УДК 517.51

©2003 р. О.І.Гайдукевич, В.К.Маслюченко

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРОСТІР ФІНІТНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ І РОЗРИВИ НАРІЗНО НЕПЕРЕРВНИХ ФУНКЦІЙ

Наведено приклад нарізно неперервної і скрізь розривної функції $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$.

The example of separately continiuos and everywhere discontiniuos function $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ is given.

1. Сукупна неперервність функцій Каратеодорі, заданих на добутках $T \times X$, в яких другий співмножник – це простір $\mathbb{R}^\infty$ всіх фінітних послідовностей дійсних чисел з топологією індуктивної границі послідовностей своїх скінченновимірних підпросторів $\mathbb{R}_n = \{x = (\xi_1, ..., \xi_n, 0, 0...) : \xi_k \in \mathbb{R}$ при $k = 1, ..., n\}$, досліджувалася в працях [1-3]. В [4] розглядався загальний випадок, коли X – це пряма границя послідовності просторів X_n, що задовольняють другу аксіому зліченності. Зокрема, було доведено [3, теорема 8]: якщо T – локально компактний топологічний простір з регулярною σ-скінченною мірою μ, Y – метризовний сепарабельний простір і $f : T \times \mathbb{R}^\infty \to Y$ – функція Каратеодорі, то для кожного ε існує така замкнена множина T_ε в T, що $\mu(T \setminus T_\varepsilon) < \varepsilon$ і звуження $f\,|_{T_\varepsilon \times \mathbb{R}^\infty}$ неперервне за сукупністю змінних.

У зв'язку з цим виникло природне бажання з'ясувати, якими можуть бути множини точок розриву нарізно неперервних функцій $f : T \times \mathbb{R}^\infty \to Y$. Дослідженню величини множини $C(f)$ точок сукупної неперервності чи відповідно малості множини $D(f)$ точок розриву нарізно неперервних відображень $f : T \times X \to Y$ присвячено багато праць математиків XX століття (див. праці [5-9] і вказану там літературу). Проте простір $\mathbb{R}^\infty$ не підпадає під дію жодної з встановлених раніше теорем. Зокрема, простір $\mathbb{R}^\infty$ не задовольняє першу аксіому зліченності (більше того, він в жодній точці не має зліченної псевдобази), а також цей простір не локально компактний, хоча і σ-компактний.

Добре відомо, що відображення $g : \mathbb{R}^\infty \to Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли всі його звуження $g_n = g|_{\mathbb{R}_n}$ будуть неперервними. Аналогічне твердження справедливе й для відображень $f : T \times \mathbb{R}^\infty \to Y$, де T – локально компактний гаусдорфовий простір [3,4]. Саме ця обставина дозволила встановити сформульований вище результат про властивість Скорца-Драґоні для відображень $f : T \times \mathbb{R}^\infty \to Y$.

Застосовуючи подібний прийом для нарізно неперервної функції $f : T \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ і берівського простору T, на основі відомих результатів ми одержимо, що для кожного звуження $f_n = f\,|_{T \times \mathbb{R}_n}$ множина

$$A_n = \{t \in T : \{t\} \times \mathbb{R}_n \subseteq C(f_n)\}$$

є всюди щільною множиною типу G_δ в просторі T. Перетин $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ – це також всюди щільна G_δ-множина в T. При цьому для кожної точки $t \in A$ всі звуження f_n неперервні за сукупністю змінних у будь-якій точці з множини $\{t\} \times \mathbb{R}_n$. Тому постало питання: чи випливає звідси включення $A \times \mathbb{R}^\infty \subseteq C(f)$?

У цій праці ми даємо негативну відповідь на поставлене запитання, наводячи приклад нарізно неперервної функції $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, яка розривна в точці $(0, \theta)$, де $\theta = (0, 0, ...) \in \mathbb{R}^\infty$, причому кожне її звуження $f_n = f\,|_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_n}$ неперервне в будь-якій точці множини $\{0\} \times \mathbb{R}_n$. Крім того, ми наводимо приклад нарізно неперервної і скрізь розривної функції $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$. Ідея побудови цих прикладів є розвитком раніше застосованого прийому [9, підрозділ 5.4] для визначення нарізно неперервної і скрізь розривної функції $f : \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$.

2. Базу околів точки $x_0 = (\xi_1^0, ..., \xi_k^0, ...)$ у просторі $\mathbb{R}^\infty$ утворюють множини

$$U_e(x_0) = U_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,...}(x_0) =$$
$$= \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty : |\xi_k - \xi_k^0| < \varepsilon_k$$
$$\text{при } k \in \mathbb{N}\},$$

де $e = (\varepsilon_k)_{k=1}^\infty$ – довільна послідовність додатних чисел. Зіставивши точці $(t, x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^\infty$ точку $(\xi_0, \xi_1, \xi_2, ...) \in \mathbb{R}^\infty$, для якої $t = \xi_0$ і $x = (\xi_1, \xi_2, ...)$, одержимо ізоморфізм топологічних векторних просторів $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$ і $\mathbb{R}^\infty$. Ми будемо позначати, як звичайно, через e_n числову послідовність, n-й елемент якої дорівнює 1, а всі решта – нулю.

Твердження 1. Існує множина $A \subseteq \mathbb{R}^\infty$, така, що $\theta \in int_{\mathbb{R}_n}(A \bigcap \mathbb{R}_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, але $\theta \notin int_{\mathbb{R}^\infty}(A)$.

Доведення. Нехай $B_n = \{x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}_n : |\xi_k| < 1/n \text{ при } k \in \mathbb{N}\}$ і $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Ясно, що $A_n = A \bigcap \mathbb{R}_n \supseteq B_n$, отже $int_{\mathbb{R}_n}(A_n) \supseteq int_{\mathbb{R}_n}(B_n) \ni \theta$, для кожного n. Але $\theta \notin int_{\mathbb{R}^\infty}(A)$. Справді, розглянемо довільну послідовність e додатних чисел ε_k і породжений нею окіл нуля $U = U_e(\theta)$ у просторі $\mathbb{R}^\infty$. Легко перевірити, що $U \not\subseteq A$. Щоб це встановити, візьмемо номер n настільки великий, щоб $1/n < \varepsilon_1/2$. Тоді для елемента $u = (\varepsilon_1 e_1 + \varepsilon_n e_n)/2$ будемо мати: $u \in U \setminus A$. Справді, $u \notin B_m$ при $m < n$, бо $u \notin \mathbb{R}_m$, а $B_m \subseteq \mathbb{R}_m$ при $m < n$. З іншого боку, $u \notin B_m$ при $m \geq n$, бо $\varepsilon_1/2 > 1/m$ при $m \geq n$. Отже, $u \notin A$.

Твердження 2. Існує функція $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ така, що всі її звуження $f_n = f|_{\mathbb{R}_n}$ неперервні в точці θ, але f розривна в точці θ.

Доведення. Нехай A – множина з твердження 1 і $f = \chi_A$ – характеристична функція множини A. Тоді f_n неперервна в точці θ, бо вона тотожно дорівнює одиниці в деякому околі нуля в $\mathbb{R}_n$ (а саме на множині A_n з доведення попереднього твердження). Далі, f розривна в точці θ, бо в кожному околі нуля U існує точка x_U, яка не входить в A і для якої $f(x_U) = 0$, в той час як $f(\theta) = 1$.

3. У зв'язку з цим результатом введемо такі поняття. Нехай $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ – довільна функція і $x_0 \in D(f)$. Ми кажемо, що x_0 – це *точка розриву скінченного типу*, якщо існує такий номер n, що $x_0 \in \mathbb{R}_n$, і звуження $f_n = f|_{\mathbb{R}_n}$ розривне в точці x_0. Якщо це не так, то x_0 називається *точкою розриву нескінченного типу*. Ці останні характеризуються такою умовою: всі звуження f_n при $n \geq n_0$, де n_0 – найменший з номерів m, для яких $x_0 \in \mathbb{R}_m$, неперервні в точці x_0, а f розривна в цій точці. Таку ж термінологію ми можемо ввести і для відображення $f : T \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$.

Зрозуміло, що розривна функція $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ обов'язково має точки розриву скінченного типу. Те ж саме стосується і функцій $f : T \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, де T – локально компактний гаусдорфовий простір. Як випливає зі сказаного в $n.1$, для будь-якої нарізно неперервної функції $f : T\times\mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, де T – берівський простір, існує всюди щільна G_δ-множина A в T така, що множина $A \times \mathbb{R}^\infty$ не містить точок розриву функції f скінченного типу. Таким чином, у цьому випадку точок розриву скінченного типу мало в тому розумінні, що їх проекція на простір T є множиною першої категорії.

4. Твердження 2 показує, що функція $f : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$ може мати й точки розриву нескінченного типу. В цьому пункті ми покажемо, що такі точки можуть мати й нарізно неперервні функції $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$.

Лема. Нехай для кожного $k \in \mathbb{N}$ функції $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервні і $g_k(0) = 0$. Тоді формулою $g(x) = \sum_{k=1}^\infty g_k(\xi_k)$, де $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$, визначається неперервна функція на просторі $\mathbb{R}^\infty$.

Доведення. Розглянемо довільну точку $x_0 = (\xi_k^0)_{k=1}^\infty$ з простору $\mathbb{R}^\infty$. Існує номер n такий, що $\xi_k^0 = 0$, як тільки $k > n$. Тоді $g_k(\xi_k^0) = 0$ при $k > n$ і $g(x_0) = \sum_{k=1}^n g_k(\xi_k^o)$. Отже, функція g визначена в точці x_0. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки кожна функція g_k неперервна в точці ξ_k^0, то для кожного k існує таке $\delta_k > 0$, що з нерівності $|\xi_k - \xi_k^0| < \delta_k$

випливає нерівність $|g_k(\xi_k) - g_k(\xi_k^0)| < \varepsilon/2^k$. Покладемо $U = U_{\delta_1,\delta_2,\ldots}(x_0)$. Тоді для всіх $x \in U$ будемо мати

$$|g(x) - g(x_0)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k(\xi_k) - g_k(\xi_k^0)| <$$

$$< \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon/2^k = \varepsilon.$$

Зауваження. Можна міркувати й так. Для кожного n звуження $g|_{\mathbb{R}_n}$ неперервне, як сума скінченного числа неперервних функцій. Тому і функція g неперервна.

Нехай $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – деяка строго спадна нескінченно мала послідовність додатних чисел, наприклад $\alpha_n = 1/n$. Виберемо спадну послідовність додатних чисел δ_n, для яких $\delta_n < (\alpha_n - \alpha_{n+1})/4$. Тоді

$$\alpha_n - 2\delta_n = \alpha_{n+1} + \alpha_n - \alpha_{n+1} - 2\delta_n =$$

$$= \alpha_{n+1} + \alpha_n - \alpha_{n+1} - 4\delta_n + 2\delta_n > \alpha_{n+1} + 2\delta_{n+1}$$

для кожного n. Будемо вважати

$$P_n = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|t - \alpha_n|, |s|\} \leq \delta_n\}$$

і

$$Q_n = \{(t,s) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|t - \alpha_n|, |s|\} < 2\delta_n\}.$$

За лемою Урисона, для кожного n існує неперервна функція $\psi_n : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ така, що $\psi_n(p) = 1$ на P_n і $\psi_n(p) = 0$ на $\mathbb{R}^2 \setminus Q_n$. Нехай

$$sp(t,s) = \begin{cases} \frac{2ts}{t^2+s^2}, & (t,s) \neq (0,0), \\ 0, & (t,s) = (0,0) \end{cases}$$

при $(t,s) \in \mathbb{R}^2$. Функція $sp : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ – це відома функція Шварца, яка нарізно неперервна й розривна тільки в початку координат.

Теорема 1. Нехай $\varphi_n(t,s) = sp(t - \alpha_n, s)$ при $(t,s) \in \mathbb{R}^2$. Тоді за формулою

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(t,\xi_k)\psi_k(t,\xi_k),$$

де $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$, визначається нарізно неперервна функція $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\infty} \to \mathbb{R}$, яка розривна в точці $(0,\theta)$, причому кожне її звуження $f_n = f|_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_n}$ неперервне в будь-якій точці множини $\{0\} \times \mathbb{R}_n$.

Доведення. Оскільки для кожного $t \in \mathbb{R}$ функції $g_k(\xi_k) = \varphi_k(t,\xi_k)\psi_k(t,\xi_k)$ неперервні і $g_k(0) = 0$, то з леми випливає, що f визначена на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\infty}$ і неперервна відносно другої змінної. Для кожного фіксованого $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\infty}$ існує номер n такий, що $\xi_k = 0$, як тільки $k > n$. Тоді

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t,\xi_k)\psi_k(t,\xi_k)$$

для кожного $t \in \mathbb{R}$, отже, f неперервна відносно першої змінної як скінченна сума таких функцій.

Зафіксуємо номер n і точку $p_0 = (0,x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_n$ і доведемо, що f_n неперервна в точці p_0. Візьмемо таке число δ, що $0 < \delta < \alpha_n - 2\delta_n$ і покладемо $W_n = (-\delta,\delta) \times \mathbb{R}_n$. Множина W_n – це відкритий окіл точки p_0 в добутку $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_n$. Нехай $p = (t,x) \in W_n$. Тоді

$$f_n(p) = f(p) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(t,\xi_k)\psi_k(t,\xi_k)$$

Оскільки за побудовою послідовність чисел $\alpha_k - 2\delta_k$ спадає, то $t < \delta < \alpha_k - 2\delta_k$ для кожного $k = 1,\ldots,n$. Тоді $(t,\xi_k) \notin Q_k$ при $k = 1,\ldots,n$, отже, $\psi_k(t,\xi_k) = 0$ для таких k і $f(p) = 0$. Таким чином, $f_n|_{W_n} = 0$, звідки випливає, що $p_0 \in C(f_n)$.

Залишилося перевірити, що $(0,\theta) \in D(f)$. Нехай $(\varepsilon_k)_{k=0}^{\infty}$ – довільна послідовність додатних чисел і $U = (-\varepsilon_0,\varepsilon_0) \times U_{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots}(\theta)$ – базисний окіл точки $(0,\theta)$ в добутку $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\infty}$. Оскільки за побудовою $\alpha_n + \delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, то існує такий номер $m \in \mathbb{N}$, що $\alpha_m + \delta_m < \varepsilon_0$. Візьмемо таке число β, що $0 < \beta < \min\{\varepsilon_m, \delta_m\}$, розглянемо точку $p_m = (\alpha_m + \beta, \beta e_m)$. Зрозуміло, що $p_m \in U$. Крім того,

$$f(p_m) = \varphi_m(\alpha_m + \beta, \beta)\psi_m(\alpha_m + \beta, \beta) =$$

$$= sp(\beta,\beta) = 1,$$

бо $(\alpha_m + \beta, \beta) \in P_m$. Разом з тим, $f(0,\theta) = 0$. Отже, $(0,\theta)$ – точка розриву функції f, до того ж коливання $\omega_f(0,\theta) \geq 1$.

5. Приступимо тепер до побудови нарізно неперервної і скрізь розривної функції $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$.

Теорема 2. Нехай $k \mapsto \varrho_k$ – деяка перенумерація множини $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел, $t \in \mathbb{R}$ і $x = (\xi_k)_{k=1}^\infty \in \mathbb{R}^\infty$. Тоді формулою

$$f(t,x) = \sum_{k=1}^\infty sp(t - \varrho_k, \xi_k)$$

визначається нарізно неперервна скрізь розривна функція $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}$, причому $\omega_f(t,x) \geq 1$ на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$.

Доведення. Те, що функція f визначена й нарізно неперервна на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$, перевіряється так само, як у теоремі 1.

Нехай, $p_0 = (t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$, $x_0 = (\xi_k^0)_{k=1}^\infty$, $(\delta_k)_{k=0}^\infty$ – послідовність додатних чисел і $U = (t_0 - \delta_0, t_0 + \delta_0) \times U_{\delta_1,\delta_2,\dots}(x_0)$ – базисний окіл точки p_0 в добутку $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\infty$. Оскільки $x_0 \in \mathbb{R}^\infty$, то існує такий номер n, що $\xi_k^0 = 0$, як тільки $k > n$. У такому разі

$$f(p_0) = \sum_{k=1}^n sp(t_0 - \varrho_k, \xi_k^0).$$

Розглянемо довільне $\varepsilon > 0$. Оскільки функція f неперервна відносно першої змінної, то існує таке δ^*, що $0 < \delta^* < \delta_0$ і $|f(t,x_0) - f(t_0,x_0)| < \varepsilon$, як тільки $|t - t_0| < \delta^*$. Існують номер $m > n$ і число $\delta > 0$ такі, що $|\varrho_m - t_0| + \delta < \delta^*$. Візьмемо число β, для якого $0 < \beta < \min\{\delta, \delta_m\}$ і покладемо $t^* = \varrho_m + \beta$, $x^* = (\xi_k^*)_{k=1}^\infty$, де $\xi_k^* = \xi_k^0$ при $k \neq m$ і $\xi_m^* = \beta$. Перевіримо, що точка $p^* = (t^*, x^*)$ належить до U. Справді, $|t^* - t_0| = |\varrho_m + \beta - t_0| \leq |\varrho_m - t_0| + \beta < |\varrho_m - t_0| + \delta < \delta^* < \delta_0$, $|\xi_k^* - \xi_k^0| = 0 < \delta_k$ при $k \neq m$ і $|\xi_m^* - \xi_m^0| = \beta < \delta_m$. Далі $|t^* - t_0| < \delta^*$, отже, $|f(t^*, x_0) - f(t_0, x_0)| < \varepsilon$. Тому

$$w_f(U) \geq |f(p*) - f(p_0)| = |f(t^*, x_0) +$$
$$+ sp(t^* - \varrho_m, \xi_m^*) - f(t_0, x_0)| = |sp(\beta, \beta) +$$
$$+ f(t^*, x_0) - f(t_0, x_0)| \geq 1 - |f(t^*, x_0) - f(t_0, x_0)| >$$
$$> 1 - \varepsilon.$$

Спрямувавши ε до 0, ми одержимо, що $\omega_f(U) \geq 1$, звідки випливає, що $\omega_f(p_0) \geq 1$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гайдукевич О.І., Маслюченко В.К.* Сукупна неперервність функцій Каратеодорі на добутках $T \times \mathbb{R}^\infty$ // Матеріали наук. конф., присв. 125-річчю від дня народження видатного укр. вченого, математика Володимира Левицького.— Тернопіль, 1977.— С.17—19.

2. *Гайдукевич О.І.* Деякі узагальнення теореми Скорца-Драґоні // Сучасні проблеми математики: Матеріали міжнар. наук. конф. Ч.1.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— С.121—122.

3. *Гайдукевич О.І., Маслюченко В.К.* Нові узагальнення теореми Скорца-Драґоні // Укр. мат. журн.— 2000.— **52**, N7.— С.881—888.

4. *Гайдукевич О.І., Маслюченко В.К., Михайлюк В.В.* Прямі границі і властивість Скорца-Драґоні // Доп. НАН України.— 2001.— N5.— С.10—13.

5. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity // Real Anal. Exch.— 1985-86.— **11**, N2.— P.293—322.

6. *Piotrowski Z.* Separate and joint continuity. II // Real Anal. Exch.— 1989-90.— **15**, N1.— P.248—258.

7. *Маслюченко В.К., Михайлюк В.В., Собчук О.В.* Досдідження про нарізно неперервні відображення // Матеріали міжнар. мат. конф., присв. пам'яті Ганса Гана.— Чернівці: Рута, 1995.— С.192—246.

8. *Маслюченко В.К.* Простори Гана і задача Діні // Мат. методи та фіз.-мех. поля.— 1998.— **41**, N4.— С.39—45.

9. *Маслюченко В.К.* Нарізно неперервні відображення і простори Кете. Дис. ... докт. фіз.-мат. наук.— Чернівці, 1999.— 345 с.

Стаття надійшла до редколегії 14.12.2002