УДК 517.51

©2003 р. **В.Г.Герасимчук, В.К.Маслюченко**

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ДО ПИТАННЯ ПРО РОЗРИВИ НАРІЗНО ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Доведено загальну теорему про точки розриву відображень $f : X \times Y \to Z$, які квазінеперервні відносно першої змінної і ліпшицеві в кожній точці відносно другої змінної, і з допомогою цієї теореми показано, що множина точок розриву кожної нарізно диференційовної функції $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^n$ і на кожній гіперплощині $x_i = const$.

The common theorem about the points of discontinuity of mappings $f : X \times Y \to Z$ which are quasicontinuous with respect to the first variable and have the Lipschitz property at every point with respect to the second variable is given. It is shown that the set of discontinuity of every separately differentiable function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is nowhere dense in $\mathbb{R}^n$ and on every hiperplane $x_i = const$.

1. У праці [1] вивчалися різноманітні властивості множини точок розриву $D(f)$ нарізно диференційовних f функцій двох змінних. Отримані там результати для нарізно диференційовних функцій були наслідком загальних теорем, в яких використовувалися різні умови Ліпшиця. Зокрема, було дано повний опис множин точок розриву нарізно неперервно диференційовних функцій $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Після цього природно постало питання про розширення цих результатів на випадок функцій n змінних. У даній статті зроблено перші кроки в цьому напрямку.

Так, з теореми 2 з [1] випливає: якщо X – берівський простір, Y і Z – метричні простори і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке неперервне відносно першої змінної і ліпшицеве в кожній точці відносно другої змінної, то для кожного $y \in Y$ множина $D_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in D(f)\}$ ніде не щільна в X. З точки зору можливих застосувань до функцій багатьох змінних важливо було з'ясувати, чи можна в цьому твердженні неперервність замінити на квазінеперервність. На жаль, таке узагальнення не правильне. Досить взяти квазінеперервну функцію $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ з усюди щільною множиною точок розриву й розглянути відображення $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, для якого $f(x, y) = g(x)$. Тут ми показуємо (теорема 1), що результат все ж залишиться правильним, якщо додатково вимагати ніде не щільність множин $D(f_y)$ для кожного $y \in Y$. З цього результату індукцією виводимо (теорема 2), що для кожної функції $z = f(x_1, ..., x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, яка неперервна відносно першої змінної й диференційовна відносно кожної іншої змінної, множина $D(f)$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^n$ і для кожного $x_n \in \mathbb{R}$ множина $D_{x_n}(f)$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^{n-1}$. Далі ми виявляємо цікаве явище розмивання розривів по вертикалях для функцій, які квазінеперервні відносно першої зміної і ліпшицеві відносно другої (теорема 3).

В теоремі 3 з [1] встановлюється: якщо X – берівський простір, Y, Z – метричні простори і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке неперервне відносно першої змінної і ліпшицеве відносно другої, то проекція $pr_X(D(f))$ ніде не щільна в X. Виявляється, що в цьому твердженні неперервність не можна замінити на квазінеперервність, навіть коли додати умову ніде не щільності множин $D(f_y)$. Ми наводимо приклад функції $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка квазінеперервна відносно першої змінної, нескінченно диференційовна і ліпшицева з однією й тією ж константою відносно другої, причому всі множини $D(f_y)$ скінченні, а проекція множини $D(f)$ на вісь абсцис щільна на відрізку [0;1]. Більше того, ми конструюємо нарізно нескінченно диференційовну функцію $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, для якої $pr_{xy}(D(f)) = [0; 1]^2$.

2. Нехай X і Y – топологічні простори і $f : X \to Y$ – відображення. Символами $C(f)$ і $D(f)$ позначаються відповідно множини точок непервності й розриву відображення f. Відображення f називається *квазінеперервним у точці* $x_0 \in X$, якщо для кожного околу V точки $y_0 = f(x_0)$ в Y і для кожного околу U точки x_0 в X існує точка $x_1 \in U$ і її окіл U_1 в X такі, що $U_1 \subseteq U$ і $f(U_1) \subseteq V$. Якщо f квазінеперервне в кожній точці $x \in X$, то f називається *квазінеперервним.* Відомо, що відображення f буде квазінеперервним тоді й тільки тоді, коли для кожної відкритої в X множини G і для кожної множини $A \subseteq X$ з умови $G \subseteq \overline{A}$ випливає, що $f(G) \subseteq \overline{f(A)}$.

Відстань між точками t_1 і t_2 метричного простору T ми позначаємо символом $|t_1 - t_2|_T$.

Нехай X – топологічний простір, Y – метричний простір, $f : X \to Y$ – відображення, $E \subseteq X$, $x_0 \in X$ і $\mathcal{U}_{x_0}$ – система всіх околів точки x_0 в просторі X. Числа

$$\omega_f(E) = \sup_{x_1,x_2 \in X} |f(x_1) - f(x_2)|_Y,$$

$$\omega_{f,x_0}(E) = \sup_{x \in E} |f(x) - f(x_0)|_Y,$$

$$\omega_f(x_0) = \inf_{U \in \mathcal{U}_{x_0}} \omega_f(U) \quad \text{і}$$

$$\tilde{\omega}_f(x_0) = \inf_{U \in \mathcal{U}_{\S,}} \omega_{f,x_0}(U)$$

називаються відповідно *коливанням* чи *прив'язаним коливанням* функції f на множині E чи в точці x_0. Відображення f буде неперервним у точці x_0 тоді й тільки тоді, коли $\omega_f(x_0) = 0$ чи $\tilde{\omega}_f(x_0) = 0$.

Нехай X і Y – метричні простори. Відображення $f : X \to Y$ називається *ліпшицевим у точці* $x_0 \in X$, якщо існують окіл U точки x_0 в X і число $\gamma > 0$ такі, що $|f(x) - f(x_0)|_Y \le \gamma |x - x_0|_X$, як тільки $x \in U$. Кажуть, що f *ліпшицеве*, якщо існує така константа $\gamma > 0$, що для всіх $x_1, x_2 \in X$ виконується нерівність

$$|f(x_1) - f(x_2)|_Y \le \gamma |x_1 - x_2|_X.$$

Топологічний простір X називається *берівським*, якщо кожна непорожня відкрита в X множина є множиною другої категорії в X. Простір X буде берівським тоді й тільки тоді, коли для кожної послідовності замкнених множин F_n, яка покриває простір X, множина

$$G = \bigcup_{n=1}^{\infty} int F_n$$

всюди щільна в X.

Як звичайно, для відображення $f : X \times Y \to Z$ і точки $p = (x, y) \in X \times Y$ ми покладемо $f^x(y) = f_y(x) = f(p)$.

Теорема 1. Нехай X – берівський простір, Y і Z – метричні простори, $f : X \times Y \to Z$ – відображення, квазінеперервне відносно першої змінної і ліпшицеве в кожній точці відносно другої змінної, причому для кожного $y \in Y$ множина $D(f_y)$ ніде не щільна в X. Тоді для кожного $y \in Y$ множина $D_y(f) = \{x \in X : (x, y) \in D(f)\}$ ніде не щільна в X.

Доведення. Зафіксуємо якусь точку $y_0 \in Y$ і доведемо, що $D_{y_0}(f)$ ніде не щільна в X. Нехай H_0 – відкрита непорожня множина в X. Оскільки множина $D(f_{y_0})$ ніде не щільна в X, то існує відкрита в X непорожня множина H, така, що $H \subseteq H_0$ і $H \bigcap D(f_{y_0}) = \emptyset$. Для довільного номера n покладемо

$$A_n = \{x \in X : (\forall y \in Y)(|y - y_0|_Y \le 1/n \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow |f(x, y) - f(x, y_0)|_Z \le n|y - y_0|_Y)\}.$$

Оскільки для кожного $x \in X$ функція $f^x : Y \to Z$ ліпшицева в точці y_0, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Нехай $U_n = \mathrm{int}\overline{A_n}$ і $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. З беровості простору X випливає, що відкрита множина G всюди щільна в X. В такому разі множина $G_0 = G \bigcap H$ відкрита й непорожня, причому $G_0 \subseteq H_0$.

Доведемо, що $G_0 \bigcap D_{y_0}(f) = \emptyset$. Нехай $x_0 \in G_0$. Тоді існує такий номер n, що $x_0 \in U_n$. Оскільки $H \subseteq C(f_{y_0})$ і $x_0 \in H$, то $x_0 \in C(f_{y_0})$. Візьмемо довільне додатне число ε. З неперервності відображення $f_{y_0}: X \to Z$ в точці x_0 і відкритості множини U_n випливає, що існує такий відкритий окіл U точки x_0 в X, що $U \subseteq U_n$ і $\omega_{f_{y_0}}(U) \le \varepsilon/2$. Нехай $A = U \bigcap A_n$. Оскільки $U \subseteq \overline{A_n}$ і множина U відкрита, то $U \subseteq \overline{A}$. Нехай $\delta = \min\{\varepsilon/2n, 1/n\}$ і V – відкрита куля в просторі Y з центром у точці y_0 і радіусом δ. Множина $O = U \times V$ є околом точки $p_0 = (x_0, y_0)$ в добутку $X \times Y$. Покажемо, що $\omega_{f,p_0}(O) \le \varepsilon$. Позначимо через W замкнену кулю в просторі Z з центром у точці $z_0 = f(p_0)$ і радіусом ε. Нехай $(x, y) \in A \times V$. Тоді $x \in A_n$, $x \in U$ і

$$|y - y_0|_Y \le \delta \le 1/n.$$

У такому разі

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)|_Z \le |f(x,y) - f(x,y_0)|_Z +$$
$$+|f(x,y_0) - f(x_0,y_0)|_Z \le$$
$$\le n|y - y_0|_Y + \omega_{f_{y_0}}(U \le n\delta + \varepsilon/2 \le$$
$$\le n\varepsilon/2n + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким чином, $f(A \times V) \subseteq W$, тобто $f_y(A) \subseteq W$ для довільного $y \in Y$. Тепер із квазінеперервності відображень f_y випливає, що

$$f_y(U) \subseteq \overline{f_y(A)} \subseteq \overline{W} = W,$$

як тільки $y \in V$. Отже, $f(O) \subseteq W$, а значить, $\omega_{f,p_0}(O) \le \varepsilon$. Звідси випливає, що $\tilde{\omega}_f(p_0) = 0$, отже, $p_0 \in C(f)$, а тому $x_0 \notin D_{y_0}(f)$. Тим самим показано, що множина $D_{y_0}(f)$ ніде не щільна в X.

3. Застосуємо тепер теорему 1 до дослідження величини множини точок розриву нарізно диференційовної функції n змінних.

Теорема 2. Нехай X – берівський простір, $P_m = \prod\limits_{i=1}^{m}(a_i, b_i)$ – відкритий паралелепіпед в $\mathbb{R}^m$, $z = f(x, x_1, ..., x_n) : X \times P_n \to \mathbb{R}$ – функція, яка неперервна відносно першої змінної x і диференційовна відносно кожної з решти змінних $x_1, ..., x_n$ зокрема. Тоді множина $D(f)$ ніде не щільна в $X \times P_n$ і для кожного $x_n \in (a_n, b_n)$ множина

$$D_{x_n}(f) = \{(x, x_1, ..., x_{n-1}) \in X \times P_{n-1} :$$
$$(x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n) \in D(f)\}$$

ніде не щільна в $X \times P_{n-1}$.

Доведення. Застосуємо індукцію відносно n. При $n = 1$ твердження теореми випливає з теорем 1 і 2 статті [1]. Нехай $n \ge 2$ і твердження теореми правильне для функцій $f : X \times P_{n-1} \to \mathbb{R}$. Доведемо, що теорема буде справедлива й для функцій $f : X \times P_n \to \mathbb{R}$. Зауважимо, що функція f, очевидно, нарізно неперервна. °ї частинна похідна $f_{,n} = \frac{\partial f}{\partial x_n}$ є поточковою границею послідовності функцій $g_m : X \times P_n \to \mathbb{R}$,

$$g_m(x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n) =$$
$$= m(f(x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n + \frac{b_n - x_n}{2m})-$$
$$-f(x, x_1, ..., x_n)),$$

які також нарізно неперервні. Оскільки добуток $X \times P_{n-1}$ берівський [2,теорема 4], то функції g_m квазінеперервні [3, теорема 6], отже, $D(f_{,n})$ є множиною першої категорії ([4,5.1.1] або [3, наслідок 3]). Тоді множина $C(f_{,n})$ буде залишковою в добутку $X \times P_n$, а значить, і всюди щільною в ньому, адже цей добуток берівський.

Покажемо, що множина $D(f)$ ніде не щільна в $X \times P_n$. Нехай G – відкрита непорожня множина в $X \times P_n$. Оскільки $\overline{C(f_{,n})} = X \times P_n$, то $G \bigcap C(f_{,n}) \ne O$, отже, існує точка

$$p_0 = (x^0, x_1^0, ..., x_n^0) \in G \bigcap C(f_{,n}).$$

З неперервності похідної $f_{,n}$ у точці p_0 випливає її локальна обмеженість у цій точці. Отже, існує відкритий окіл U точки x^0 у просторі X, δ-околи U_i точок x_i^0 при $i = 1, ..., n$ і константа γ такі, що

$$V = U \times U_1 \times ... \times U_n \subseteq G$$

і $|f_{,n}(p)| \le \gamma$ для кожного $p \in V$. Зафіксуємо точку $(x_1, ..., x_{n-1}) \in U_1 \times ... \times U_{n-1}$ і розглянемо на добутку $Q = U \times U_n$ функцію

$$g(x, x_n) = f(x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n).$$

Зрозуміло, що g неперервна відносно першої змінної й задовольняє умову Ліпшиця відносно другої змінної з однією й тією ж константою γ. Тому [1, лема 3] функція g неперервна.

Нехай $q = (x_1, x_n) \in Q$ і

$$h(q, x_1, ..., x_{n-1}) = f(x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n).$$

Зрозуміло, що функція h неперервна відносно першої змінної q і нарізно диференційовна відносно решти змінних на добутку $Q \times U_1 \times ... \times U_{n-1}$. Оскільки простір Q берівський, то за індуктивним припущенням множина $D(h)$ ніде не щільна в добутку $Q \times U_1 \times ... \times U_{n-1} = V$. Тоді і множина $D(f\ |_V)$ ніде не щільна у відкритій множині V добутку $X \times P_n$, отже, існує відкрита непорожня множина H в $X \times P_n$ така, що $H \subseteq V$ і $H \bigcap D(f\ |_V) = \emptyset$. У такому разі,

$$H \subseteq V \bigcap C(f\ |_V) \subseteq G \bigcap C(f),$$

отже, $H \subseteq G$ і $H \bigcap D(f) = \emptyset$. Таким чином, множина $D(f)$ ніде не щільна в $X \times P_n$.

Щоб довести друге твердження, зафіксуємо $x_n \in (a_n, b_n)$. Функція

$$f_{x_n}(x, x_1, ..., x_{n-1}) = f(x, x_1, ..., x_{n-1}, x_n)$$

неперервна відносно змінної x і нарізно диференційовна відносно інших змінних $x_1, ..., x_{n-1}$. За індуктивним припушенням, множина $D(f_{x_n})$ ніде не щільна в $X \times P_{n-1}$. Крім того, функція f_{x_n} квазінеперервна й простір $X \times P_{n-1}$ берівський. Оскільки функція f диференційовна відносно x_n, то вона є і ліпшицевою в кожній точці відносно цієї змінної. Тому за теоремою 1 множина $D_{x_n}(f)$ ніде не щільна в $X \times P_{n-1}$.

Наслідок. Нехай $n \geq 2$ і функція $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ неперервна відносно першої змінної й нарізно диференційовна відносно решти змінних. Тоді множина $D(f)$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^n$ і для кожного $x_n \in \mathbb{R}$ множина $D_{x_n}(f)$ ніде не щільна в $\mathbb{R}^{n-1}$.

4. Перейдемо тепер до встановлення явища розмивання розривів по вертикалях.

Теорема 3. Нехай X – берівський простір, Y і Z – метричні простори і $f : X \times Y \to Z$ – відображення, яке квазінеперервне відносно першої змінної і ліпшицеве відносно другої змінної. Тоді існує відкрита всюди щільна множина G в X така, що для кожної точки $(x_0, y_0) \in X \times Y$, для якої $x_0 \in D(f_{y_0}) \bigcap G$, існує такий окіл V точки y_0 в Y, що $x_0 \in D(f_y)$ для кожного $y \in V$.

Доведення. Для кожного номера n покладемо

$$A_n = \{x \in X : (\forall y_1, y_2 \in Y)(|f(x, y_1)-$$
$$-f(x, y_2)|_Z \leq n|y_1 - y_2|_Y)\}.$$

Оскільки для кожного $x \in X$ відображення $f^x : Y \to Z$ ліпшицеве, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = X$. Нехай $U_n = \mathrm{int}\overline{A_n}$ і $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} U_n$. З беровості X випливає, що відкрита множина G всюди щільна в X.

Покажемо, що множина G шукана. Нехай $(x_0, y_0) \in X \times Y$ і $x_0 \in D(f_{y_0}) \bigcap G$. Візьмемо $\varepsilon > 0$ так, що $\omega_{f_{y_0}}(x_0) > \varepsilon$. Оскільки $x_0 \in G$, то існує такий номер m, що $x_0 \in U_m$. Покладемо $\delta = \varepsilon/8m$ і

$$V = \{y \in Y : |y - y_0|_Y < \delta\}.$$

Нехай $y \in V$. Доведемо, що $x_0 \in D(f_y)$. Розглянемо довільний відкритий окіл U точки x_0 в X. Тоді й перетин $U_0 = U \bigcap U_m$ є відкритим околом точки x_0 в X. Оскільки $\omega_{f_{y_0}}(U_0) \geq \omega_{f_{y_0}}(x_0) > \varepsilon$, то існують такі точки x_1 і $x_2 \in U_0$, що

$$|f_{y_0}(x_1) - f_{y_0}(x_2)|_Z > \varepsilon.$$

З квазінеперервності відображення f_{y_0} в точках x_1 і X_2 випливає, що існують такі відкриті непорожні множини G_1 і G_2 в X, що $G_1 \bigcup G_2 \subseteq U_0$ і $\omega_{f_{y_0, x_i}}(G_i) < \varepsilon/4$ при $i = 1, 2$. Нехай $A = A_m \bigcap U_0$. Ясно, що $U_0 \subseteq \overline{A}$. Тому існують точки a_1 і a_2 такі, що $a_i \in A \bigcap G_i$ при $i = 1, 2$. Тоді

$$|f_y(a_1) - f_y(a_2)|_Z \geq |f_{y_0}(a_1) - f_{y_0}(a_2)|_Z -$$
$$-|f_y(a_1) - f_{y_0}(a_1)|_Z - |f_y(a_2) - f_{y_0}(a_2)|_Z \geq$$
$$\geq |f_{y_0}(a_1) - f_{y_0}(a_2)|_Z - 2m|y - y_0|_Y >$$
$$> |f_{y_0}(a_1) - f_{y_0}(a_2)|_Z - 2m\delta =$$
$$= |f_{y_0}(a_1) - f_{y_0}(a_2)|_Z - \varepsilon/4 \geq$$

$$\geq |f_{y_0}(x_1) - f_{y_0}(x_2)|_Z -$$
$$-|f_{y_0}(x_1) - f_{y_0}(a_1)|_Z -$$
$$-|f_{y_0}(x_2) - f_{y_0}(a_2)|_Z - \varepsilon/4 >$$
$$> \varepsilon - 3\varepsilon/4 = \varepsilon/4.$$

Отже, $\omega_{f_y}(U) > \varepsilon/4$, бо a_1 і $a_2 \in U$. Звідки випливає, що $\omega_{f_y}(x_0) \geq \varepsilon/4$, отже $x_0 \in D(f_y)$.

Покажемо тепер, що умову неперервності відносно першої змінної в теоремі 3 з [1] не можна замінити на квазінеперервність навіть, якщо вимагати, що всі множини $D(f_y)$ ніде не щільні.

Нагадаємо, що сім'я $(A_s)_{s\in S}$ підмножин A_s топологічного простору X називається *дискретною на множині* $E \subseteq X$, якщо для кожної точки $x \in E$ існує такий її окіл U в X, що $|\{s \in S : A_s \bigcap U \neq \emptyset\}| \leq 1$. Символом χ_A позначається характеристична функція множини A.

Розглянемо нескінченно диференційовну функцію

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{\frac{t^2}{t^2-1}} & , \quad |t| < 1, \\ 0 & , \quad |t| \geq 1. \end{cases}$$

Лема. Нехай $(a_n)_{n=1}^\infty$ і $(b_n)_{n=1}^\infty$ – нескінченно малі числові послідовності такі, що $b_n > a_n > b_{n+1}$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$, $\delta_n = \frac{b_n-a_n}{2}$ і $(d_n)_{n=1}^\infty$ – обмежена послідовність невід'ємних чисел. Тоді формулою

$$h(x) = \sum_{n=1}^\infty d_n e^{-1/a_n\delta_n}\varphi(\frac{x-c_n}{\delta_n})$$

визначається нескінченно диференційовна функція $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Доведення. Зауважимо, що послідовність інтервалів $I_n = (a_n, b_n)$ дискретна на $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, носій нескінченно диференційовної функції

$$h_n(x) = d_n e^{-1/a_n\delta_n}\varphi(\frac{x-c_n}{\delta_n})$$

міститься в інтервалі I_n і $h_n(0) = 0$ для кожного n. Тому функція h визначена на $\mathbb{R}$ і має похідні всіх порядків у кожній точці $x \neq 0$, причому

$$h^{(m)}(x) = \sum_{n=1}^\infty h_n^{(m)}(x)$$

для кожного $m \in \mathbb{N}$. Зокрема $h^{(m)}(x) = h_n^{(m)}(x)$, якщо $x \in I_n$ і $h^{(m)}(x) = 0$, якщо $x \notin E = \bigcup\limits_{n=1}^\infty I_n$ і $x \neq 0$.

Доведемо, що $h^{(m)}(0) = 0$ для кожного $m \in \mathbb{N}$. Нехай

$$\gamma_m = \max_{t\in\mathbb{R}} |\varphi^{(m)}(t)|$$

для $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ і $d = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} d_n$. Оскільки

$$h_n^{(m)}(x) = d_n e^{-1/a_n\delta_n}\delta_n^{-m}\varphi^{(m)}(\frac{x-c_n}{\delta_n}),$$

то

$$|h_n^{(m)}(x)| \leq d\gamma_m e^{-1/a_n\delta_n}\delta_n^{-m}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$ і $m \in \mathbb{N}_0$. Тому при $x \in I_n$ будемо мати

$$0 \leq \frac{h(x)}{x} = \frac{h_n(x)}{x} \leq \frac{d\gamma_0 e^{-1/a_n\delta_n}}{a_n} =$$
$$= d\gamma_0\delta_n \frac{e^{-1/a_n\delta_n}}{a_n\delta_n}$$

і при $m \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{|h^{(m)}(x)|}{x} = \frac{|h_n^{(m)}(x)|}{x} \leq$$
$$\leq \frac{d\gamma_m e^{-1/a_n\delta_n}}{a_n\delta_n^m} = d\gamma_m a_n^{m-1}\frac{a^{-1/a_n\delta_n}}{(a_n\delta_n)^m}.$$

Оскільки $a_n \to 0$, $\delta_n \to 0$ і для кожного $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{-1/a_n\delta_n}}{(a_n\delta_n)^m} = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^m}{e^t} = 0,$$

то

$$\lim_{x\to 0, x\in E} \frac{|h^{(m)}(x)|}{x} = 0$$

при $m \in \mathbb{N}_0$. Крім того, $h^{(m)}(x) = 0$, якщо $x \notin E$. Тому, за індукцією,

$$h^{(m+1)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{h^{(m)}(x)}{x} = 0$$

для кожного $m \in \mathbb{N}_0$.

Приклад 1. Для $n \in \mathbb{N}$ і $k = 1, \ldots, 3^{n-1}$ покладемо $a_n = 1/3^n$, $b_n = 2/3^n$, $I_n = (a_n, b_n)$, $a_{n,k} = \frac{3k-2}{3^n}$, $b_{n,k} = \frac{3k-1}{3^n}$, $I_{n,k} = (a_{n,k}, b_{n,k})$, $Q_{n,k} = I_{n,k} \times I_n$, $\delta_n = \frac{b_n - a_n}{2}$, $c_n = \frac{a_n + b_n}{2}$ і розглянемо на $\mathbb{R}^2$ функцію

$$\varphi_{n,k}(x, y) = e^{-\frac{1}{a_n \delta_n}} \varphi(\frac{y - c_n}{\delta_n}) \chi_{I_{n,k}}(x).$$

Для кожного $y \in \mathbb{R}$ функція $\varphi_{n,k}(\cdot, y)$ неперервна у всіх точках з $\mathbb{R}$, крім, можливо, точок $a_{n,k}$ і $b_{b,k}$, в яких вона квазінеперервна, бо є неперервною відповідно справа і зліва. Таким чином, функція $\varphi_{n,k}$ квазінеперервна відносно x, $D(\varphi_{n,k}(\cdot, y)) = \{a_{n,k}, b_{n,k}\}$, якщо $y \in I_n$, і $D(\varphi_{n,k}(\cdot, y)) = \emptyset$, якщо $y \notin I_n$. Крім того, носій функції $\varphi_{n,k}$, міститься у квадраті $Q_{n,k}$.

Оскільки сім'я квадратів $Q_{n,k}$ дискретна на множині $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ і $\varphi_{n,k}(x, 0) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ і довільних $n \in \mathbb{N}$ і $k = 1, ..., 3^{n-1}$, то формулою

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{3^{n-1}} \varphi_{n,k}(x, y)$$

визначається функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка квазінеперервна відносно першої змінної. Ясно, що коли $y \in I_n$ при деякому $n \in \mathbb{N}$, то

$$f_y(x) = \sum_{k=1}^{3^{n-1}} \varphi_{n,k}(x, y)$$

для кожного $x \in \mathbb{R}$, а значить

$$D(f_y) = \bigcup_{k=1}^{3^{n-1}} \{a_{n,k}, b_{n,k}\}.$$

Якщо ж y не входить у жодний із інтервалів I_n, то $f_y(x) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$, отже, $D(f_y) = \emptyset$. Таким чином, для кожного $y \in \mathbb{R}$ множина $D(f_y)$ скінченна, а тому й ніде не щільна в $\mathbb{R}$.

Для фіксованого $x \in \mathbb{R}$ розглянемо функцію $f^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і покажемо, що вона нескінченно диференційовна. Покладемо $d_n = 1$, якщо $x \in \bigcup\limits_{k=1}^{3^{n-1}} I_{n,k}$ і $d_n = 0$, якщо $x \notin \bigcup\limits_{k=1}^{3^{n-1}} I_{n,k}$. Легко переконатися в тому, що

$$f^x(y) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-\frac{1}{a_n \delta_n}} \varphi(\frac{y - c_n}{\delta_n})$$

для кожного $y \in \mathbb{R}$. Отже, за лемою, функція f^x нескінченно диференційовна, тобто f нескінченно диференційовна відносно другої змінної.

Легко переконатися, що $D(\varphi_{n,k}) = \{a_{n,k}, b_{n,k}\} \times I_n$ і $D(f) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{3^{n-1}} D(\varphi_{n,k})$. Тому проекція на вісь абсцис множини $D(f)$ – це множина $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=1}^{4^{n-1}} \{a_{n,k}, b_{n,k}\}$ всіх трійково раціональних чисел на інтервалі $(0, 1)$, яка, зрозуміло, щільна в цьому інтервалі.

Таким чином, функція $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ квазінеперервна відносно першої змінної, нескінченно диференційовна відносно другої змінної, множини $D(f_y)$ скінченні для кожного $y \in \mathbb{R}$, а проекція на вісь абсцис множини $D(f)$ щільна в інтервалі $(0, 1)$. Неважко переконатися в тому, що

$$|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)| \leq 6\gamma_1 e^{-18}$$

на $\mathbb{R}^2$, де $\gamma_1 = \max\limits_{t \in \mathbb{R}} |\varphi'(t)|$. Тому всі функції f^x ліпшицеві з однією й тією ж константою.

6. Приступимо до побудови нарізно нескінченно диференційовної функції $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, в якої проекція множини її точок розриву на площину xOy щільна у квадраті $[0, 1]^2$.

Приклад 2. Розглянемо функцію $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, яка задається формулою

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^4+y^4} \quad , & (x, y) \neq (0; 0), \\ \quad 0 \quad , & (x, y) = (0; 0). \end{cases}$$

Легко перевірити, що функція ψ нарізно нескінченно диференційовна, $D(\psi) = \{(0, 0)\}$ і $0 \leq \psi(x, y) \leq 1$ на $\mathbb{R}^2$. Для чисел $n \in \mathbb{N}$ і $k = 1, ...2^{n-1}$ вважатимемо $a_{n,k} = \frac{2k-1}{2^n}$, $\varepsilon_n = 1/2^{n+2}$ і розглянемо для таких n і k та $j = 1, ..., 2^{n-1}$ функції

$$f_{n,k,j}(x, y) = \psi(x - a_{n,k}, y - an, j) \varphi(\frac{y - a_{n,j}}{\varepsilon_n})$$

де $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ і φ – функція з попереднього пункту. Носій функції $f_{n,k,j}$ міститься у квадраті $Q_{n,k,j}=[a_{n,k}-\varepsilon_n,a_{n,k}+\varepsilon_n]\times[a_{n,j}-\varepsilon_n,a_{n,j}+\varepsilon_n]$, ця функція нарізно нескінченно диференційовна, $D(f_{n,k,j})=\{a_{n,k},a_{n,j}\}$ і $0\le f_{n,k,j}(x,y)\le 1$ на $\mathbb{R}^2$. Для кожного фіксованого $n\in\mathbb{N}$ сім'я квадратів $Q_{n,k,j}$, де $k,j=1,...,2^{n-1}$ дискретна. Для $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ і $n\in\mathbb{N}$ покладемо

$$g_n(x,y)=\sum_{k,j=1}^{2^{n-1}}f_{n,k,j}(x,y).$$

Зрозуміло, що функція $g_n:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ нарізно нескінченно диференційовна,

$$D(g_n)=\{(a_{n,k},a_{n,j}):k,j=1,...,2^{n-1}\}$$

і $0\le g_n(x,y)\le 1$ на $\mathbb{R}^2$.

Нехай числа a_n, b_n, c_n, δ_n і інтервали I_n такі ж, як у прикладі 1. Для $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ покладемо

$$f_n(x,y,z)=e^{-1/a_n\delta_n}g_n(x,y)\varphi(\frac{z-c_n}{\delta_n})$$

носій функції $f_n:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ міститься в шарі $S_n=\mathbb{R}^2\times I_n$, функція f_n нарізно нескінченно диференційовна і

$$D(f_n)=D(g_n)\times I_n.$$

Оскільки послідовність шарів S_n дискретна на множині $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$ і $f_n(x,y,0)=0$ на $\mathbb{R}^2$ для кожного n, то формулою

$$f(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x,y,z)$$

визначається функція $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, яка нескінченно диференційовна відносно x і відносно y. Покажемо, що ця функція нескінченно диференційовна і відносно z. Зафіксуємо точку $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ і покладемо $d_n=g_n(x,y)$. Оскільки

$$f(x,y,z)=\sum_{n=1}^{\infty}d_ne^{-1/a_n\delta_n}\varphi(\frac{z-c_n}{\delta_n})$$

і послідовність (d_n) обмежена, то, згідно з лемою, функція $f(x,y,\cdot)$ нескінченно диференційовна.

Ясно, що $D(f)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}D(f_n)$, отже, проекція множини $D(f)$ на площину xOy — це $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n^2$, де $A_n=\{1/2^n,3/2^n,...,\frac{2^n-1}{2^n}\}$, і ми бачимо, що ця проекція щільна у квадраті $[0;1]^2$.

Зазначимо, що основні результати цієї праці були анонсовані в [5].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Герасимчук В.Г., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Різновиди ліпшицевості і множини точок розриву нарізно диференційовних функцій // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 134. Математика.- Чернівці: Рута, 2002.- С.22-29

2. *Маслюченко В.К, Михайлюк В.В., Нестеренко В.В.* Точкова розривність функцій багатьох змінних // Науковий вісник Чернівецького університету: Збірник наук. праць. Вип. 111. Математика.- Чернівці: Рута, 2001.- С.70-75.

3. *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи та фіз.- мех. поля.– 1998. – 41, N4. – С.39-45.

4. *Neubrunn T.* Quasi-continuity // Real Anal. Exch – 1988-89. – **14**, N3 – P.259-306.

5. *Herasymchuk V., Maslyuchenko V.* Sets of discontinuity of separately differentiable functions of n variables // Intern. Conf. on Functional Analysis and its Appl. Dedicated to the 110-th anniversarty of S.Banach. May 28-31, 2002, Lviv. – P.83-84.

Стаття надійшла до редколегії 4.12.2002