УДК 517.982

©2003 р. В.В. Городецький, Р.С. Колісник

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є ТА ОПЕРАТОРИ ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ В ПРОСТОРАХ ТИПУ C

Вивчаються властивості перетворення Фур'є та оператора диференціювання нескінченного порядку в просторах цілих функцій, які спадають на нескінченності (на $\mathbb{R}$) разом із усіма своїми похідними швидше, ніж $\exp\{-|x|\}$, $x \in \mathbb{R}$.

The properties of Fourier transform and differentiation operator of infinite order are studied on the spaces of entire functions, which decrease on infinity (on $\mathbb{R}$) together with all derivatives faster than $\exp\{-|x|\}$, $x \in \mathbb{R}$.

У праці [1] введено простори типу C цілих функцій, порядок спадання яких та їхніх похідних на дійсній осі характеризується величинами $m_{kn} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |x^k \varphi^{(n)}(x)|$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$; при цьому простори S_α, S^β, S_α^β, $\{\alpha,\beta\} \subset (0,1)$, а також простори типу W, введені в [2], [3], утворюють певні підкласи вказаних просторів. Тут вивчаються властивості перетворення Фур'є функцій з просторів типу C, а також властивості оператора диференціювання нескінченного порядку в таких просторах, який трактується як псевдодиференціальний оператор, побудований за певним аналітичним символом.

1. Перетворення Фур'є функцій з просторів типу C. Передусім наведемо означення просторів типу C.

Простір C^ρ. Розглянемо монотонно зростаючу послідовність $\{m_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ додатних чисел таку, що

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{m_n}}{n} = 0$, $m_0 = 1$;

2) $\forall\, \alpha > 0\ \exists\, c_\alpha > 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$: $m_n \geq c_\alpha \cdot \alpha^n$;

3) $\exists\, M > 0\ \exists\, h > 0\ \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$: $m_{n+1} \leq M h^n m_n$

і покладемо

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \sup\limits_n \dfrac{|x|^n}{m_n}, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Функція ρ — неперервна, парна на $\mathbb{R}$, монотонно зростає на $[1,+\infty)$ і монотонно спадає на $(-\infty,-1]$, $\rho(x) \geq 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $\rho(1) = 1$. Крім того (див. [1]),

$$\exists\, c_0 > 0\ \exists\, c > 0\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] :$$
$$\rho(x) \geq c_0 e^{c|x|}.$$

За функцією ρ будуємо послідовність

$$\rho_n := \inf_{x\neq 0} \frac{\rho(x)}{|x|^n} = \inf_{|x|\geq 1} \frac{\rho(x)}{|x|^n}, \ \ n \in \mathbb{Z}_+,$$

яка володіє властивостями [1]: 1) вона є монотонно спадною; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \rho_n = 0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\rho_n} = 0$; 4) послідовність $\left\{\dfrac{\rho_{n-1}}{\rho_n}, n \geq 1\right\}$ обмежена зверху.

Символом C^ρ в [1] позначається сукупність усіх цілих аналітичних функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\exists\, b > 0\ \ \forall\, k \in \mathbb{Z}_+\ \exists\, c_k > 0\ \ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C} :$$
$$|z^k \varphi(z)| \leq c_k \rho(by).$$

Наприклад, якщо $m_n = n^{n(1-\beta)}$, $0 < \beta < 1$, то $\rho(u) \sim \exp\{u^{1/(1-\beta)}\}$, тобто в цьому випадку C^ρ збігається з простором S^β, введеним І.М. Гельфандом та Г.Є. Шиловим у книзі [2]. У просторі C^ρ визначені і є неперервними операції диференціювання, зсуву аргументу, множення на z. Мультиплікатором у цьому просторі є кожна ціла функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка при довільному $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівність

$$|f(z)| \leq c_\varepsilon \rho(\varepsilon y), \ \ \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

В [1] доведено також, що для функції $\varphi \in C^\rho$ еквівалентними є наступні твердження:

А) $\exists\, b > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists\, c_k > 0 \quad \forall\, z = x + iy \in \mathbb{C}$: $\quad |z^k \varphi(z)| \le c_k \rho(by)$;

Б) $\exists\, b_1 > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists\, c_k^{'} > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}_+$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\quad |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_k^{'} b_1^n n! \rho_n$.

Простір C_γ. Нехай $\{l_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ — зростаюча послідовність додатних чисел, яка володіє властивостями 1)–3). Нехай

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ \inf\limits_n \dfrac{l_n}{|x|^n}, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

Функція γ є невід'ємною, парною на $\mathbb{R}$ функцією, яка монотонно спадає на проміжку $[1, +\infty)$ і монотонно зростає на проміжку $(-\infty, -1]$, $\gamma(x) \le 1$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Крім того,

$$\exists\, c_0^{'} > 0 \;\; \exists\, c^{'} > 0 \;\; \forall\, x : \;\; |x| > 1 :$$

$$\gamma(x) \le c_0^{'} e^{-c'|x|}.$$

Наприклад, якщо $l_n = n^{n\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$, то γ задовольняє нерівності [2]

$$\exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\} \le \gamma(x) \le c \exp\left\{-\frac{\alpha}{e}|x|^{1/\alpha}\right\},$$

$$c = \exp\left\{\frac{\alpha e}{2}\right\}.$$

Символом C_γ позначимо сукупність усіх нескінченно диференційовних на $\mathbb{R}$ функцій, які задовольняють умову

$$\exists\, a > 0 \;\; \forall\, q \in \mathbb{Z}_+ \;\; \exists\, c_q > 0 \;\; \forall\, x \in \mathbb{R} :$$

$$|\varphi^{(q)}(x)| \le c_q \gamma(ax).$$

У просторі C_γ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання та операція зсуву аргументу. Мультиплікатором у просторі C_γ є нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція f, яка при довільному $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівності

$$|f^{(q)}(x)| \le c_{q\varepsilon} (\gamma(\varepsilon x))^{-1}, \;\; q \in \mathbb{Z}_+, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

У праці [1] доведено, що для функції $\varphi \in C_\gamma$ еквівалентними є твердження:

В) $\exists\, a > 0 \quad \forall\, q \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists\, c_q > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$: $|\varphi^{(q)}(x)| \le c_q \gamma(ax)$;

Г) $\exists\, a_1 > 0 \quad \forall\, q \in \mathbb{Z}_+ \quad \exists\, c_q^{'} > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$|x^k \varphi^{(q)}(x)| \le c_q^{'} a_1^k l_k.$$

Простір C_γ^ρ. Нехай ρ та γ — функції, побудовані раніше за послідовностями $\{m_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ та $\{l_n,\, n \in \mathbb{Z}_+\}$ відповідно. Символом C_γ^ρ позначимо сукупність усіх цілих функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які задовольняють умову

$$\exists\, a > 0 \;\exists\, b > 0 \;\exists\, c > 0 \;\forall\, z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by).$$

Зазначимо, що простори C^ρ, C_γ, C_γ^ρ пов'язані між собою співвідношенням: $C_\gamma^\rho = C_\gamma \cap C^\rho$. Звідси випливає, що в C_γ^ρ визначені і є неперервними операції множення на незалежну змінну, диференціювання, зсуву аргументу. Мультиплікатором у просторі C_γ^ρ є кожна ціла функція $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка при довільному $\varepsilon > 0$ задовольняє нерівність

$$|f(z)| \le c_\varepsilon (\gamma(\varepsilon x))^{-1} \rho(\varepsilon y), \;\; z = x + iy \in \mathbb{C},$$

або на $\mathbb{R}$ нерівність

$$|f^{(n)}(x)| \le c_\varepsilon \cdot \varepsilon^n n! \rho_n (\gamma(\varepsilon x))^{-1},$$

$$n \in \mathbb{Z}_+, \;\; x \in \mathbb{R}.$$

Для функції $\varphi \in C_\gamma^\rho$ еквівалентні наступні твердження [1]:

С) $\exists\, a > 0 \quad \exists\, b > 0 \quad \exists\, c > 0 \quad \forall\, z = x + iy$: $|\varphi(z)| \le c\gamma(ax)\rho(by)$;

Д) $\exists\, a_1 > 0 \quad \exists\, b_1 > 0 \quad \exists\, c_1 > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_1 a_1^k b_1^n l_k n! \rho_n.$$

Символами $C^\rho(\mathbb{R})$, $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ позначатимемо сукупності функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину і як функції комплексної змінної є елементами простору C^ρ, C_γ^ρ відповідно. Оскільки $C^\rho(\mathbb{R})$ (відповідно $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$) можна розуміти як сукупність функцій з простору C^ρ (відповідно з простору C_γ^ρ), заданих на $\mathbb{R}$ (звужених на $\mathbb{R}$), то еквівалентними є співвідношення

$$\Big(\varphi(x) \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R}), \;\; x \in \mathbb{R}\Big) \;\; \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big(\varphi(z) \in C^{\rho}_{\gamma},\ \ z = x + iy \in \mathbb{C}\Big),$$

$$\Big(\varphi(x) \in C^{\rho}(\mathbb{R}),\ \ x \in \mathbb{R}\Big) \ \ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big(\varphi(z) \in C^{\rho},\ \ z = x + iy \in \mathbb{C}\Big).$$

Вивчимо тепер властивості перетворення Фур'є функцій з просторів $C^{\rho}(\mathbb{R})$, C_{γ}, $C^{\rho}_{\gamma}(\mathbb{R})$.

І.М. Гельфанд і Г.Є. Шилов у книзі [2] ввели серію просторів, котрі значно узагальнюють клас просторів типу S, а саме, простори S_{a_k}, S^{b_n} та $S^{b_n}_{a_k}$, де $\{a_k,\ k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n,\ n \in \mathbb{Z}_+\}$ — довільні числові послідовності. Елементами цих просторів є нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$ функції, які задовольняють нерівності:

$$S_{a_k}:\ \ \forall\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+\ \exists c_n > 0\ \exists A > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \ |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_n A^k a_k,$$

$$S^{b_n}:\ \ \forall\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+\ \exists c_k > 0\ \exists B > 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \ |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c_k B^n b_n,$$

$$S^{b_n}_{a_k}:\ \ \exists c > 0\ \exists A > 0\ \exists b > 0\ \forall\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$$

$$\forall x \in \mathbb{R}:\ \ |x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c A^k B^n a_k b_n.$$

Крім того, в [2] доведена загальна теорема, за допомогою якої можна охарактеризувати простори типу $F[X]$, елементами яких є Фур'є-образи елементів основного простору X, а саме, *якщо нескінченно диференційовна на $\mathbb{R}$ функція φ задовольняє нерівності*

$$|x^k \varphi^{(n)}(x)| \le c A^k B^n m_{kn},$$

$$\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \ x \in \mathbb{R},$$

де числа $m_{k,n}$ такі, що виконуються умови:

а) $\forall\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$: $\ k_n \dfrac{m_{k-1,n-1}}{m_{kn}} \le \gamma(k+n)^{\theta}$, $0 < \theta \le 1$
(*обмеження на зростання послідовності $m_{k,n}$ знизу*);

б) $\forall\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+\quad \forall\varepsilon > 0\quad \exists\mu_{\varepsilon} > 0$: $\dfrac{m_{k+2,n}}{m_{kn}} \le \mu_{\varepsilon}(1+\varepsilon)^{k+n}$,
(*обмеження на зростання послідовності зверху*);

то тоді перетворення Фур'є $F[\varphi] \equiv \psi$ функції φ задовольняє нерівності:

$$|\sigma^k \psi^{(n)}(\sigma)| \le \tilde{c}\tilde{A}^n \tilde{B}^k m_{nk},$$

$$\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+,\ \ \sigma \in \mathbb{R}.$$

Отже, якщо подвійна послідовність $\{m_{kn}\}_{k,n\in\mathbb{Z}_+}$ задовольняє умови а), б), то $F[X]$ — простір такого ж типу, що і простір X з тією різницею, що обмеження на зростання похідних і спадання основних функцій на нескінченності міняються місцями.

Простір $C^{\rho}(\mathbb{R})$. Із твердження Б) випливає, що простір $C^{\rho}(\mathbb{R})$ збігається з простором S^{b_n}, де $b_n = n!\rho_n$. Отже, у випадку простору $S^{b_n} = C^{\rho}(\mathbb{R})$ маємо, що $m_{kn} = c_k^{'} \cdot b_n$. У книзі [2] доведено, що якщо числа $c_k^{'}$, b_n задовольняють нерівності

$$\frac{c_k^{'}}{c_{k-1}^{'}} \ge c_1 k^{1-\chi},\ \ \frac{b_n}{b_{n-1}} \ge c_2 n^{1-\lambda};$$

$$\chi, \lambda \ge 0,\ \ \chi + \lambda = \theta \le 1,\ \ \{k,n\} \subset \mathbb{N}, \qquad (1)$$

то подвійна послідовність $m_{kn} = c_k^{'} b_n$, $\{k,n\} \subset \mathbb{Z}_+$, задовольняє умову а).

Перевіримо виконання умов (1) для послідовності $\{c_k^{'} b_n\}_{k,n\in\mathbb{Z}_+}$. Послідовність $\{\rho_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ володіє властивістю 4) (див. [1]):

$$\exists\,\alpha > 1:\quad \frac{\rho_{n-1}}{\rho_n} \le \alpha, \quad \forall n \ge 1.$$

Отже, $\rho_n \ge \dfrac{1}{\alpha}\rho_{n-1}$. Тоді

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{n!\rho_n}{(n-1)!\rho_{n-1}} = n\frac{\rho_n}{\rho_{n-1}} \ge$$

$$\ge \frac{1}{\alpha} n = \frac{1}{\alpha} n^{1-\chi}, \quad n \ge 1,$$

де $\chi = 0$. Крім того, зауважимо, що разом зі сталими $c_k^{'}$ нерівності в Б) задовольняють сталі, більші за $c_k^{'}$. Тому, збільшивши сталі $c_k^{'}$ в разі потреби, завжди можна вважати, що

$$\frac{c_k^{'}}{c_k^{'} - 1} \ge c_0 = c_0 k^{1-\lambda}, \quad k \ge 1,$$

де $\lambda = 1$.

Отже, послідовність $\{c_k^{'} b_n\}_{k,n\in\mathbb{Z}_+}$ задовольняє умову а). Перевіримо виконання умови б):

$$\frac{m_{k+2,n}}{m_{kn}} = \frac{c_{k+2}^{'} b_n}{c_k^{'} b_n} = \frac{c_{k+2}^{'}}{c_k^{'}} = c_k^{''},$$

де $c_k^{''}$ — деяка нова стала. Отже, внаслідок загальної теореми дістаємо, що перетворення Фур'є ψ функції φ задовольняє нерівності

$$|\sigma^k \psi^{(n)}(\sigma)| \leq \tilde{c}_n \tilde{B}^k k! \rho_k,$$

$$\{k, n\} \subset \mathbb{Z}_+, \quad \sigma \in \mathbb{R},$$

тобто $F[\varphi] \in S_{b_k}$, при цьому оператор Фур'є F є обмеженим і неперервним.

Зазначимо, що послідовність $\{b_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ задовольняє умови 1)—3), тобто вона є послідовністю типу $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, за якою будувався простір C_γ. Справді, з властивостей 1)—4) послідовності $\{\rho_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що

$$b_k = k!\rho_k \leq \alpha k! \rho_{k+1};$$

$$\exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq k_0 : \quad \alpha < k+1,$$

тобто $b_k < (k+1)k!\rho_{k+1} = b_{k+1}$, $\forall\, k \geq k_0$. Крім того,

$$b_0 = 1, \quad \frac{\sqrt[k]{b_k}}{k} = \frac{(k!)^{1/k}}{k} \sqrt[k]{\rho_k} \to 0, k \to \infty;$$

$$b_{k+1} = (k+1)!\rho_{k+1} = (k+1)k!\rho_{k+1} \leq$$

$$\leq (k+1)k!\rho_k \leq h^k b_k, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+, h > 1.$$

Отже, умови типу 1), 3), які накладаються на послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, послідовність $\{b_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ також задовольняє. Доведемо, що ця послідовність задовольняє умову 2). З цією метою зауважимо, що умова 1), яка накладається на послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ еквівалентна умові $\lim\limits_{|x|\to\infty} \dfrac{\ln \rho(x)}{|x|} = \infty$, тобто

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \quad \forall\, x :$$

$$|x| > \max\{1, \delta\} \Rightarrow \rho(x) > e^{\varepsilon|x|}.$$

Отже,

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c_\varepsilon > 1 \quad \forall\, x :$$

$$|x| > 1 \Rightarrow \rho(x) > c_\varepsilon e^{\varepsilon|x|}.$$

Оскільки $\rho_k = \inf\limits_{|x|>1} \dfrac{\rho(x)}{|x|^k}$, то для $\varepsilon_k = \dfrac{1}{2}\rho_k$ знайдеться $x_k : |x_k| > 1$ таке, що $\dfrac{\rho(x_k)}{|x_k|^k} < \dfrac{3}{2}\rho_k$, або $\rho_k > \dfrac{2}{3}\dfrac{\rho(x_k)}{|x_k|^k}$. Тоді

$$b_k = k!\rho_k > \frac{2}{3} k! \frac{\rho(x_k)}{|x_k|^k} \geq$$

$$\geq \frac{2}{3} k! c_\varepsilon \frac{e^{\varepsilon|x_k|}}{|x_k|^k} \geq \frac{2c_\varepsilon}{3} \frac{k!\varepsilon^k |x_k|^k}{k!|x_k|^k} =$$

$$= \frac{2}{3} c_\varepsilon \varepsilon^k \equiv \tilde{c}_\varepsilon \varepsilon^k, \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+,$$

для довільного $\varepsilon > 0$, тобто умова 2) для послідовності $\{b_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ має місце.

Символом $C_{\gamma*}$ позначимо простір типу C_γ, побудований за функцією

$$\gamma^*(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| \leq 1, \\ \inf\limits_k \dfrac{b_k}{|\sigma|^k}, & |\sigma| > 1, \end{cases}$$

який внаслідок тверджень В) та Г) збігається з простором S_{b_k}. Отже, $F[C^\rho(\mathbb{R})] \subset C_{\gamma*}$, або, що рівносильно, $F[S^{b_n}] \subset S_{b_k}$.

Простір C_γ. Вважатимемо додатково, що послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, за якою будується простір C_γ, задовольняє ще одну умову обмеженого зростання зверху:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mu_\varepsilon > 0 \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}_+ :$$

$$l_{k+2} \leq \mu_\varepsilon (1+\varepsilon)^k l_k. \tag{2}$$

Із твердження Г) випливає, що $C_\gamma = S_{a_k}$, де $a_k = l_k$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Перевіримо виконання умов (1) для послідовності $m_{kq} = l_k c_q^{'}$. Послідовність $\{l_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ є зростаючою, тобто

$$\frac{l_k}{l_{k-1}} \geq \frac{l_{k-1}}{l_{k-1}} = 1 = k^{1-\lambda}, \quad k \geq 1,$$

де $\lambda = 1$. Крім того, завжди можна вважати, що сталі $c_q^{'}$ задовольняють нерівності

$$\frac{c_q^{'}}{c_{q-1}^{'}} \geq c_0 q = c_0 q^{1-\chi}, \quad q \geq 1,$$

де $\chi = 0$. Отже, умова 1) виконується. Оцінимо відношення $\frac{m_{k+2,q}}{m_{kq}}$. Внаслідок (2) маємо, що

$$\frac{m_{k+2,q}}{m_{kq}} = \frac{l_{k+2}c_q^{'}}{l_k c_q^{'}} = \frac{l_{k+2}}{l_k} \le$$

$$\le \mu_\varepsilon (1+\varepsilon)^k, \quad k \in \mathbb{Z}_+,$$

для довільного $\varepsilon > 0$. Таким чином, має місце загальна теорема про перетворення Фур'є, застосувавши яку знайдемо, що

$$|\sigma^k \psi^{(q)}(\sigma)| \le \tilde{c}_k^{'} \tilde{a}^q l_q,$$

$$\psi = F[\varphi], \quad \varphi \in C_\gamma = S_{a_k}.$$

Звідси вже випливає, що $F[\varphi] \in S^{a_n}$. Нехай

$$\rho^*(\sigma) = \begin{cases} 1, & |\sigma| \le 1, \\ \sup\limits_n \dfrac{|\sigma|^n}{l_n}, & |\sigma| > 1. \end{cases}$$

Тоді, внаслідок тверджень А), Б), маємо, що $S^{a_n} = C^{\rho *}(\mathbb{R})$, де $C^{\rho *}$ — простір цілих функцій, побудований за функцією ρ^*. Отже, $F[S_{a_k}] \subset S^{a_n}$ або $F[C_\gamma] \subset C^{\rho^*}(\mathbb{R})$. Звідси, замінивши послідовність $\{a_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ на $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ та застосувавши ще раз перетворення Фур'є, знайдемо, що

$$F[F[S_{b_k}]] \subset F[S^{b_n}] = S_{b_k}.$$

Але $F[F[S_{b_k}]] = S_{b_k}$, тому $F[S^{b_n}] = S_{b_k}$ або $F[C^\rho(\mathbb{R})] = C_{\gamma *}$. Аналогічно встановлюємо, що $F[C_\gamma] = C^{\rho *}(\mathbb{R})$.

Простір $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$. Цей простір, згідно з твердженням Д), збігається з простором $S_{a_k}^{b_n}$. Із попередніх міркувань стосовно послідовностей $\{a_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$, $\{b_n, n \in \mathbb{Z}_+\}$ випливає, що послідовність $m_{kn} = a_k b_n$ задовольняє умови а), б). Отже, внаслідок основної теореми, $F[\varphi] \in S_{b_k}^{a_n} = C_{\gamma *}^{\rho *}(\mathbb{R})$ для довільної функції $\varphi \in S_{a_k}^{b_n} = C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, де ρ^*, γ^* — функції, визначені раніше; при цьому правильним є співвідношення $F[C_\gamma^\rho(\mathbb{R})] = C_{\gamma *}^{\rho *}(\mathbb{R})$, оператор F — обмежений і неперервний.

Зауваження 1. Оскільки $C_\gamma^\rho(\mathbb{R}) = C_\gamma \cap C^\rho(\mathbb{R})$, $C_{\gamma *}^{\rho *}(\mathbb{R}) = C_{\gamma *} \cap C^{\rho *}(\mathbb{R})$, то має місце формула

$$F[C_\gamma \cap C^\rho(\mathbb{R})] = F[C_\gamma] \cap F[C^\rho(\mathbb{R})].$$

Зауваження 2. Із тверджень А), Б) та С), Д) випливає, що якщо $\varphi \in C_\gamma$ або $\varphi \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$, то функція $F[\varphi]$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і $F[\varphi] \in C^{\rho *}$ (відповідно $F[\varphi] \in C_{\gamma *}^{\rho *}$). При цьому еквівалентними є співвідношення

$$(F[\varphi](\sigma) \in C^{\rho *}, \sigma = \xi + i\tau \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (F[\varphi](\xi) \in C^{\rho *}(\mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R});$$

$$(F[\varphi](\sigma) \in C_{\gamma *}^{\rho *}, \sigma = \xi + i\tau \in \mathbb{C}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (F[\varphi](\xi) \in C_{\gamma *}^{\rho *}(\mathbb{R}), \xi \in \mathbb{R}).$$

Приклад. Якщо $m_n = n^{n(1-\beta)}$, $\beta \in (0,1)$, то $\rho(x) \sim \exp\{x^{1/(1-\beta)}\}$, тобто $C^\rho = S^\beta$ (див. [1]). Тоді

$$\rho_n := \inf_{x \ne 0} \frac{\rho(x)}{|x|^n} = \frac{B^n}{n^{n(1-\beta)}} e^{n(1-\beta)},$$

$$B = \frac{1}{(1-\beta)^{1-\beta}}.$$

За доведеним раніше $F[C^\rho] = C_{\gamma *}$, де

$$\gamma^*(\sigma) = \inf_k \frac{b_k}{|\sigma|^k} \equiv \inf_k \frac{k! \rho_k}{|\sigma|^k}, \quad |\sigma| \ge 1.$$

Отже, з урахуванням формули Стірлінга $k! = \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} E_k$, $E_k \to 1$, $k \to \infty$, дістаємо, що

$$\gamma^*(\sigma) = \inf_k \frac{\sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} E_k B^k e^{k(1-\beta)}}{k^{k(1-\beta)} |\sigma|^k} \sim$$

$$\sim c \inf_k \frac{B_1^k k^{k\beta}}{|\sigma|^k}.$$

Із результатів, одержаних у [2], випливає, що $\gamma^*(\sigma) \sim c \exp\{-c_0 |\sigma|^{1/\beta}\}$, тобто $C_{\gamma *} = S_\beta$. Таким чином, формула $F[C^\rho] = C_{\gamma *}$ набуває вигляду $F[S^\beta] = S_\beta$, тобто маємо (див. [2]) відоме вже співвідношення.

2. Оператори диференціювання нескінченного порядку в просторах типу C.

Нехай $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — деяка ціла функція. Говоритимемо, що в просторі C_γ^ρ задано диференціальний оператор нескінченного порядку $f(D) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n D^n$, $D = \dfrac{d}{dz}$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in C_\gamma^\rho$ ряд

$$\psi(z) \equiv (f(D)\varphi)(z) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n((-iD)^n\varphi)(z)$$

зображає деяку основну функцію з простору C_γ^ρ. Нехай γ^*, ρ^* — функції, побудовані у п.1. Має місце наступне твердження.

Теорема. *Якщо ціла функція* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *— мультиплікатор у просторі* $C_{\gamma^*}^{\rho^*}$, *то у просторі* C_γ^ρ *визначений і є неперервним оператор диференціювання нескінченного порядку* $f(D)$.

Доведення. Нехай $\varphi \in C_\gamma^\rho$, $\psi = f(D)\varphi$. Доведемо, що $\psi \in C_\gamma^\rho$. Із властивостей перетворення Фур'є (прямого й оберненого) у просторах типу C та зауваження 2 випливає, що досить показати, що $F[\psi] \in C_{\gamma*}^{\rho*}$. Запишемо (поки що формально) співвідношення

$$F[\psi](\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(-i)^n F[D^n\varphi](\sigma) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n\sigma^n F[\varphi](\sigma) = f(\sigma)F[\varphi](\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Оскільки $F[\varphi] \in C_{\gamma*}^{\rho*}$, а f — мультиплікатор у просторі $C_{\gamma*}^{\rho*}$, то $f \cdot F[\varphi] \in C_{\gamma*}^{\rho*}$. Отже, залишається довести коректність проведених перетворень і обгрунтувати правильність формул (3). Для цього досить встановити, що

$$r_{n,\varphi}(\sigma) := \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k\sigma^k F[\varphi](\sigma) \to 0, n \to \infty,$$

у просторі $C_{\gamma*}^{\rho*}$. Іншими словами, потрібно показати, що:

1) послідовність $\{r_{n,\varphi}; n \geq 1\} \subset C_{\gamma*}^{\rho*}$;

2) ця послідовність рівномірно збігається до нуля в кожній обмеженій області комплексної площини і при цьому мають місце нерівності

$$\exists\, c, a, b > 0 \quad \forall\, n \geq 1 : |r_{n,\varphi}(\sigma)| \leq$$
$$\leq c\gamma^*(a\xi)\rho^*(br), \quad \forall\, \sigma = \xi + i\tau \in \mathbb{C},$$

зі сталими, що не залежать від n.

Коефіцієнти Тейлора c_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, функції f обчислюються за формулою Коші

$$c_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{f(z)}{z^{n+1}}dz,$$

де Γ_R — коло радіуса R з центром у точці $z_0 = 0$. Звідси та з умови теореми (f — мультиплікатор в $C_{\gamma^*}^{\rho^*}$) дістаємо, що

$$|c_n| \leq c_\varepsilon \inf_R \frac{(\gamma^*(\varepsilon R))^{-1}}{R^{n/2}} \cdot \inf_R \frac{\rho^*(\varepsilon R)}{R^{n/2}}.$$

Оцінимо окремо коефіцієнти c_{2k} та c_{2k+1}, $k \in \mathbb{Z}_+$. Отже,

$$|c_{2k}| \leq c_\varepsilon \inf_R \frac{(\gamma^*(\varepsilon R))^{-1}}{R^k} \cdot \inf_R \frac{\rho^*(\varepsilon R)}{R^k} =$$

$$= c_\varepsilon \cdot \varepsilon^{2k} \inf_R \frac{(\gamma^*(\varepsilon R))^{-1}}{(\varepsilon R)^k} \cdot \inf_R \frac{\rho^*(\varepsilon R)}{(\varepsilon R)^k} \equiv$$

$$\equiv c_\varepsilon \cdot \varepsilon^{2k}\gamma_k^*\rho_k^*, \tag{4}$$

де $\gamma_k^* = \inf\limits_{|y|\neq 0} \dfrac{(\gamma^*(y))^{-1}}{|y|^k}$, $\rho_k^* = \inf\limits_{|y|\neq 0} \dfrac{\rho^*(y)}{|y|^k}$.

Аналогічно,

$$|c_{2k+1}| \leq c_\varepsilon \inf_R \frac{(\gamma^*(\varepsilon R))^{-1}}{R^k} \cdot \inf_R \frac{\rho^*(\varepsilon R)}{R^{k+1}} =$$

$$= c_\varepsilon \cdot \varepsilon^{2k+1}\gamma_k^*\rho_{k+1}^* \leq c_\varepsilon \cdot \varepsilon^{2k+1} \cdot \gamma_k^*\rho_k^* \tag{5}$$

(тут враховано, що послідовність $\{\rho_k, k \in \mathbb{Z}_+\}$ монотонно спадна; див. п.1). Далі здійснимо оцінку функції $\alpha_n(\sigma) := \Big|c_n\sigma^n F[\varphi](\sigma)\Big|$, $\sigma \in \mathbb{C}$, при фіксованому $n \in \mathbb{N}$, якщо $n = 2k$ та $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{Z}_+$, врахувавши при цьому нерівності (5) та (4) відповідно.

Нехай $n = 2k$. Оскільки $F[\varphi] \in C_{\gamma^*}^{\rho^*}$, то

$$\exists\, c, a, b > 0 \ \forall\, \sigma = \xi + i\tau \in \mathbb{C}:$$
$$|F[\varphi](\sigma)| \leq c\gamma^*(a\xi)\rho^*(b\tau).$$

Крім того,

$$|\sigma|^{2k} = (\xi^2 + \tau^2)^k \leq \Big(2\max\{\xi^2, \tau^2\}\Big)^k \leq$$

$$\leq 2^k\Big(|\xi|^{2k}+|\tau|^{2k}\Big).$$

Отже,

$$\alpha_{2k}(\sigma)\leq$$

$$\leq cc_\varepsilon 2^k\varepsilon^{2k+1}\gamma_k^*\rho_k^*(|\xi|^{2k}+|\tau|^{2k})\gamma^*(a\xi)\rho^*(b\tau)=$$

$$=cc_\varepsilon 2^k\varepsilon^{2k+1}\Big(\gamma_k^*\rho_k^*|\xi|^{2k}\gamma^*(a\xi)\rho^*(b\tau)+$$

$$+\gamma_k^*\rho_k^*|\tau|^{2k}\gamma^*(a\xi)\rho^*(b\tau)\Big)\equiv$$

$$\equiv cc_\varepsilon 2^k\varepsilon^{2k+1}\Big(\gamma_k^{'}(\sigma)+\gamma_k^{''}(\sigma)\Big).$$

Із означення γ_k^*,ρ_k^* випливають нерівності:

$$|\xi|^k\gamma_k^*=|\xi|^k\inf_{\xi\neq 0}\frac{(\gamma^*(\xi))^{-1}}{|\xi|^k}=$$

$$=\varepsilon_0^{-k}|\varepsilon_0\xi|^k\inf_{\xi\neq 0}\frac{(\gamma^*(\varepsilon_0\xi))^{-1}}{|\varepsilon_0\xi|^k}\leq$$

$$\leq\varepsilon_0^{-k}|\varepsilon_0\xi|^k\cdot\frac{(\gamma^*(\varepsilon_0\xi))^{-1}}{|\varepsilon_0\xi|^k}=$$

$$=\varepsilon_0^{-k}(\gamma^*(\varepsilon_0\xi))^{-1},\ \ \varepsilon_0>0,\ \xi\neq 0,\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+;$$

$$|\xi|^k\rho_k^*=|\xi|^k\inf_{\xi\neq 0}\frac{\rho^*(\xi)}{|\xi|^k}=$$

$$=\varepsilon_1^{-k}|\varepsilon_1\xi|^k\inf_{\xi\neq 0}\frac{\rho^*(\varepsilon_1\xi)}{|\varepsilon_1\xi|^k}\leq$$

$$\leq\varepsilon_1^{-k}\rho^*(\varepsilon_1\xi),\ \ \varepsilon_1>0,\ \xi\neq 0,\ \forall\, k\in\mathbb{Z}_+.$$

Нехай $\varepsilon_0\in(0,a)$. Доведемо, що

$$\exists\, c_1>0\ \exists\, a_1>0\ \forall\,\xi\in\mathbb{R}:$$

$$\frac{\gamma^*(a\xi)}{\gamma^*(\varepsilon_0\xi)}\leq c_1\gamma^*(a_1\xi).$$

Оскільки

$$\gamma^*(\xi)=\inf_k\frac{b_k}{|\xi|^k}=\frac{1}{\sup\limits_k\dfrac{|\xi|^k}{b_k}},\ \ |\xi|\geq 1,$$

то

$$\sup_k\frac{|\varepsilon_0\xi|^k}{b_k}=\frac{1}{\gamma^*(\varepsilon_0\xi)},\quad |\xi|\geq\frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Отже, для довільного $\nu_0>0$ знайдемо номер $k_0=k_0(\nu_0,\xi)$ такий, що

$$\frac{|\varepsilon_0\xi|^{k_0}}{b_{k_0}}>\frac{1}{\gamma^*(\varepsilon_0\xi)}-\nu_0,\quad |\xi|\geq\frac{1}{\varepsilon_0},$$

тобто,

$$\frac{1}{\gamma^*(\varepsilon_0\xi)}<\frac{|\varepsilon_0\xi|^{k_0}}{b_{k_0}}+\nu_0,\quad |\xi|\geq\frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Крім того, $\gamma^*(a\xi)\leq\dfrac{b_k}{|a\xi|^k}$, $\forall\, k\in\mathbb{Z}_+$, $|\xi|\geq\dfrac{1}{a}$. Отже,

$$\frac{\gamma^*(a\xi)}{\gamma^*(\varepsilon_0\xi)}\leq\frac{b_k}{|a\xi|^k}\Big(\frac{|\varepsilon_0\xi|^{k_0}}{b_{k_0}}+\nu_0\Big)=$$

$$=\frac{b_k|\varepsilon_0\xi|^{k_0}}{b_{k_0}|a\xi|^k}+\nu_0\frac{b_k}{|a\xi|^k},\ \ \forall k\in\mathbb{Z}_+,\ |\xi|\geq\frac{1}{\varepsilon_0}.$$

Тоді

$$\frac{\gamma^*(a\xi)}{\gamma^*(\varepsilon_0\xi)}\leq\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\Big\{\frac{b_k|\varepsilon_0\xi|^{k_0}}{b_{k_0}|a\xi|^k}\Big\}+\nu_0\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\frac{b_k}{|a\xi|^k}=$$

$$=\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\Big\{\frac{b_k|\varepsilon_0\xi|^{k_0}}{b_{k_0}|a\xi|^k}\Big\}+\varepsilon_0\gamma^*(a\xi).$$

Оскільки

$$\inf_{k\in\mathbb{Z}_+}\Big\{\frac{b_k|\varepsilon_0\xi|^{k_0}}{|a\xi|^k b_{k_0}}\Big\}\leq\inf_{k\geq k_0}\Big\{\frac{b_k|\varepsilon_0\xi|^{k_0}}{b_{k_0}|a\xi|^k}\Big\},$$

то вважатимемо, що $k\geq k_0$. Нехай $\varepsilon_0<\min\{1,a\}$. Тоді

$$\frac{b_k|\varepsilon_0\xi|^{k_0}}{b_{k_0}|a\xi|^k}=\frac{b_k}{\Big|\dfrac{a}{\varepsilon_0}\xi\Big|^{k_0}\cdot|a\xi|^{k-k_0}b_{k_0}}\leq$$

$$\leq\frac{\varepsilon_0^{k_0}b_k}{|a\xi|^{k-k_0}b_{k_0}}<\frac{\omega^{k_0}b_k}{|a\xi|^{k-k_0}b_{k_0}},$$

$$\omega=\begin{cases}1, & a\leq 1,\\ a, & a>1\end{cases}$$

(тут враховано, що $\Big|\dfrac{a}{\varepsilon_0}\xi\Big|>|\xi|>\dfrac{1}{\varepsilon_0}$). Оцінимо вираз $\inf\limits_{k\geq k_0}\dfrac{b_k}{|a\xi|^{k-k_0}b_{k_0}}=\inf\limits_{p\in\mathbb{Z}_+}\dfrac{b_{p+k_0}}{b_{k_0}|a\xi|^p}$.

Послідовність $\{b_p=p!\rho_p,\ p\in\mathbb{Z}_+\}$ володіє властивостями 2), 3) (див. п.1), тобто

$$\exists\, c>0\ \exists\, M>1:\ b_{p+k_0}\leq cM^{k_0+p-1}b_{k_0+p-1}=$$

$$=CM^{k_0}M^{p-1}b_{k_0+p-1},\ \forall\, p\geq 1;$$

$$\forall\, h>0\ \exists c_h>0:\ \ b_{k_0}\geq c_h\cdot h^{k_0}.$$

Візьмемо h таке, щоб виконувалась нерівність $\dfrac{C(M\omega)^{k_0}}{h} \le 1$. Тоді

$$\frac{\omega^{k_0} b_{p+k_0}}{b_{k_0}} \le \frac{c}{c_h} \frac{(\omega M)^{k_0} \cdot M^{p-1}}{h^{k_0}} b_{k_0+p-1} \le$$

$$\le \frac{M^{p-1}}{c_h h^{k_0-1}} b_{k_0+p-1},$$

$$b_{k_0+p-1} \le cM^{k_0+p-2} b_{k_0+p-2},$$

тобто

$$\frac{\omega^{k_0} b_{p+k_0}}{b_{k_0}} \le \frac{cM^{p-1}}{c_h h^{k_0-1}} (\omega M)^{k_0} M^{p-2} b_{k_0+p-2} \le$$

$$\le \frac{M^{p-1} M^{p-2}}{c_h h^{k_0-2}} b_{k_0+p-2}$$

і т.д. Остаточно отримаємо нерівності

$$\frac{\omega^{k_0} b_{p+k_0}}{b_{k_0}} \le \frac{\omega^{k_0}}{c_h} M^{p-1} M^{p-2} M^{p-3} \ldots M^{p-k_0} b_p \le$$

$$\le \frac{1}{c_h} (\omega M)^{k_0 p - (1+2+\ldots+k_0)} b_p \le$$

$$\le \frac{1}{c_h} \frac{(h/c)^p}{(h/c)^{(1+2+\ldots+k_0)/k_0}} b_p \le$$

$$\le \frac{1}{c_h} \frac{(h/c)^p}{h/c} b_p = \frac{c}{hc_h} \Big(\frac{h}{c}\Big)^p b_p, \quad \forall p \in \mathbb{Z}_+$$

(тут враховано, що $h/c \ge 1$). Отже,

$$\omega^{k_0} \cdot \inf_{k \ge k_0} \frac{b_n}{b_{k_0} |a\xi|^{n-n_0}} \le \tilde{c} \inf_{p \in \mathbb{Z}_+} \frac{\tilde{h}^p b_p}{|a\xi|^p} =$$

$$= \tilde{c} \inf_{p \in \mathbb{Z}_+} \frac{b_p}{\left|\dfrac{a}{\tilde{h}^p} \xi\right|^p},$$

де $\tilde{c} = \dfrac{c}{hc_h}$, $\tilde{h} = \dfrac{h}{c}$. Звідси дістаємо нерівності

$$\frac{\gamma^*(a\xi)}{\gamma^*(\varepsilon_0 \xi)} \le \tilde{c} \gamma^* \Big(\frac{a}{\tilde{h}} \xi\Big) + \nu_0 \gamma^*(a\xi) \le c_0 \gamma^*(a_1 \xi),$$

де $c_0 = \tilde{c} + \nu_0$, $a_1 = \min\Big\{\dfrac{a}{\bar{\tilde{h}}}, a\Big\}$. Далі вважатимемо, що $\varepsilon_0 < \min\{1, a_1\}$, $a_1 \le a$. Оскільки $\dfrac{1}{\varepsilon_0} > \dfrac{1}{a_1}$, $\dfrac{1}{\varepsilon_0} > \dfrac{1}{a}$, то остання нерівність правильна для ξ: $|\xi| \ge \dfrac{1}{\varepsilon_0}$. Якщо ж $|\xi| < \dfrac{1}{\varepsilon_0}$, то $\gamma^*(\varepsilon_0 \xi) = \gamma^*(a\xi) = \gamma^*(a_1 \xi) = 1$. Отже, для всіх $\xi \in \mathbb{R}$ має місце нерівність $\dfrac{\gamma^*(a\xi)}{\gamma^*(\varepsilon_0 \xi)} \le c_1 \gamma^*(a_1 \xi)$, де $c_1 = \max\{1, c_0\}$.

Далі, аналогічно попередньому, доводимо, що

$$\exists\, c_2 > 0\ \exists\, a_2 > 0\ \forall\, \xi \in \mathbb{R} :$$

$$\rho^*(\varepsilon_1 \xi) \gamma^*(a_1 \xi) \le c_2 \gamma^*(a_2 \xi), \quad \varepsilon_1 \in (0, a_1).$$

Отже,

$$\gamma_k'(\sigma) \le c_1 c_2 (\varepsilon_0 \varepsilon_1)^{-k} \gamma^*(a_2 \xi) \rho^*(b\tau),$$

$$k \in \mathbb{Z}_+, \quad \sigma \in \mathbb{C},$$

причому сталі $c_1, c_2, \varepsilon_0, \varepsilon_1, a_2, b$ не залежать від k. Аналогічно оцінюємо $\gamma_k''(\sigma)$:

$$\gamma_k''(\sigma) \le c_3 \varepsilon_3^{-k} \gamma^*(a\xi) \rho^*(b_1 \tau), \ \ \sigma \in \mathbb{C}, \ \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

причому сталі $c_3, \varepsilon_3, a, b_1$ також не залежать від k. Таким чином, маємо нерівність

$$\alpha_{2k}(\sigma) \le \nu_0 b_0^k \varepsilon^{2k} \gamma^*(\tilde{a}\xi) \rho^*(\tilde{b}\tau),$$

$$\sigma \in \mathbb{C}, \ \ k \in \mathbb{Z}_+,$$

де $\nu_0 = cc_\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot \max\{c_1 c_2, c_3\}$, $b_0 = 2\max\Big\{\dfrac{1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}, \dfrac{1}{\varepsilon_3}\Big\}$, $\tilde{a} = \min\{a, a_2\}$, $\tilde{b} = \max\{b, b_1\}$. Вираз $\alpha_{2k+1}(\sigma)$, $\sigma \in \mathbb{C}$ оцінюємо подібним чином. У результаті дістаємо, що

$$\alpha_n(\sigma) \le \nu_1 \sqrt{d}^{\,k} \varepsilon^k \gamma^*(\tilde{\tilde{a}}\,\xi) \rho^*(\tilde{\tilde{b}}\,\tau);$$

$$d > 0, \quad \tilde{\tilde{a}} > 0, \quad \tilde{\tilde{b}} > 0, \quad \nu_1 > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

причому всі сталі не залежать від n. Отже,

$$|r_{n,\varphi}(\sigma)| \le \nu_1 \sum_{k=n+1}^{\infty} (\sqrt{d}\,\varepsilon)^k \gamma^*(\tilde{\tilde{a}}\,\xi) \rho^*(\tilde{\tilde{b}}\,\tau).$$

Візьмемо $\varepsilon = (2\sqrt{d})^{-1}$. Тоді $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty} (\sqrt{d}\,\varepsilon)^k = \frac{1}{2^n}$, тобто

$$|r_{n,\varphi}(\sigma)| \le \frac{\nu_1}{2^n} \gamma^*(\tilde{\tilde{a}}\,\xi) \rho^*(\tilde{\tilde{b}}\,\tau) \le$$

$$\le \nu_1 \gamma^*(\tilde{\tilde{a}}\,\xi) \rho^*(\tilde{\tilde{b}}\,\tau). \tag{6}$$

Із (6) випливає, що $r_{n,\varphi} \in C_{\gamma^*}^{\rho^*}$ при кожному $n \in \mathbb{N}$ (тобто умова 1) виконується).Із (6) випливає також, що послідовність $\{r_{n,\varphi}; n \geq 1\}$ збігається до нуля при $n \to \infty$ рівномірно в будь-якій обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$, тобто послідовність $\{r_{n,\varphi}; n \geq 1\}$ збігається в просторі $C_{\gamma^*}^{\rho^*}$.

Цим доведено, що в C_γ^ρ оператор $f(D)$ визначений, причому кожну обмежену множину цього простору він переводить в обмежену множину цього ж простору. Отже, оператор $f(D)$ є обмеженим у просторі C_γ^ρ, а значить, і неперервним у цьому просторі.

Наслідок. *Нехай A_f — звуження оператора $f(D)$ на $C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$. Тоді для довільної функції $\varphi \in C_\gamma^\rho(\mathbb{R})$ правильною є рівність*

$$(A_f\varphi)(x) = F^{-1}[f(\xi)F[\varphi](\xi)](x), \ \ \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}.$$

Доведення випливає із співвідношення (3) при $\sigma = \xi \in \mathbb{R}$, якщо до нього застосувати обернене перетворення Фур'є.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Городецький В.В., Колісник Р.С.* Про одне узагальнення просторів типу W // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 134. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С. 30–37.

2. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций.— М.: Физматгиз, 1953.— 307 с.

3. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. М.: Физматгиз, 1958.— 274 с.

Стаття надійшла до редколегії 19.11.2002