УДК 517.982

©2003 р. Т.І.Готинчан

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО НЕТРИВІАЛЬНІСТЬ ТА ВКЛАДЕННЯ ПРОСТОРІВ ТИПУ W

Наведені необхідні та достатні умови нетривіальності простору W_M^Ω. Доведено рівність $W_M^\Omega = W_M \cap W^\Omega$.

Necessary and sufficient conditions of non-triviality of a space W_M^Ω are presented. The equation $W_M^\Omega = W_M \cap W^\Omega$ has been proved.

Розглянемо функцію ω: $[0,+\infty) \to$ $\to [0,+\infty)$, яка є неперервною й монотонно зростаючою, причому $\omega(0)=0$, $\omega(1)>1$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\omega(t)=+\infty$. Для кожного $n\in\mathbb{Z}_+$ рівняння $x\omega(x)=n$ має єдиний розв'язок $\rho_n<n$ при $n\in\mathbb{N}$ і $\rho_0=0$ при $n=0$. Послідовність $\{\rho_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$ є монотонно зростаючою і необмеженою.

Для $x\geq 0$ розглянемо $\Omega(x)=\int\limits_0^x \omega(\eta)d\eta$. Функція Ω є диференційовною, монотонно зростаючою, опуклою вниз на $[0,+\infty)$, причому $\Omega(0)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\Omega(t)=+\infty$. Довизначимо парним чином її на $(-\infty,0]$.

Розглянемо також функції μ та M, які мають ті ж властивості, що й функції ω і Ω відповідно. За функціями M,Ω побудуємо основні простори $W_M, W^\Omega, W_M^\Omega$ [1].

У праці [2] сформульовані наступні твердження.

Теорема 1. *Для функції $\varphi\in W_M$ наступні твердження еквівалентні:*

$$1)\ \exists a>0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}_+ \quad \exists C_n>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}\ :$$

$$|\varphi^{(n)}(x)|\leq C_n\exp\{-M(ax)\};$$

$$2)\ \exists a_1>0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}_+ \quad \exists C_n^{(1)}>0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+$$

$$\exists\nu_k\in[0,\,k),\ \nu_0=0,\ \forall x\in\mathbb{R}\ :$$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leq C_n^{(1)}\left(\frac{\nu_k}{a_1}\right)^k\exp\{-M(\nu_k)\},$$

де ν_k – розв'язок рівняння $x\mu(x)=k$, $k\in$ $\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема 2. *Для функції $\varphi\in W^\Omega$ наступні твердження еквівалентні:*

$$1)\ \exists b>0\ \ \forall k\in\mathbb{Z}_+\ \ \exists C_k>0$$

$$\forall z=x+iy\in\mathbb{C}:\ |z^k\varphi(z)|\leq C_k\exp\{\Omega(by)\};$$

$$2)\ \exists b_1>0\ \ \forall k\in\mathbb{Z}_+\ \ \exists C_k^{(1)}>0\ \ \forall n\in\mathbb{Z}_+$$

$$\exists\rho_n\in[0,n),\ \rho_0=0,\ \ \forall x\in\mathbb{R}:$$

$$|x^k\varphi^{(n)}(x)|\leq C_k^{(1)}n!\left(\frac{b_1}{\rho_n}\right)^n\exp\{\Omega(\rho_n)\},$$

де ρ_n - розв'язок рівняння $x\omega(x)=n$, $n\in$ $\in\mathbb{Z}_+$.

Теорема 3. *Для функції $\varphi\in W_M^\Omega$ наступні твердження еквівалентні:*

$$1)\ \exists a>0\ \ \exists b>0\ \ \exists C>0\ \ \forall z=x+iy\in\mathbb{C}:$$

$$|\varphi(z)|\leq C\exp\{-M(ax)+\Omega(by).$$

$$2)\ \exists C_1>0 \quad \exists a_1>0 \quad \exists b_1>0 \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+$$

$$\exists\nu_k\in[0,k),\ \ \nu_0=0,\ \ \forall n\in\mathbb{Z}_+\ \exists\rho_n\in[0,n),$$

$$\rho_0=0,\quad \forall x\in\mathbb{R}\ :\ |x^k\varphi^{(n)}(x)|\leq$$

$$\leq C_1 n!\left(\frac{b_1}{\rho_n}\right)^n\left(\frac{\nu_k}{a_1}\right)^k\exp\{\Omega(\rho_n)-M(\nu_k)\},$$

де ν_k, ρ_n - розв'язки відповідно рівнянь $x\mu(x)=k$, $x\omega(x)=n$, $\{k,\,n\}\subset\mathbb{Z}_+$.

Теореми 1 – 3 вказують на те, що простори типу W є частинним випадком узагальнених просторів типу $S: S_{a_k}, S^{b_n}, S_{a_k}^{b_n}$ [3].

Зазначимо, оскільки $\{k,\,n\}\subset\mathbb{Z}_+$, то твердження 2) з теорем 1 – 3 еквівалентні відповідно умовам

$$(\varphi\in W_M)\Longleftrightarrow(\exists a_2>0\ \forall n\in\mathbb{Z}_+\ \exists C_n^{(2)}>0$$

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists \nu_k \in [0,\, k), \ \ \nu_0 = 0 \ : \\ ||x^k \varphi^{(n)}(x)||_{L_2(\mathbb{R})} \le \\ \le C_n^{(2)} \left(\frac{\nu_k}{a_2}\right)^k \exp\{-M(\nu_k)\});$$

$$(\varphi \in W^{\Omega}) \Longleftrightarrow (\exists b_2 > 0 \ \forall k \in \mathbb{Z}_+ \ \exists C_k^{(2)} > 0 \\ \forall n \in \mathbb{Z}_+ \ \exists \rho_n \in [0, n), \ \rho_0 = 0 \ : \\ ||x^k \varphi^{(n)}(x)||_{L_2(\mathbb{R})} \le \\ \le C_k^{(2)} n! \left(\frac{b_2}{\rho_n}\right)^n \exp\{\Omega(\rho_n)\});$$

$$(\varphi \in W_M^{\Omega}) \Longleftrightarrow (\exists a_2 > 0 \ \exists b_2 > 0 \ \exists C_2 > 0 \\ \forall \{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \ \exists \nu_k \in [0, k), \ \ \nu_0 = 0, \\ \exists \rho_n \in [0, n), \ \rho_0 = 0 \ : \ ||x^k \varphi^{(n)}(x)||_{L_2(\mathbb{R})} \le \\ \le C_2 n! \left(\frac{b_2}{\rho_n}\right)^n \left(\frac{\nu_k}{a_2}\right)^k \exp\{\Omega(\rho_n) - M(\nu_k)\}),$$

де ν_k, ρ_n - розв'язки відповідно рівняннь $x\mu(x) = k$, $x\omega(x) = n$, $\{k,\, n\} \subset \mathbb{Z}_+$.

Розглянемо тепер функції

$$L_M(x) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|x|^k}{\nu_k^k \exp\{-M(\nu_k)\}},$$

$$L_\Omega(x) = \sup_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{|x|^k}{n! \rho_n^{-n} \exp\{\Omega(\rho_n)\}},$$

$$x \in \mathbb{R}.$$

Теорема 4. *Функції L_M і L_Ω задовольняють нерівності*

$$\exists C_M^{(1)} \in (0,\, 1] \ \exists a_1 > 0 \ \exists a_2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \\ C_M^{(1)} \exp\{M(a_1 x)\} \le L_M(x) \le \exp\{M(a_2 x)\};$$

$$\exists C_\Omega^{(1)} \in (0,\, 1] \ \exists b_1 > 0 \ \exists b_2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ : \\ C_\Omega^{(1)} \exp\{\Omega(b_1 x)\} \le L_\Omega(x) \le \exp\{\Omega(b_2 x)\}.$$

Доведення. 1) Оскільки для довільного фіксованого $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k \to 0+} \left(\frac{|x|}{\nu_k}\right)^k \exp\{M(\nu_k)\} = 1,$$

$$\lim_{k \to +\infty} \left(\frac{|x|}{\nu_k}\right)^k \exp\{M(\nu_k)\} = 0,$$

то L_M визначена коректно.

Зазначимо, що $M(\nu_k) < k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Тому для k такого, що $\nu_k \ge |x|e$, виконується нерівність

$$\left(\frac{|x|}{\nu_k}\right)^k \exp\{M(\nu_k)\} \le \left(\frac{|x|e}{\nu_k}\right)^k \le 1.$$

Отже,

$$L_M(x) \le \sup_{k < |x|e} \left(\frac{|x|}{\nu_k}\right)^k \exp\{M(\nu_k)\} \le \\ \le \sup_{k < |x|e} \left(\frac{|x|e}{k}\right)^k \cdot \sup_{k < |x|e} \left(\frac{k}{e\nu_k}\right)^k \times \\ \times \exp\{M(xe)\}.$$

Використовуючи співвідношення з [2]

$$\exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\} \le \inf_{k \in \mathbb{Z}_+} \frac{k^{k\alpha}}{|\xi|^k} \le \\ \le \exp\{\frac{\alpha e}{2}\} \exp\{-\frac{\alpha}{e}|\xi|^{1/\alpha}\}, \ \alpha > 0, \ \xi > 0,$$

отримуємо, що

$$\sup_{k < |x|e} \left(\frac{|x|e}{k}\right)^k \le \exp\{|x|\}.$$

Якщо $|x| \le 1/e$, то

$$\sup_{k < |x|e} \left(\frac{k}{e\nu_k}\right)^k = \left(\frac{k}{e\nu_k}\right)^k \Big|_{k=0} = 1.$$

Розглядаємо $|x| > 1/e$. Тоді

$$\sup_{k < |x|e} \left(\frac{k}{e\nu_k}\right)^k \le \\ \le \exp\{|x|e \cdot ln(|x|e)\} \times \\ \times \exp\{-k_0 ln(e\nu_{k_0})\},$$

де $k_0 \in [1,\, |x|e)$ - номер, на якому досягається

$$\sup_{k < |x|e} \left(\frac{k}{e\nu_k}\right)^k.$$

Якщо $\nu_{k_0} \geq 1/e$, то

$$\exp\{-k_0 ln(e\nu_{k_0})\} \leq 1.$$

Якщо ж $\nu_{k_0} < 1/e$, то

$$\exp\{-k_0 ln(e\nu_{k_0})\} \leq \exp\{|x|e \cdot ln(e^2|x|)\}.$$

Отже,

$$L_M(x) \leq \exp\{2|x|e(1 + ln(|x|e))\}, \ |x| > 1/e.$$

Згідно з означенням функції M отримуємо, що

$$2|x|e(1 + ln(|x|e)) \leq C_0 M(xe) \leq M(a_0 e x),$$

де $a_0 = [C_0] + 1$, $C_0 \equiv C_0(M) > 0$.
Отже,

$$L_M(x) \leq \exp\{M(a_2 x)\}, \ x \in \mathbb{R},$$

де $a_2 = e \cdot \max\{1, a_0\}$.
З іншого боку,

$$L_M(x) = \frac{1}{\inf\limits_{k \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{\nu_k}{|x|}\right)^k \exp\{-M(\nu_k)\}} \geq$$

$$\frac{1}{\inf\limits_{k\,:\,\nu_k < |x|} \left(\frac{\nu_k}{|x|}\right)^k \exp\{-M(\nu_k)\}},$$

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

У [2] доведено, що

$$\forall\, \xi > 0 : \inf_{k\,:\,\nu_k \leq \xi} f_\xi(\nu_k) \leq$$

$$\leq \exp\{M(1)\} \cdot \exp\{-M(\xi/2)\}. \qquad (1)$$

Отже,

$$L_M(x) \geq C_M \exp\{M(a_1 x)\}, \ x \in \mathbb{R},$$

де $C_M = \dfrac{1}{\exp\{M(1)\}} \in (0, 1)$, $a_1 = 1/2$.

2) Оскільки

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} < n! < \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} e^{\frac{1}{12}}, \ n \in \mathbb{N},$$

$$0! = 1,$$

то

$$L_\Omega(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \left(\frac{|x|e\rho_n}{n}\right)^n \exp\{-\Omega(\rho_n)\}.$$

Якщо n таке, що $\dfrac{n}{\rho_n} > |x|e$, то

$$L_\Omega(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} < 1.$$

Отже,

$$L_\Omega(x) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sup_{n < \rho_1 |x| e} \left(\frac{|x|e\rho_n}{n}\right)^n \exp\{-\Omega(\rho_n)\}.$$

Якщо $|x| \leq 1/e$, то $n = 0$ і $L_\Omega(x) < 1$. Розглядатимемо $|x| > 1/e$. Тоді

$$L_\Omega(x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\{\Omega(\rho_1 |x| e)\} \times$$

$$\times \sup_{n < \rho_1 |x| e} \left(\frac{|x|e\rho_n}{n}\right)^n \exp\{-2\Omega(\rho_n)\}.$$

Але

$$\left(\frac{|x|e\rho_n}{n}\right)^n \exp\{-2\Omega(\rho_n)\} =$$

$$= \left(\frac{|x|e}{n}\right)^n \rho_n^n \exp\{-2\Omega(\rho_n)\}.$$

Як і при доведенні 1), встановлюємо, що

$$L_\Omega(x) \leq \exp\{\Omega(b_2 x)\}, \ x \in \mathbb{R}.$$

З іншого боку,

$$L_\Omega(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi} e^{\frac{1}{12}} \inf\limits_{n \in \mathbb{Z}_+} (f_n(x) \cdot g_n}),$$

де

$$f_n(x) = \left(\frac{n}{|x|e}\right)^n \exp\{-\Omega(n)\},$$

$$g_n = \frac{\exp\{\Omega(n) + \Omega(\rho_n)\}}{\rho_n^n},$$

$$x \in \mathbb{R} \ \{0\}, \ \ n \in \mathbb{Z}_+.$$

Оскільки

$$\lim_{n \to 0+} g_n = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} g_n = +\infty,$$

то

$$L_\Omega(x) \geq \frac{1}{C \cdot \inf\limits_{n<\rho_1|x|e} f_n(x)},$$

де $C = \sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{12}} \cdot \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}_+} g_n$.

Використовуючи (1), отримуємо, що

$$L_\Omega(x) \geq C_\Omega \exp\Omega(b_1 x), \ \ x \in \mathbb{R},$$

де $C_\Omega = \dfrac{1}{C \cdot \exp\{\Omega(x)\}} \in (0,\,1)$, $b_1 = \dfrac{e}{2}$.

Теорема 5. *1) Якщо послідовності* $\{\nu_k,\, k \in \mathbb{N}\}$, $\{\rho_k,\, k \in \mathbb{N}\}$ *задовольняють умову*

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{\nu_k}{\rho_k} = 0, \tag{2}$$

то простір W_M^Ω *є тривіальним;*

2) Якщо ж

$$\inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{\nu_k}{\rho_k} > 0, \tag{3}$$

то простір W_M^Ω *нетривіальний.*

Доведення. 1) Нехай виконується умова (2). Оскільки $\nu_k > 0$, $\rho_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, то

$$\forall n \in \mathbb{N} \,:\, \inf_{k\geq n} \frac{\nu_k}{\rho_k} = \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{\nu_k}{\rho_k} = 0,$$

і отже, $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\nu_k}{\rho_k} = 0$.

Зазначимо, що

$$\frac{\omega(\rho_k)}{\mu(\nu_k)} = \frac{k \cdot \nu_k}{\rho_k \cdot k} = \frac{\nu_k}{\rho_k}, \ \ k \in \mathbb{N},$$

тому $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\omega(\rho_k)}{\mu(\nu_k)} = 0$.

Розглянемо довільне число $a > 0$. Тоді

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} \,:\, a \leq \frac{\rho_{k_0}}{\nu_{k_0}},$$

а отже, $a \leq \dfrac{\rho_k}{\nu_k}$, $k \geq k_0$. Тоді

$$\frac{\omega(\nu_k \cdot a)}{\mu(\nu_k)} \leq \frac{\omega(\rho_k)}{\mu(\nu_k)}, \ \ k \geq k_0,$$

і $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{\omega(\nu_k \cdot a)}{\mu(\nu_k)} = 0$.

Оскільки функції ω і μ неперервні й монотонно зростаючі на $[0,\,+\infty)$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\omega(x\cdot a)}{\mu(x)} = 0$, а отже, й $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Omega(x\cdot a)}{M(x)} = 0$. Тоді

$$\forall\{a,\, b\} \subset (0,\,+\infty) \,:\, \lim_{x\to+\infty}(\Omega(bx) - M(ax)) = -\infty. \tag{4}$$

А це означає [1], що простір W_M^Ω є тривіальним.

2) Нехай тепер виконується умова (3). Тоді

$$\exists d > 0 \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ \forall k \geq k_0 \,:\, \frac{\nu_k}{\rho_k} \geq d,$$

а отже,

$$\omega(\rho_k) \geq d\mu(\nu_k) \geq d\mu(d\rho_k), \ \ k \geq k_0.$$

Згідно з неперервністю й монотонністю функцій μ і ω отримуємо, що

$$\omega(x) \geq C \cdot d\mu(dx), \ \ x > x_0,$$

де стала $C > 0$. Тоді для вказаних x

$$\Omega(x) \geq C \cdot M(dx). \tag{5}$$

Бабенко І.К. довів необхідні й достатні умови нетривіальності простору $S_{a_k}^{b_n}$ за певних умов [3].

Нехай функція Ω така, що $\Omega(x) \leq x^2$, $x \in \mathbb{R}$. Тоді

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{ln(ln(L_M(x)))}{ln(x)} \leq$$

$$\leq \lim_{x\to+\infty} \frac{ln(ln(\exp\{\tilde{a}_2^2 x^2\}))}{ln(x)} \leq 2.$$

Згідно з умовами з [3], щоб простір W_M^Ω був нетривіальним досить, щоб виконувалась умова

$$\varliminf_{x\to+\infty} \frac{\lambda_\Omega(x)}{x^3 \cdot \gamma_M(x)} > 0,$$

де

$$\lambda_\Omega(x) = ln \int\limits_0^{+\infty} \frac{ch(tx)}{L_\Omega(t)} dt,$$

$$\gamma_M(x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{ln(L_M(y))}{y^2} \cdot \frac{dy}{y^2+x^2}.$$

Справді,

$$\lambda_\Omega(x) \geq ln \int\limits_0^{+\infty} \frac{ch(tx)}{\exp\{b_2^2 t^2\}} dt =$$

$$ln\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2b_2}\right) + \frac{x^2}{4b_2^2},$$

$$\gamma_M(x) \leq \int\limits_0^{+\infty} \frac{ln(\exp\{a_2^2 y^2\})dy}{y^2(y^2+x^2)} \leq \frac{a_2^2 \pi}{2x}.$$

А тому $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\lambda_\Omega(x)}{x^3 \cdot \gamma_M(x)} > 0.$

Нехай $\Omega(x) > x^2$, $M(x) \leq x^2$, $x \in \in \mathbb{R}$. Оскільки простір $W_M^{x^2}$ нетривіальний і $W_M^{x^2} \subset W_M^\Omega$, то й простір W_M^Ω – нетривіальний. Очевидно, що й у випадку $M(x) \geq x^2$, $x \in \mathbb{R}$, простір W_M^Ω є нетривіальним.

Зауваження. Із теореми 5 випливає, що умова (2) є необхідною й достатньою умовою тривіальності, а (3) – нетривіальності просторів W_M^Ω. Зазначимо також, що умова (2) еквівалентна умові (4), а (3) – умові (5).

Теорема 6. *Для довільних опуклих неперервно диференційовних функцій M і Ω правильна рівність*

$$W_M^\Omega = W_M \cap W^\Omega.$$

Доведення. Згідно з теоремами 1—3, вкладення $W_M^\Omega \subset W_M \cap W^\Omega$ очевидне.

Розглянемо тепер довільну цілу функцію $\varphi \in W_M \cap W^\Omega$ й доведемо, що $\varphi \in W_M^\Omega$. Розглядатимемо спочатку випадок функцій M і Ω, для яких виконується умова (2), тобто

$$\exists d > 0 \ : \ \inf_{k\in\mathbb{N}} \frac{\nu_k}{\rho_k} > d.$$

Функція φ задовольняє умови:

$$\exists C_0 > 0 \ \exists a > 0 \ \exists b > 0 \ \forall \{k,\, n\} \subset \mathbb{Z}_+ \ :$$

$$||x^k \varphi(x)||_{L_2(\mathbb{R})} \leq C_0 \left(\frac{\nu_k}{a}\right)^k \exp\{-M(\nu_k)\};$$

$$||\varphi^{(n)}(x)||_{L_2(\mathbb{R})} \leq C_0 n! \left(\frac{b}{\rho_n}\right)^n \exp\{\Omega(\rho_n\}.$$

Тоді, інтегруючи частинами, застосовуючи формулу Лейбніца для диференціювання добутку й нерівність Коші Буняковського, для довільних $\{k,\, n\} \subset \mathbb{N}$ отримуємо

$$I_{k,n}^2 \equiv ||x^k \varphi^{(n)}(x)||_{L_2(\mathbb{R})}^2 \leq \sum_{j=0}^{l} C_N^j \cdot C_{2k}^j \cdot j! \times$$

$$\times ||x^{2k-j} \varphi(x)||_{L_2(\mathbb{R})} \cdot ||\varphi^{2n-j}(x)||_{L_2(\mathbb{R})}.$$

де $l = \min\{2k,\, n\}$.

Зазначимо, що

$$C_r^j \equiv \frac{r!}{j!(r-j)!} \leq 2^r, \ \ j \in \{0, 1, \ldots, r\};$$

$$\frac{j!(2n-j)!}{(n!)^2} \leq C^2 \cdot 2^{2n+1/2} \cdot \left(\frac{j}{2n}\right)^j,$$

де $C > 0$ - деяка стала;

$$\Omega(\rho_k) \leq k, \ \ M(\nu_k) \leq k, \ \ k \in \mathbb{Z}_+;$$

$$\forall \{s, r\} \subset \mathbb{Z}_+, \ \ s > r \ :$$
$$\frac{\nu_s}{\nu_r} \leq \frac{s}{r}, \ \ \frac{\rho_s}{\rho_r} \leq \frac{s}{r}.$$

Тому правильні нерівності

$$\exp\{-M(\nu_{2k-j})\} \leq e^{2k} \exp\{-2M(\nu_k)\};$$

$$\exp\{\Omega(\rho_{2k-j})\} \leq e^{2k} \exp\{2\Omega(\rho_k)\};$$

$$\left(\frac{\nu_{2k-j}}{a}\right)^{2k-j} \leq \left(\frac{2\nu_k}{a}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{a}{\nu_{2k}}\right)^j;$$

$$\left(\frac{b}{\rho_{2k-j}}\right)^{2k-j} \leq \left(\frac{b}{\rho_k}\right)^{2k} \cdot \left(\frac{2\rho_k}{b}\right)^j.$$

А отже,

$$I_{k,n}^2 \leq$$

$$\leq \sqrt{2}(C_0 \cdot C)^2 (n!)^2 \left(\frac{2^2 e \nu_k}{a}\right)^{2k} \left(\frac{2^{3/2} b e}{\rho_n}\right)^{2n} \times$$

$$\times \exp\{2(\Omega(\rho_n) - M(\nu_k))\} \times$$

$$\times \sum_{j=0}^{l} \left(\frac{j}{n}\right)^j \left(\frac{a}{b}\right)^j \left(\frac{\rho_n}{\nu_{2k}}\right)^j.$$

Якщо $n \le 2k$, то

$$\frac{\rho_n}{\nu_{2k}} \le \frac{\rho_{2k}}{\nu_{2k}} \le \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\rho_j}{\nu_j} = \frac{1}{\inf\limits_{j\in\mathbb{N}} \frac{\nu_j}{\rho_j}} = \frac{1}{d}$$

і

$$\sum_{j=0}^{l} \left(\frac{j}{n}\right)^j \left(\frac{a}{b}\right)^j \left(\frac{\rho_n}{\nu_{2k}}\right)^j \le \sum_{j=0}^{l} \left(\frac{a}{bd}\right)^j.$$

Якщо ж $2k < n$, то

$$\frac{\rho_n}{\nu_{2k}} = \frac{\rho_n}{\nu_n} \cdot \frac{\nu_n}{\nu_{2k}} \le \frac{1}{d} \cdot \frac{n}{2k}$$

і

$$\sum_{j=0}^{l} \left(\frac{j}{n}\right)^j \left(\frac{a}{b}\right)^j \left(\frac{\rho_n}{\nu_{2k}}\right)^j \le$$

$$\le \sum_{j=0}^{l} \left(\frac{j}{2k}\right)^j \left(\frac{a}{bd}\right)^j \left(\frac{n}{n}\right)^j \le \sum_{j=0}^{l} \left(\frac{a}{bd}\right)^j.$$

Отже,

$$I_{k,n}^2 \le \tilde{C}^2 (n!)^2 \left(\frac{\nu_k}{\tilde{a}}\right)^{2k} \left(\frac{\tilde{b}}{\rho_n}\right)^{2n} \times$$

$$\times \exp\{2(\Omega(\rho_n) - M(\nu_k))\},$$

де $\tilde{C} = 2^{1/4} C C_0 C_\theta$, $\tilde{a} = \dfrac{a}{4e\theta}$, $\tilde{b} = 2^{3/2} b e \theta$, $\theta > 1$.

Отже, у даному випадку $\varphi \in W_M^\Omega$.

Розглянемо тепер функції M і Ω, для яких виконується умова (3). Доведемо, що в цьому випадку $\varphi \equiv 0$. Справді, згідно з означенням просторів W_M і W^Ω, для неї виконуються оцінки

$$\exists\, C_0 > 0 \ \exists\, a > 0 \ \exists\, b > 0 :$$

$$|\varphi(x)| \le C_0 \exp\{-M(ax)\}, \ x \in \mathbb{R},$$

$$|\varphi(z)| \le C_0 \exp\{\Omega(by)\}, \ z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Нехай спочатку функція Ω така, що $\Omega(y) \le y^2$, $y \in \mathbb{R}$. Розглянемо функцію $\psi(z) = \varphi(z) \cdot \varphi(i\bar{z})$, $z \in \mathbb{C}$. Для неї правильні оцінки

$$|\psi(z)| \le C_0^2 \exp\{\Omega(by) + \Omega(bx)\} \le$$

$$\le C_0^2 \exp\{2(b|z|)^2\}, \ z = x + iy \in \mathbb{C},$$

$$|\psi(x)| \le C_0^2 \exp\{\Omega(bx) - M(ax)\}, \ x \in \mathbb{R},$$

$$|\psi(iy)| \le C_0^2 \exp\{\Omega(by) - M(ay)\}, \ y \in \mathbb{R}.$$

Згідно з теоремою Фрагмена-Ліндельофа, функція ψ обмежена на $\mathbb{C}$. Але на координатних осях $\psi(z) \to 0$ при $z \to \infty$. Отже, згідно з теоремою Ліувілля, $\psi \equiv 0$.

Нехай тепер $\Omega(y) > y^2/2$ $y > y_0 \ge 0$. Позначимо через $\tilde{M}$ і $\tilde{\Omega}$ двоїсті функції відповідно до M і Ω. Оскільки $M(x) > \Omega(x) > x^2/2$, $x > x_0 \ge 0$ то $\tilde{M}(x) \le \tilde{\Omega}(x) \le x^2/2$ [1]. Тому й у даному випадку $\psi \equiv 0$.

Отже, $W_M^\Omega = W_M \cap W^\Omega$ для довільних неперервних монотонно зростаючих опуклих функцій M і Ω.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

2. *Готинчан Т.І., Атаманюк Р.М.* Різні форми означення просторів типу W // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.21—26.

3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1958.— 308 с.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.2002