УДК 512.48

©2003 р. О.П.Воловідник, В.С.Сікора

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

МІНІМАЛЬНІ СИСТЕМИ ТВІРНИХ НОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП МОНОМІАЛЬНОЇ ГРУПИ НАД СКІНЧЕННИМ ПОЛЕМ

Побудовано приклади мінімальних (щодо кількості елементів) систем твірних для нормальних дільників мономіальної групи.

The minimal (of quantity of elements) systems of generators are constructed for the normal subgroups of monomial group.

1. Мономіальна група. Нехай n — натуральне число. Нагадаємо [1, 2], що повною мономіальною групою $\mathrm{Mon}_n(F)$ вимірності n над деяким скінченним полем F називається група всіх матриць n-го порядку, в кожному рядку і кожному стовпчику яких стоїть тільки один ненульовий елемент з поля F. Елементи групи $\mathrm{Mon}_n(F)$ називають мономіальними матрицями, причому кожна мономіальна матриця a_π однозначно визначається деякою підстановкою π множини $\{1, 2, ..., n\}$ та вектором $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$, де $\alpha_i \in F^*$, $1 \le i \le n$, F^* — мультиплікативна група поля F. (А саме, якщо $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & n \\ i_1 & i_2 & ... & i_n \end{pmatrix}$, то в матриці a_π на перетині j-го рядка та i_j-го стовпця стоїть елемент α_j, $1 \le j \le n$.)

Будемо розглядати випадок скінченного поля F. Тоді група $\mathrm{Mon}_n(F)$ також буде скінченною, при цьому має місце рівність

$$\mathrm{card}(\mathrm{Mon}_n(F)) = n!(p^m - 1)^n,$$

де $p^m = \mathrm{card}(F)$, p — характеристика поля F, $m \in \mathbb{N}$. Зокрема, для двохелементного поля F маємо, що $\mathrm{Mon}_n(F) \simeq S_n$. Якщо ж $\mathrm{card}(F) = 3$, то група $\mathrm{Mon}_n(F)$ ізоморфна гіпероктаедральній групі H_n (див. [3]), тобто $\mathrm{Mon}_n(F) \simeq S_n \wr Z_2$.

Має місце наступне твердження [4].

Лема 1. *Мономіальна група* $\mathrm{Mon}_n(F)$, *при* $\mathrm{card}(F) = p^m$, $p \ge 2$, *ізоморфна вінцевому добутку* $S_n \wr Z_{p^m-1}$ *симетричної групи* S_n *з адитивною групою кільця лишків за модулем* $p^m - 1$.

Для досліджень систем твірних мономіальної групи та її нормальних підгруп зручно користуватися цим ізоморфізмом. Тому в даній праці будемо розглядати системи твірних нормальних підгруп вінцевого добутку $S_n \wr Z_k$, $k = p^m - 1$. Зауважимо, що оскільки p — просте число, то $k = p^m - 1$ — парне. Крім того, випадки $k = 1$ та $n = 1, 2$ є тривіальними (групи $S_1 \wr Z_1$ і $S_2 \wr Z_1$ — циклічні), а випадок $n = 4$ варто розглядати окремо.

Отже, тут досліджуються системи твірних нормальних підгруп групи $S_n \wr Z_k$ для довільного натурального $n \ge 5$ та довільного парного $k \ge 2$.

Елементи групи $S_n \wr Z_k$ будемо зображати у вигляді таблиць $u = [\sigma; a_1, a_2, ..., a_n]$, де $\sigma \in S_n$ — деяка підстановка множини $\{1, 2, ..., n\}$; $a_i \in Z_k = \{\bar{1}, \bar{2}, ..., \bar{k}\}$, $1 \le i \le n$ (див. [4]). Добуток двох елементів u та $v = [\tau; b_1, b_2, ..., b_n]$ групи $S_n \wr Z_k$ визначається рівністю

$$u \cdot v = [\sigma \cdot \tau; a_1 + b_{\sigma(1)}, a_2 + b_{\sigma(2)}, ..., a_n + b_{\sigma(n)}],$$

де "+"означає додавання в Z_k, а оберненою до u буде таблиця

$$u^{-1} = [\sigma^{-1}; a_{\sigma^{-1}(1)}, a_{\sigma^{-1}(2)}, ..., a_{\sigma^{-1}(n)}].$$

2. Нормальні дільники мономіальної групи. Опишемо нормальні підгрупи групи $S_n \wr Z_k$ для довільного $n \ge 5$ та парного $k \ge 2$.

(i) Тривіальними нормальними дільниками в групі $S_n \wr Z_k$ будуть, очевидно, вона сама і підгрупа

$$E := \{[\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}]\},$$

де $\varepsilon \in S_n$ — тотожна підстановка.

Мінімальні (щодо кількості елементів) системи твірних групи $S_n \wr Z_k$ було побудовано в [4].

У праці [5] побудовано всі можливі нормальні дільники групи $S_n \wr Z_2$. Цілком аналогічно визначаються відповідні нормальні підгрупи у вінцевому добутку $S_n \wr Z_k$ для $k > 2$.

А саме, нижченаведені підгрупи будуть нормальними дільниками в $S_n \wr Z_k$ для описаних вище значень n та k.

(ii) $A_n \wr Z_k = \Big\{[\pi; a_1, a_2, ..., a_n] \Big| \ \pi \in A_n, a_i \in Z_k, \ i = 1, 2, ..., n\Big\} \trianglelefteq S_n \wr Z_k$;

(iii) $R := \Big\{[\pi; a_1, a_2, ..., a_n] \Big| \ \pi \in S_n, a_i \in Z_k, \ i = 1, 2, ..., n, \ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \bar{0}\Big\} \trianglelefteq S_n \wr Z_k$;

(iv) $P := \Big\{[\sigma; a_1, a_2, ..., a_n] \Big| \ \pi \in A_n, a_i \in Z_k, \ i = 1, 2, ..., n, \ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \bar{0}\Big\} \trianglelefteq R$;

(v) $Q := \Big\{[\varepsilon; a_1, a_2, ..., a_n] \mid \varepsilon$ — тотожна підстановка, $a_i \in Z_k, \ i = 1, 2, ..., n, \ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = = \bar{0}\Big\}$;

(vi) $F := \Big\{[\varepsilon; a, a, ..., a] \mid \varepsilon$ — тотожна підстановка, $a \in Z_k, \ \sum\limits_{i=1}^{n} a = na = \bar{0}\Big\} \trianglelefteq Q$.

Включення між описаними нормальними дільниками характеризується наведеною нижче діаграмою. Зауважимо, що впорядкована множина зображених на діаграмі нормальних дільників є підрешіткою решітки всіх нормальних підгруп групи $S_n \wr Z_k$.

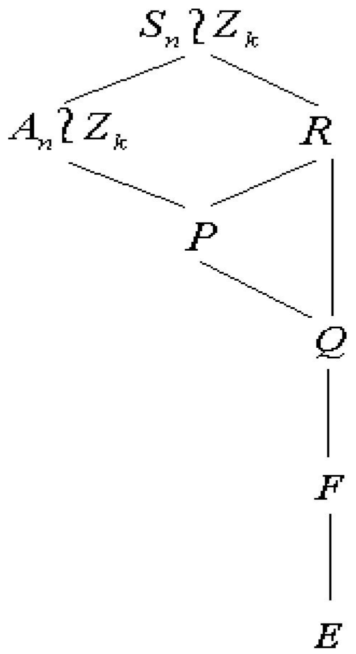
3. Допоміжні твердження.

Лема 2. *I. Пара підстановок* $(1, 2, ..., n)$, $(1, 2, ..., t)$, *де* $n, t \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $2 \leq t < n$, *буде системою твірних симетричної групи* S_n *(якщо хоча б одна з цих підстановок є непарною) або системою твірних знакозмінної групи* A_n *(якщо обидві ці підстановки є парними).*

II. Для довільного непарного натурального $n \geq 3$ *знакозмінна група* A_n *породжується підстановками* $(1, 2, ..., n)$, $(1, 2, ..., 3)$ *або* $(1, 2, ..., n)$, $(3, 4, ..., n)$ *(остання пара при* $n \geq 5$*).*

III. Для довільного парного натурального $n \geq 4$ *знакозмінна група* A_n *породжується підстановками* $(1, 2, ..., n-1)$, $(2, 3, ..., n)$.

Доведення твердження I цієї леми можна знайти в [7, теорема B], доведення тверджень II та III наведено в [6].



4. Мінімальні системи твірних нормальних дільників мономіальної групи.

Наступне твердження доводиться аналогічно до доведення теорем 2, 3 із [5].

Теорема 1. *Групи* $R := \Big\{[\pi; a_1, a_2, ..., a_n] \Big| \ \pi \in S_n, a_i \in Z_k, \ i = 1, 2, ..., n, \ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \bar{0}\Big\}$ *та* $P := \Big\{[\sigma; a_1, \ a_2, ..., a_n] \Big| \ \pi \in A_n, \ a_i \in Z_k, \ i = 1, 2, ..., n, \ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \bar{0}\Big\}$ *є 2-породженими.*

Крім того, група $Q := \Big\{[\varepsilon; a_1, a_2, ..., a_n] \,\Big|\, a_i \in Z_k,\ i = 1, 2, ..., n,\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i = \bar{0}\Big\}$ є $(n-1)$-породженою.

Група $F := \Big\{[\varepsilon; a, a, ..., a] \,\Big|\, a \in Z_k,\ \sum\limits_{i=1}^{n} a = = na = \bar{0}\Big\}$ — циклічна, породжена підстановкою $[\varepsilon; \overline{\alpha}, \overline{\alpha}, ..., \overline{\alpha}]$, де $\overline{\alpha} \in Z_k$ — таке натуральне число, що $n\alpha \equiv 0 (mod\, k)$.

Теорема 2. *Для довільних натуральних n, k ($n \geq 3$, $n \neq 4$, $k > 2$) група $A_n \wr Z_k$ є 2-породженою.*

Доведення. Використовуючи системи твірних знакозмінної групи A_n, наведені в лемі 2, у групі $A_n \wr Z_k$ для довільних натуральних n, k ($n \geq 3$, $n \neq 4$, $k > 2$) стандартним чином можна визначити незвідні системи твірних, які складаються з трьох елементів:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= [(1,2,3); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}], \\ \beta_1 &= [(1,2,...,n); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}], \\ \gamma_1 &= [\varepsilon; \bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}] \end{aligned} \tag{1}$$

або

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= [(1,2,...,n-2); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}], \\ \beta_2 &= [(1,2,...,n); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}], \\ \gamma_2 &= [\varepsilon; \bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}], \end{aligned} \tag{2}$$

якщо n — непарне;

$$\begin{aligned} \alpha_3 &= [(1,2,...,n-1); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}], \\ \beta_3 &= [(2,3,...,n); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}], \\ \gamma_3 &= [\varepsilon; \bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}], \end{aligned} \tag{3}$$

якщо n — парне (тут $\varepsilon \in A_n$ — тотожна підстановка).

Для доведення теореми побудуємо двохелементні системи твірних групи $A_n \wr Z_k$ (оскільки ця група не циклічна, то така кількість твірних є мінімальною, тобто двохелементна система твірних буде незвідною). Розглянемо кілька випадків, у залежності від чисел n та k.

a) Нехай спочатку $n \geq 3$ — непарне, $k > 2$ — довільне парне натуральне число, причому нехай $(n, k) = d$ та $(k, 3) = 1$. Покажемо, що тепер системою твірних групи $A_n \wr Z_k$ будуть елементи

$$\begin{aligned} u_1 &= [(1,2,...,n); \bar{d}, \bar{d}, ..., \bar{d}], \\ v_1 &= [(1,2,3); \bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}]. \end{aligned} \tag{4}$$

Враховуючи умови, накладені на n та k, можна знайти таке натуральне число η, що $nd\eta = d (mod\, k)$, тому

$$(u_1^n)^\eta = u_1^{n\eta} = [\varepsilon; \overline{nd\eta}, \overline{nd\eta}, ..., \overline{nd\eta}] =$$

$$= [\varepsilon; \bar{d}, \bar{d}, ..., \bar{d}].$$

Позначимо останню таблицю через x_1, тобто $x_1 = [\varepsilon; \bar{d}, \bar{d}, ..., \bar{d}]$. Тоді

$$x_1^{-1} \cdot u_1 = [\varepsilon; \overline{k-d}, \overline{k-d}, ..., \overline{k-d}] \cdot$$

$$\cdot [(1,2,...,n); \bar{d}, \bar{d}, ..., \bar{d}] =$$

$$= [(1,2,...,n); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}] = \beta_1.$$

Позначимо тепер через x_2 вираз

$$x_2 = u_1^3 \cdot v_1 \cdot u_1^{-3} =$$

$$= [(n-2, n-1, n); \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}],$$

тоді $x_2^3 = [\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{3}, \bar{0}, ..., \bar{0}]$. Оскільки $(3, k) = 1$, то можна підібрати таке натуральне ξ, що $3\xi \equiv 1 (mod\, k)$. А тому

$$(x_2^3)^\xi = x_2^{3\xi} = [\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \overline{3\xi}, \bar{0}, ..., \bar{0}] =$$

$$= [\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}],$$

звідки

$$u_1^{-3} \cdot x_2^{3\xi} \cdot u_1^3 = [\varepsilon; \bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}] = \gamma_1$$

та

$$\gamma_1^{k-1} \cdot v_1 = [(1,2,3); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}] = \alpha_1.$$

Отже, отримали, що α_1, β_1, γ_1 виражаються через u_1, v_1, тобто останні елементи є системою твірних групи $A_n \wr Z_k$ для вказаних вище n та k.

b) Розглянемо тепер випадок, коли $n \geq 3$ — непарне, $k > 2$ — довільне парне натуральне число, причому нехай $k \vdots 3$ та $(n - 2, k) = d$. Покажемо, що для таких n, k таблиці

$$\begin{aligned} u_2 &= [(1,2,...,n-2); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}, \bar{d}], \\ v_2 &= [(1,2,...,n); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}] \end{aligned} \tag{5}$$

утворюють систему твірних групи $A_n \wr Z_k$. Для цього виведемо формули вираження елементів системи (2) через u_2, v_2.

Очевидно, що $\beta_2 = v_2$. Тоді

$$u_2^{n-2} = [\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}, \overline{(n-2)d}]$$

і можна підібрати таке натуральне число μ, що $(n-2)d\mu \equiv d(mod\, k)$. Тоді

$$(u_2^{n-2})^{\mu} = [\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}, \overline{(n-2)d\mu}] =$$

$$= [\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}, \bar{d}]$$

і позначимо останню таблицю через y. Отже,

$$y^{-1} \cdot u_2 = [(1, 2, ..., n-2); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}] = \alpha_2.$$

Далі можемо підібрати таке натуральне число ν, що $\overline{d\nu} = \overline{k+1} = \bar{1}$, тому отримуємо

$$v_2^{-1} \cdot y^{\nu} \cdot v_2 = [\varepsilon; \bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}] = \gamma_2,$$

отже, для даного випадку теорему доведено.

c) Нехай тепер n — парне, k — довільне парне натуральне число, причому нехай $(n-1, k) = d \neq 1$. Доведемо, що в цьому випадку підстановки

$$\begin{aligned} u_3 &= [(1, 2, ..., n-1); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}, \bar{d}], \\ v_3 &= [(2, 3, ..., n); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}] \end{aligned} \tag{6}$$

утворюють систему твірних групи $A_n \wr Z_k$. Для цього виведемо формули вираження елементів системи (3) через u_3, v_3.

Одразу бачимо, що $\beta_3 = v_3$. Крім того,

$$u_3^{n-1} = [\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}, \overline{(n-1)d}].$$

Враховуючи умови на n і k, можна підібрати таке натуральне θ, що $(n-1)\theta d \equiv d(mod\, k)$. Тоді позначимо через z_1 підстановку

$$u_3^{(n-1)\theta} = [\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}, \overline{(n-1)d\theta}] =$$

$$= [\varepsilon; \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}, \bar{d}] := z_1$$

і матимемо, що

$$z_1^{-1} \cdot u_3 = [(1, 2, ..., n-1); \bar{0}, \bar{0}, ..., \bar{0}] = \alpha_3.$$

Побудуємо тепер добуток

$$z_2 = \alpha_3^{-1} \cdot (v_3 \cdot z_1 \cdot v_3^{-1}) \cdot \alpha_3 = [\varepsilon; \bar{d}, \bar{0}, ..., \bar{0}].$$

Враховуючи умови, накладені на n та k, можна знайти таке натуральне число ξ, щоб $d\xi \equiv 1(mod\, k)$. Тоді

$$z_2^{\xi} = [\varepsilon; \overline{d\xi}, \bar{0}, ..., \bar{0}] = [\varepsilon; \bar{1}, \bar{0}, ..., \bar{0}] = \gamma_3.$$

Отже, отримали, що α_3, β_3 і γ_3 виражаються через u_3, v_3, тобто останні елементи утворюють систему твірних групи $A_n \wr Z_k$ для вказаних вище n та k.

Теорему доведено.

На початку роботи згадувалося, що елементами мономіальної групи $\mathrm{Mon}_n(F)$ вимірності n над деяким скінченним полем F є мономіальні матриці. Тому перепишемо отримані вище результати на мові матриць. Має місце наступне твердження.

Теорема 3. *Нормальні підгрупи мономіальної групи $\mathrm{Mon}_n(F)$, які ізоморфні групам $A_n \wr Z_k$, R, P, є 2-породженими.*

Нормальна підгрупа мономіальної групи $\mathrm{Mon}_n(F)$, яка ізоморфна групі Q є $(n-1)$-породженою.

Нормальний дільник мономіальної групи $\mathrm{Mon}_n(F)$, ізоморфний групі F, є циклічною групою.

На завершення випишемо (за допомогою побудованих при доведенні теореми 2 систем твірних групи $A_n \wr Z_k$) приклади систем твірних нормальної підгрупи групи $\mathrm{Mon}_n(F)$, ізоморфної вінцевому добутку $A_n \wr Z_k$, яку, для скорочення записів, позначимо через $AZ(n, k)$.

Позначимо символом γ — твірний, а 1 — нейтральний елемент циклічної групи F^*.

a) Нехай спочатку $n \geq 3$ — непарне, $k > 2$ — довільне парне натуральне число, причому нехай $(n, k) = d$ та $(k, 3) = 1$. Системою твірних групи $AZ(n, k)$ будуть елементи

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma^d & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^d & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & \gamma^d \\ \gamma^d & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix},$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 & \gamma & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & 0 & 0 & ... & 0 \\ \gamma & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

b) У випадку, коли $n \geq 3$ — непарне, $k > 2$ — довільне парне натуральне число, причому $k \vdots 3$ та $(n-2,k) = d$, систему твірних нормальної підгрупи $AZ(n,k)$ групи $\mathrm{Mon}_n(F)$ будуть утворювати елементи

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \gamma^d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \gamma^d \end{pmatrix},$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Нехай тепер n — парне, k — довільне парне натуральне число, причому нехай $(n-1,k) = d \neq 1$. Тоді системою твірних групи $AZ(n,k)$ будуть

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & \gamma^d \end{pmatrix},$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Системи твірних інших нормальних підгруп мономіальної групи виписуються аналогічно, використовуючи теореми 1 та 3.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Crouch R.* Monomial groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1955.— Vol. 80.— P. 187-215.
2. *Ore O.* Theory of monomial groups // Trans. Amer. Math. Soc.— 1942.— Vol. 51.— P. 15-64.
3. *Baake M.* Structure and representations of the hyperoctahedral group // J. Math. Phys. — 1984.— Vol.25, N11. — P.3171-3182.
4. *Сікора В.С.* Розклади елементів мономіальних груп над скінченними полями за мінімальними базами // Вісн. Київськ. ун-ту. Серія: Фізико-математичні науки.— 1999.— N3.— С.71-79.
5. *Заводя М.В., Сікора В.С.* Системи твірних нормальних підгруп гіпероктаедральної групи // Вісн. Київськ. ун-ту. Серія: Фізико-математичні науки.— 2002.— N3.— С.71-79.
6. *Пикар С.* О базисах симметрической группы // Кибернетический сборник, М.: Мир, 1965.— Вып.1.— С.7-34.
7. *Isaacs I.M., Thilo Zieschang.* Generating symmetric groups // Math. Notes.— 1995.— Vol.10.— P.734-739.

Стаття надійшла до редколегії 25.12.2002.