

## ДВОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ НАД ПОЛЕМ $p$ – АДІЧНИХ ЧИСЕЛ

Над полем  $p$ -адичних чисел побудовано та вивчено властивості розв'язку двоточкової крайової задачі для параболічного рівняння.

We construct a solution of a two-point boundary value problem for a parabolic equation over the field of  $p$ -adic numbers and study its properties.

**1. Вступ.** У 90-х роках минулого століття у математичній фізиці зріс інтерес до  $p$ -адичних чисел. У теорії суперструн (М. Гріна, Дж. Шварца і Е. Віттена [2] та І.В. Воловіча, І.Я. Ареф'євої [3]), яка апелює до фантастично малих відстаней, порядку  $10^{-33}$  см, немає причин рахувати, що звичайні представлення про простір-час там можуть бути застосовані.

Однією з альтернативних можливостей для описання структури простору-часу є використання поля  $\mathbb{Q}_p$   $p$ -адичних чисел замість множини  $\mathbb{R}$  дійсних чисел. На можливість використання  $p$ -адичних чисел у математичній фізиці було вперше вказано у 1984 р. у роботі [4] Владімірова В.С. і Воловіча І.В.

У праці [1] побудована теорія узагальнених функцій над простором функцій з  $\mathbb{Q}_p$  в  $\mathbb{C}$ , яка застосовується до тих задач, що виникають у математичній фізиці. Теорія у багато чому аналогічна відповідній теорії над множиною  $\mathbb{R}$ , але є певні суттєві відмінності. Основну увагу приділяється теорії згортки, перетворенню Фур'є, аналогу оператора Рімана-Ліув'єля, обчисленню інтегралів.

Параболічні рівняння над полем  $p$ -адичних чисел вивчалися у праці А.Н. Кочубея [5]. В ній при певних припущеннях відносно коефіцієнтів побудовано і досліджено фундаментальний розв'язок задачі Коші, доведені існування та єдиність розв'язку у класах зростаючих функцій, знайдені умови невід'ємності фундаментального розв'язку.

### 2. Основні поняття $p$ -адичного аналізу.

Наведемо деякі твердження  $p$ -адичного аналізу, які будуть використовуватися в подальшому. Детальне їх викладення міститься у [1, 6, 8].

Нехай  $p$  – просте число ( $p = 2, 3, 5, \dots, 137, \dots$ ), яке буде фіксованим. Введемо на множині  $\mathbb{Q}$  норму  $|x|_p$  за правилом  $|0|_p = 0$ ,  $|x|_p = p^{-\gamma}$ , якщо раціональне число  $x$  подане у вигляді

$$x = p^\gamma \frac{m}{n},$$

де  $\{m, n, \gamma\} \subset \mathbb{Z}$ ,  $m, n$  не діляться на  $p$ . Доповнення  $\mathbb{Q}$  за  $p$ -адичною нормою утворює поле  $\mathbb{Q}_p$   $p$ -адичних чисел.

Норма  $|\cdot|_p$  володіє наступними властивостями:  $|x|_p = 0$  у тому випадку, коли  $x = 0$ ;  $|xy|_p = |x|_p \cdot |y|_p$ ;  $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$ , причому якщо  $|x|_p \neq |y|_p$ , то  $|x + y|_p = \max(|x|_p, |y|_p)$ . Таким чином  $p$ -адична норма неархімедова.

Метрика  $\rho(x, y) = |x - y|_p$  перетворює поле  $\mathbb{Q}_p$  у сепарабельний цілком незв'язний локально компактний метричний простір. На  $\mathbb{Q}_p$  існує (єдина, з точністю до множника) міра  $dx$ , інваріантна відносно додавання. При цьому якщо  $a \in \mathbb{Q}_p$ ,  $a \neq 0$ , то  $d(ax) = |a|_p dx$ . Будемо нормувати міру так, що

$$\int_{|x|_p \leq 1} dx = 1.$$

Простір  $\mathbb{Q}_p$  є об'єднанням зліченної сім'ї

попарно неперетинних множин

$$\mathbb{Q}_p = \bigcup_{\nu=-\infty}^{\infty} \{x : |x|_p = p^\nu\},$$

при цьому

$$\int_{|x|_p=p^\nu} dx = p^\nu \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Введемо у розгляд клас  $\mathfrak{M}_\gamma (\gamma \geq 0)$  комплекснозначних функцій  $\varphi(x)$  на  $\mathbb{Q}_p$ , які задовольняють умови:

- 1)  $|\varphi(x)| \leq c(1 + |x|_p)^\gamma$ ;
- 2) існує натуральне число  $N = N(\varphi)$  таке, що для довільного  $x \in \mathbb{Q}_p$

$$\varphi(x + x') = \varphi(x), \quad |x'| \leq p^{-N}.$$

Функція  $\varphi$ , що задовольняє умови 1), 2) називається локальною сталою, а число  $N$  показником локальної сталості функції  $\varphi$ . Якщо функція  $\varphi$  залежить також від параметра  $t$ , будемо говорити, що  $\varphi \in \mathfrak{M}_\gamma$  рівномірно по  $t$ , якщо константа  $c$  і показник  $N$  не залежить від  $t$ .

Множину фінітних функцій з  $\mathfrak{M}_0$  будемо позначати  $\mathfrak{D}$ . Нехай  $\chi$  – нормований адитивний характер поля  $\mathbb{Q}_p$ , тоді  $\chi \in \mathfrak{M}_0$ . Перетворення Фур'є функцій  $\varphi \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$  визначається формулою

$$F(\varphi) \equiv \tilde{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(\xi x) \varphi(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{Q}_p.$$

Обернене перетворення

$$F^{-1}(\varphi) \equiv \varphi(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-\xi x) \tilde{\varphi}(\xi) dx, \quad x \in \mathbb{Q}_p$$

існує, якщо  $\tilde{\varphi} \in L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$ .

Має місце формула [1]

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{Q}_p} f(|x|_p) \chi(\xi x) dx = \\ & = \left(1 - \frac{1}{p}\right) |\xi|_p^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^{-\nu} |\xi|_p^{-1}) p^{-\nu} - \\ & \quad - |\xi|_p^{-1} f(p |\xi|_p^{-1}), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\xi \neq 0$  і припускається збіжність ряду  $\sum_{\nu=0}^{\infty} f(p^{-\nu}) p^{-\nu}$ .

Оператор  $D^\gamma$  диференціювання порядку  $\gamma > 0$  визначений на функціях  $\varphi \in \mathfrak{D}$  формулою [1]

$$\begin{aligned} (D^\gamma \varphi)(x) = & \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \left\{ \int_{|y|_p \leq 1} |y|_p^{-\gamma-1} [\varphi(x-y) - \right. \\ & \left. - \varphi(x)] dy + \int_{|y|_p > 1} |y|_p^{-\gamma-1} \varphi(x-y) dy + \right. \\ & \left. + \frac{1-p^{-1}}{1-p^\gamma} \varphi(x) \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $\Gamma_p(s) = \frac{1-p^{s-1}}{1-p^{-s}} - p$  – адичний аналог гамма-функції.

У другому інтегралі правої частини (2) додамо і віднімемо  $|y|_p^{-\gamma-1} \varphi(x)$ . Та скористаємося тим, що

$$\begin{aligned} \int_{|y|_p > 1} |y|_p^{-\gamma-1} dy &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{|y|_p=p^\nu} |y|_p^{-\gamma-1} dy = \\ &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu\gamma} = \frac{p-1}{p(p^\gamma-1)}. \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} (D^\gamma \varphi)(x) &= \frac{1}{\Gamma_p(-\gamma)} \times \\ & \times \int_{\mathbb{Q}_p} |y|_p^{-\gamma-1} [\varphi(x-y) - \varphi(x)] dy. \end{aligned}$$

Таким чином оператор  $D^\gamma$  визначений на всіх функціях  $\varphi \in \mathfrak{M}_\beta$ ,  $0 \leq \beta < \gamma$ . Якщо  $\varphi \in \mathfrak{D}$ , то перетворення Фур'є, у сенсі узагальнених функцій, функції  $D^\gamma \varphi$  дорівнює  $|\xi|^\gamma \tilde{\varphi}(\xi)$ .

**3. Основний результат.** Розглянемо двоточкову крайову задачу для параболічного рівняння

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} + a(D^\alpha u)(t, x) = 0, \quad (3)$$

$$x \in \mathbb{Q}_p, t \in (0, T),$$

$$u(t, x)|_{t=0} - \mu u(t, x)|_{t=T} = \varphi(x), \quad (4)$$

де  $\varphi \in \mathfrak{M}_0$ ,  $a > 0$ ,  $\alpha \geq 1$ .

Як і в евклідовому випадку, перший крок полягає у побудові фундаментального розв'язку рівняння (3). Розв'язок задачі (3), (4) будемо шукати у вигляді

$$u(t, x) = F^{-1}(V(t, \sigma)),$$

де  $V(t, \sigma)$  є розв'язком двоточкової крайової задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\frac{dV(t, \sigma)}{dt} + a|\sigma|_p^\alpha V(t, \sigma) = 0, \quad \sigma \in \mathbb{Q}_p, \quad (5)$$

$$V(t, \sigma)|_{t=0} - \mu V(t, \sigma)|_{t=T} = \tilde{\varphi}(\sigma). \quad (6)$$

Розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$V(t, \sigma) = ce^{-a|\sigma|_p^\alpha t}.$$

Враховуючи крайові умови (6) маємо

$$c - \mu ce^{-a|\sigma|_p^\alpha T} = \tilde{\varphi}(\sigma)$$

або

$$c = \frac{\tilde{\varphi}(\sigma)}{1 - \mu e^{-a|\sigma|_p^\alpha T}}.$$

Тоді розв'язок задачі (5), (6) набуде вигляду

$$V(t, \sigma) = \frac{\tilde{\varphi}(\sigma)e^{-a|\sigma|_p^\alpha t}}{1 - \mu e^{-a|\sigma|_p^\alpha T}}. \quad (7)$$

Застосовуючи обернене перетворення Фур'є до (7) отримуємо

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{Q}_p} G(t, x - \xi)\varphi(\xi)d\xi,$$

де

$$G(t, x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) \frac{e^{-a|\sigma|_p^\alpha t}}{1 - \mu e^{-a|\sigma|_p^\alpha T}} d\sigma.$$

**Лема 1.** *Якщо  $|\mu|_p < 1$ , то має місце нерівність*

$$|G(t, x)| \leq c \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|_p (t + Tj) \times \left( (t + Tj)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}. \quad (8)$$

**Доведення.** З припущення, що  $|\mu|_p < 1$ , функцію  $G(t, x)$  можна подати у вигляді

$$G(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|_p \int_{\mathbb{Q}_p} \chi(-x\sigma) e^{-a|\sigma|_p^\alpha t} \times e^{-a|\sigma|_p^\alpha Tj} d\sigma \equiv \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|_p G_j(t, x). \quad (9)$$

З (9) видно, що функції  $G_j$  неперервні по  $x \in \mathbb{Q}_p$ . Оцінимо їх. Враховуючи зображення функції  $G_j(t, x)$  отримаємо

$$|G_j(t, x)| \leq \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\sigma|_p^\alpha (t + Tj)\} d\sigma.$$

Нехай ціле число  $k$  таке, що  $p^{k-1} \leq (t + Tj)^{\frac{1}{\alpha}} \leq p^k$ . Виберемо  $\tau \in \mathbb{Q}_p$ , щоб  $|\tau|_p = p^{k-1}$ . Тоді

$$\begin{aligned} |G_j(t, x)| &\leq \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-ap^{\alpha(k-1)}|\sigma|_p^\alpha\} d\sigma = \\ &= \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\tau\sigma|_p^\alpha\} d\sigma = \\ &= |\tau|_p^{-1} \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\eta|_p^\alpha\} d\eta = \\ &= p^{-k} p \int_{\mathbb{Q}_p} \exp\{-a|\eta|_p^\alpha\} d\eta \leq C(t + Tj)^{-\frac{1}{\alpha}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Використовуючи формулу (1) при  $x \neq 0$ , отримаємо

$$\begin{aligned} G_j(t, x) &= \left(1 - \frac{1}{p}\right) |x|_p^{-1} \sum_{\nu=0}^{\infty} p^{-\nu} \times \\ &\times \exp\{-a(t + Tj)p^{-\alpha\nu} |x|_p^{-\alpha}\} - \\ &- |x|_p^{-1} \exp\{-a(t + Tj)p^\alpha |x|_p^{-\alpha}\}. \end{aligned}$$

Розкладаючи експоненти у ряд, міняючи порядок сумування і просумувавши геометричну прогресію, отримаємо, що для  $x \neq 0$

$$G_j(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1 - p^{\alpha m}}{1 - p^{-\alpha m - 1}} \times$$

$$\times (a(t + Tj))^m |x|_p^{-\alpha m - 1}. \quad (11)$$

Із (11) отримуємо, що для  $0 < t < T$ ,  $|x|_p \geq (t + Tj)^{\frac{1}{\alpha}}$

$$\begin{aligned} |G_j(t, x)| &\leq |x|_p^{-1} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c^m}{m!} ((t + Tj)|x|_p^{-\alpha})^m \leq \\ &\leq |x|_p^{-1} \left[ \frac{c}{1!} (t + Tj)|x|_p^{-\alpha} + \dots + \right. \\ &\left. + \frac{c^m}{m!} (t + Tj)^m |x|_p^{-m\alpha} + \dots \right] = |x|_p^{-\alpha-1} (t + Tj) \times \\ &\times \left[ \frac{c}{1!} + \dots + \frac{c^m}{m!} (t + Tj)^{m-1} |x|_p^{-m\alpha-1} + \dots \right] \leq \\ &\leq |x|_p^{-\alpha-1} (t + Tj) \left[ \frac{c}{1!} + \dots + \frac{c^m}{m!} (t + Tj)^{m-1} \times \right. \\ &\left. \times \frac{1}{(t + Tj)^{m-1}} + \dots \right] \leq c_1 |x|_p^{-\alpha-1} (t + Tj). \quad (12) \end{aligned}$$

Із нерівностей (10) та (12) отримуємо (8). Дійсно, якщо  $|x|_p \geq (t + Tj)^{\frac{1}{\alpha}}$ , то

$$|x|_p^{-\alpha-1} \leq c \left( |x|_p + (t + Tj)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{-\alpha-1}.$$

Якщо ж  $|x|_p < (t + Tj)^{\frac{1}{\alpha}}$ , то

$$\left( |x|_p + (t + Tj)^{\frac{1}{\alpha}} \right)^{-\alpha-1} \geq c(t + Tj)^{-1} (t + Tj)^{-\frac{1}{\alpha}}.$$

Лема доведена.

Нерівність (8) показує, що по змінній  $x$  функція  $G(t, x)$  належить  $L_1(\mathbb{Q}_p, dx)$ , то із (9) і формули перетворення Фур'є знаходимо, що

$$\int_{\mathbb{Q}_p} G(t, x) dx = 1. \quad (13)$$

Розглянемо похідну  $\frac{\partial G}{\partial t}$ . Очевидно, що (9) можна диференціювати під знаком інтегралу

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -a \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|_p \int_{\mathbb{Q}_p} |\sigma|_p^\alpha e^{-a|\sigma|_p^\alpha t} e^{-a|\sigma|_p^\alpha Tj} d\sigma. \quad (14)$$

**Лема 2.** Якщо  $|\mu|_p < 1$ , то має місце нерівність

$$\left| \frac{\partial G(t, x)}{\partial t} \right| \leq c \sum_{j=0}^{\infty} |\mu|_p \left( (t + Tj)^{\frac{1}{\alpha}} + |x|_p \right)^{-\alpha-1}. \quad (15)$$

Доведення аналогічне лемі 1.

Отже, правильним є таке твердження.

**Теорема.** Нехай  $|\mu|_p < 1$ ,  $\varphi \in \mathfrak{M}_\beta$ ,  $\beta < \alpha$ . Тоді розв'язок двоточкової задачі (1), (2) існує і подається у вигляді

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{Q}_p} G(t, x - \xi) \varphi(\xi) d\xi,$$

де фундаментальний розв'язок  $G(t, x)$  має вигляд (9) і для нього мають місце оцінки (8), (15).

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Владимиров В.С. Обобщенные функции над полем  $p$ -адитических чисел // УМН. – 1988. – Т. 43, вып. 5. – С. 17-53.
2. Green M.B., Schwarz J.H., Witten E. Superstring Theory. – Cambridge. CUP, 1987.
3. Арефьева И.Я., Волович И.В. Суперсиметрия: теория Калуцы-Клейна, аномалии, суперструны // УФН. – 1985. – Т. 146, вып. 4. – С. 655-681.
4. Владимиров В.С., Волович И.В. Суперанализ. I. Дифференциальное исчисление // ТМФ. – 1984. – Т. 59, № 1. – С. 3-27.
5. Кочубей А. Н. Параболические уравнения над полем  $p$ -адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1991. – Т. 55, №6. – С. 1312-1330.
6. Боревич З.И., Шафаревич И.Р. Теория чисел. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. – 1985. – 504 с.
7. Гельфанд И.М., Граев М.И., Пятецкий-Шапиро И.И. Теория представлений и автоморфные функции. – М.: Наука, 1966. – 512 с.