3 \omega_3^4 = (\Lambda_{KL}^4 - \Lambda_K^1 \Lambda_L^4)\omega^L. \qquad (10)$$

Якщо додати перші два рівняння системи (10), враховуючи (9), то отримуємо

$$d\Lambda_K^1 - \Lambda_L^1 \omega_K^L = \frac{1}{2}(\Lambda_{KL}^1 + \Lambda_{KL}^2 -$$

$$-2\Lambda_K^1 \Lambda_L^1 + \Lambda_K^3 \Lambda_L^3 + \Lambda_K^4 \Lambda_L^4)\omega^L,$$

$$\Lambda_K^3 \omega_2^3 + \Lambda_K^4 \omega_2^4 = \frac{1}{2}(\Lambda_{KL}^1 - \Lambda_{KL}^2 +$$

$$+\Lambda_K^3 \Lambda_L^3 + \Lambda_K^4 \Lambda_L^4)\omega^L, \qquad (11)$$

Теорема 3. *Для ізотропного двічі неперервно диференційовного векторного поля $\underset{x_1}{\vec{e}} + \underset{x_2}{\vec{e}}$, віднесеного до стандартного базису псевдоевклідового простору $\mathcal{E}_{4,3}$, додаткові функції $\{\Lambda_K^1\}$ та $\{\Lambda_K^3, \Lambda_K^4\}$ утворюють геометричні об'єкти.*

Висновки теореми 3 випливають із співвідношень (10) і (11).

Позначимо геометричні об'єкти, про які йдеться в теоремі 3, через $\Gamma_1 = \{\Lambda_K^1\}$ і $\Gamma_2 = \{\Lambda_K^3, \Lambda_K^4\}$.

Теорема 4. *Ізотропне векторне поле з нульовими тензорами Γ_1 і Γ_2 плоске.*

Доведення. Справді, оскільки $d\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \Lambda_K^1 \underset{x}{\vec{\Lambda}} \omega^K + \Lambda_K^3 \underset{x_3}{\vec{e}} + \Lambda_K^4 \underset{x_4}{\vec{e}}$, то при нульових Γ_1 і Γ_2 маємо $d\underset{x}{\vec{\Lambda}} = \vec{0}$. Ізотропне векторне поле $\underset{x}{\vec{\Lambda}}$, $x \in \mathcal{E}_{4,3}$ не залежить від x. Для плоского ізотропного векторного поля компоненти $\Lambda_{K_1 \ldots K_s}^I$ дорівнюють нулеві при всіх натуральних значеннях s. Очевидно, що плоске ізотропне векторне поле у $\mathcal{E}_{4,3}$ є коваріантно сталим у метричній зв'язності ∇.

Спираючись на теорему 3 і на те, що при перетвореннях групи G ранги тензорів Γ_1 і Γ_2, приєднаних до цієї групи, інваріантні, вводимо поняття типу ізотропного векторного поля $\underset{x}{\vec{\Lambda}}$. Двічі неперервно диференційовне ізотропне векторне поле $\underset{x}{\vec{\Lambda}}$ у просторі $\mathcal{E}_{4,3}$ має тип $(\varepsilon; \mu)$ (позначатимемо його $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(\varepsilon; \mu)$), якщо ранг тензора Γ_1 дорівнює ε, а ранг тензора Γ_2 дорівнює μ. У $\mathcal{E}_{4,3}$ $\varepsilon \in \{0; 1\}$ і $\mu \in \{0; 1; 2\}$. Тому в просторі $\mathcal{E}_{4,3}$ існують ізотропні векторні поля шести типів: $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;0)$, $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$, $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;2)$, $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(1;0)$, $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(1;1)$ і $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(1;2)$. За висновком теореми 4, ізотропне векторне поле $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;0)$ — плоске. Очевидно, що запропонована типізація ізотропних векторних полів коректна й локальна. Існують ізотропні векторні поля в $\mathcal{E}_{4,3}$, які міняють тип при переході від точки до точки. Їх називатимемо загальними ізотропними векторними полями.

Якщо ж тип векторного поля не міняється при переході від точки до точки, то такі векторні поля називають О-деформованими (за аналогією означення О-деформованого скалярного поля в деякій області його визначення, див. [6,7]). Кожне неперервне загальне ізотропне векторне поле локально О-деформоване. Розглянемо локально О-деформовані ізотропні векторні поля окремих типів.

3. Для ізотропного векторного поля $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$, $x \in \mathcal{E}_{4,3}$ аналітична канонізація стандартного базису

$$\Lambda_K^1 = 0, \Lambda_1^3 = 1, \Lambda_i^3 = 0,$$

$$\Lambda_K^4 = 0, i = 2,3,4; K = \overline{1,4} \qquad (12)$$

зводить систему його диференціальних рівнянь до вигляду

$$\omega_1^2=0,\omega_1^3=-\Lambda_{1L}^1\omega^L,\omega_1^4=\Lambda_{4L}^3\omega^L,$$

$$\omega_2^4=-\Lambda_{4L}^3\omega^L,\omega_3^4=\Lambda_{1L}^4\omega^L,$$

$$\omega_2^3=-\Lambda_{1L}^2\omega^L,\Lambda_{iL}^1=0,\Lambda_{iL}^2=0,\Lambda_{2L}^3=0,$$

$$\Lambda_{iL}^4=0,\Lambda_{3i}^3=0,\Lambda_{31}^3=\Lambda_{11}^1=-1-\Lambda_{11}^2,$$

$$\Lambda_{1L}^3=0. \tag{13}$$

Оскільки Λ_{KL}^I коефіцієнти Картана, то система співвідношень (13) набуває вигляду

$$\omega_1^2=0,\omega_1^3=0,\omega_1^4=\Lambda_{44}^3\omega^4,$$

$$\omega_2^4=-\Lambda_{44}^3\omega^4,\omega_2^3=\omega^1,\omega_3^4=\Lambda_{11}^4\omega^1,$$

$$\Lambda_{11}^1=0,\Lambda_{11}^2=-1,\Lambda_{iL}^1=0,$$

$$\Lambda_{iL}^2=0,\Lambda_{1L}^3=0,\Lambda_{2L}^3=0,$$

$$\Lambda_{3i}^3=0,\Lambda_{iL}^4=0. \tag{14}$$

Теорема 5. *За умов (8) і (12) стандартний базис ізотропного векторного поля* $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$, $x\in\mathcal{E}_{4,3}$ *є натуральним. Якщо ізотропне векторне поле* $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$ *тричі неперервно диференційовне, то функції* Λ_{44}^3 *і* Λ_{11}^4 *є його абсолютними інваріантами.*

Доведення. Оскільки система (14) є системою диференціальних рівнянь ізотропного векторного поля $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$, віднесеного до стандартного базису $\{\underset{xI}{\vec{e}}\}$, $x\in\mathcal{E}_{4,3}$, то

$$d\underset{x1}{\vec{e}}=\Lambda_{44}^3\omega^4\underset{x4}{\vec{e}},d\underset{x2}{\vec{e}}=\omega^1\underset{x3}{\vec{e}}-\Lambda_{44}^3\omega^4\underset{x4}{\vec{e}},$$

$$d\underset{x3}{\vec{e}}=(\Lambda_{11}^4\underset{x4}{\vec{e}}-\underset{x2}{\vec{e}})\omega^1,$$

$$d\underset{x4}{\vec{e}}=\Lambda_{44}^3\omega^4(\underset{x2}{\vec{e}}-\underset{x1}{\vec{e}})-\Lambda_{11}^4\omega^1\underset{x3}{\vec{e}}.$$

Отже, $d\underset{x}{\vec{\Lambda}}=\omega^1\underset{x3}{\vec{e}}$, і якщо точка $x\in\mathcal{E}_{4,3}$ фіксована, то $d\underset{x}{\vec{\Lambda}}=d\underset{xI}{\vec{e}}=\vec{0}$. Стандартний базис стає натуральним. Якщо векторне поле $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$ тричі неперервно диференційовне, то неперервними в $\mathcal{E}_{4,3}$ будуть картанівські коефіцієнти Λ_{KL}^I. Система (6) при $s=2$ набуває вигляду

$$d\Lambda_{44}^3=\Lambda_{44L}^3\omega^L,$$

$$d\Lambda_{11}^4=\Lambda_{111}^4\omega^1+\Lambda_{112}^4\omega^2+\Lambda_{113}^4\omega^3+(\Lambda_{111}^4-\Lambda_{44}^3)\omega^4,$$

$$\Lambda_{341}^3=\Lambda_{114}^2=\Lambda_{114}^1=-\Lambda_{414}^4=-\Lambda_{11}^4\Lambda_{44}^3,$$

$$\Lambda_{144}^2=-\Lambda_{44}^3,\Lambda_{111}^3+(\Lambda_{11}^4)^2=-1,$$

$$\Lambda_{144}^3=-(\Lambda_{44}^3)^2=-\Lambda_{244}^3,$$

усі інші компоненти геометричного об'єкта Λ_{KLP}^I нульові. Отже, функції $\{\Lambda_{44}^3\}$ і $\{\Lambda_{11}^4\}$ є абсолютними інваріантами ізотропного векторного поля $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$.

Наслідок. Фундаментальний об'єкт третього порядку ізотропного векторного поля $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$, $x\in\mathcal{E}_{4,3}$ є основним [1,8].

Отже, локальна диференціальна геометрія ізотропного векторного поля $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$ на диференціальних околах третього й вищих порядків визначається з точністю до лоренцових ізометрій у $\mathcal{E}_{4,3}$ лише функціями Λ_{44}^3 і Λ_{11}^4 та їх похідними. Подальша розбудова геометрії, наприклад ізотропного векторного поля $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;1)$, може проводитися розглядом окремих спеціальних класів таких полів: $\Lambda_{44}^3=C_1$, $\Lambda_{11}^4=C_2$, де C_1 і C_2 — сталі на $\mathcal{E}_{4,3}$ і т.п.

За схемами дослідження занурених многовидів, розроблених в інваріантній формі Е. Картаном, С.П. Фініковим, Г.Ф. Лаптєвим, Н.М. Остіану, Ж. Фаваром [1,7,8], можна побудувати геометрію інших типів ізотропних векторних полів.

Аналітичні кроки канонізації стандартного базису лінеалу $\mathcal{E}_{4,3}$ для ізотропних векторних полів $\underset{x}{\vec{\Lambda}}$ інших різних типів у термінах додаткових функцій можна подати такою таблицею:

$$\underset{x}{\vec{\Lambda}}(1;0): \quad \Lambda_1^1=1,\Lambda_i^1=0,\Lambda_K^3=\Lambda_K^4=0;$$

$$\underset{x}{\vec{\Lambda}}(0;2): \quad \Lambda_1^3=\Lambda_2^4=1,\Lambda_K^1=0,\Lambda_i^3=0,$$
$$\Lambda_1^4=\Lambda_3^4=\Lambda_4^4=0;$$

$$\underset{x}{\vec{\Lambda}}(1;1): \quad \Lambda_1^1=1,\Lambda_i^1=0,\Lambda_1^3=1,$$
$$\Lambda_i^3=0,\Lambda_K^4=0;$$

$$\underset{x}{\vec{\Lambda}}(1;2): \quad \Lambda_1^1=1,\Lambda_i^1=0,\Lambda_1^3=1,\Lambda_i^3=0,$$
$$\Lambda_1^4=0,\Lambda_2^4=1,\Lambda_3^4=\Lambda_4^4=0.$$

Оскільки тип ізотропного векторного поля визначається сталими значеннями компонент фундаментальних геометричних об'єктів і відносно стандартного базису в $\mathcal{E}_{4,3}$ компоненти метричного тензора теж сталі, то кожне ізотропне векторне поле $\underset{x}{\vec{\Lambda}}(\varepsilon;\mu)$ потенціальне ($\operatorname{rot}\underset{x}{\vec{\Lambda}}(\varepsilon;\mu) = 0$) й соленоїдальне ($\operatorname{div}\underset{x}{\vec{\Lambda}}(\varepsilon;\mu) = 0$), а тому його компоненти зображаються у вигляді $\Lambda^I \equiv \dfrac{\partial\varphi}{\partial x^K} g^{KI}$, де $\varphi = \varphi(x^1, x^2, x^3, x^4)$ — гармонійна функція, визначена на $\mathcal{E}_{4,3}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Остиану Н.М., Рыжков В.В., Швейкин П.И.* Очерк научных исследований Германа Федоровича Лаптева // Труды Геометр. семинара: Сб. науч. тр.— М.: ВИНИТИ АН СССР.— **4**.— 1973.— С.7—70.

2. *Домбровський Р.Ф., Кац Д.М.* Деякі питання геометрії ліній чотиривимірного псевдоевклідового простору індексу 3 з інваріантним ізотропним векторним полем // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 1996.— Вип.13.— С.45—51.

3. *Домбровський Р.Ф., Кац Д.М.* До геометрії ізотропного векторного поля псевдоевклідового простору // Матеріали наук. конф. викладачів, співроб. та студентів, присвяченої 120-річчю заснування Чернівецького ун-ту.— Чернівці: Рута, 1995.— Т.2.— С.86.

4. *Домбровський Роман, Кац Давид.* Ознака геодезійності ізотропної лінії в псевдоевклідовому просторі з інваріантним ізотропним векторним полем // Тези доп. V Міжнародн. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука.— К.: КТУ, 1996.— С.129.

5. *Домбровский Р.Ф., Мироник В.И., Осадца И.С.* Фундаментальные объекты и кривизна локально однородных времениподобных линий нейтрального пространства // Материалы Международн. школы-семинара по геометрии и анализу, посвященной 90-летию Н.В.Ефимова.— Абрау-Дюрсо: МГУ им. М.В.Ломоносова и Ростовский ун-т, 2000.— С.33—34.

6. *Домбровський Р.Ф., Юрочко О.М.* Диференціальна геометрія однорідних ліній n-вимірного простору Мінковського // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 2000.— Вип.5.— С.108—125.

7. *Домбровський Р.Ф.* Метод Г.Ф.Лаптєва у побудові теорії кривини локально однорідних ліній нейтрального простору // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип.111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.34—40.

8. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии.— М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.— 559 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2002