УДК 517.9

©2003 р. С.Б.Боднарук

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ДО ПИТАННЯ ПРО ЗАЛЕЖНІСТЬ ВІД ПАРАМЕТРА ВЛАСТИВОСТІ СЛАБКОЇ РЕГУЛЯРНОСТІ ЛІНІЙНОГО РОЗШИРЕННЯ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ НА ТОРІ

Вивчається питання зміни властивості слабкої регулярності лінійного розширення динамічної системи на торі при зміні параметра.

The modification problem of the property of weak regularity is studied for the linear growth of dynamic system on the tore with change of parameter.

Для початку нагадаємо ряд відомих фактів, пов'язаних з лінійним розширенням динамічної системи на торі $\mathcal{T}_m$:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi)x \tag{1}$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in R^n$, $t \in R$, $a(\varphi) = (a_1(\varphi), ..., a_m(\varphi)) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_m)$, $A(\varphi) = A_{ij}(\varphi)_{i,j=\overline{1,m}}$ — n-вимірна квадратна матриця, елементи якої належать простору $C^0(\mathcal{T}_m)$. Через $C^0(\mathcal{T}_m)$ позначаємо простір функцій $F(\varphi)$ неперервних за сукупністю змінних φ_j, $j = \overline{1,m}$ і 2π-періодичних за кожною змінною φ_j, $j = \overline{1,m}$, тобто заданих на m-вимірному торі $\mathcal{T}_m$, а $C_{Lip}(\mathcal{T}_m)$ — підпростір $C^0(\mathcal{T}_m)$ функцій, які задовольняють умову Ліпшиця. Через $C'(\mathcal{T}_m, a)$ прийнято позначати підпростір $C^0(\mathcal{T}_m)$ функцій $F(\varphi)$ таких, що суперпозиція $F(\varphi_t(\varphi_0))$ як функція змінної t неперервно диференційовна за t і при цьому

$$\frac{d}{dt}F(\varphi_t(\varphi_0))|_{t=0} = \dot{F}(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m).$$

Тут $\varphi_t(\varphi)$ - розв'язок системи рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi)$$

з початковою умовою $\varphi_t(\varphi)|_{t=0} = \varphi_0$ при кожному фіксованому $\varphi_0 \in R^m$.

У теорії збурення інваріантних торів головну роль відіграють властивості лінійного оператора $L : C^{l+1}(\mathcal{T}_m) \mapsto C^l(\mathcal{T}_m)$

$$L = \frac{\partial}{\partial\varphi}a(\varphi) - A(\varphi),$$

де $(a, A) \in C^l(\mathcal{T}_m)$, $l \geq 0$.

У роботах Ю.О. Митропольського, А.М. Самойленка, В.Л. Кулика припускається слабка регулярність оператора L — існування псевдооберненого до оператора L у вигляді інтегрального оператора, який визначається функцією Гріна (функцією Гріна-Самойленка) системи (1).

У своїй теорії J.Mozer і R.J.Sacker вимагають, у крайньому випадку, коерцитивності оператора SL, де $S = S(\varphi)$ — деяка невироджена симетрична матриця із $C^l(\mathcal{T}_m)$:

$$(SLu, u) \geq \gamma\|u\|_0^2 \quad \forall u \in C^l(\mathcal{T}_m),$$

де (u, v) — скалярний добуток в $L^2(\mathcal{T}_m)$.

У спільній частині обох теорій від L вимагається експоненціальна дихотомія системи рівнянь (1), а саме: $\forall\, \varphi \in \mathcal{T}_m$ простір R^n можна представити у вигляді прямої суми підпросторів $E^+ = E^+(\varphi)$ і $E^- = E^-(\varphi)$ доповняльних розмірностей n_1 і $n - n_1 = n_2$ так, що розв'язок φ_t, $x_t = x_t(\varphi, x) = \Omega_0^t(\varphi)x$ системи (1) при $x \in E^+$ задовольняє нерівність

$$\|x_t(\varphi, x)\| \leq K \exp\left(-\gamma(t - \tau)\right)\|x_\tau(\varphi, x)\|$$

$$\forall\, t \geq \tau,$$

при $x \in E^-$ — нерівність

$$\|x_t(\varphi, x)\| \leq K \exp\left(\gamma(t - \tau)\right)\|x_\tau(\varphi, x)\|$$

$$\forall\, t \leq \tau,$$

для довільних $\tau \in R$ $\varphi \in \mathcal{T}_m$ і довільних $K \geq 1$ і γ, не залежних від φ, x, t, τ. Тут через $\Omega_0^t(\varphi)$ позначено матрицант лінійної системи рівнянь

$$\frac{dx}{dt} = A(\varphi_t(\varphi))x.$$

Граничний випадок експоненціальної дихотомії, коли $n_1 = n$, називають експоненціальною стійкістю системи (1).

Умови, що забезпечують дихотомію, в термінах властивостей квадратичної за x форми Ляпунова були вперше наведені в працях А.М. Самойленко та В.Л. Кулика. Пізніше А.М. Самойленко [1] отримав критерій експоненціальної дихотомії, який виражався через властивості розв'язків системи (1).

З даним питанням тісно пов'язані такі об'єкти теорії збурення, як поняття функції Гріна-Самойленка, про яке згадувалось вище, та поняття інваріантного тору лінійного розширення динамічної системи. Зокрема:

Означення 1. *Нехай існує $n \times n$-вимірна матрична функція $C(\varphi) \in C^0(\mathcal{T}_m)$ така, що для функції*

$$G_0(\tau, \varphi) = \qquad (2)$$

$$= \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi)\, C(\varphi_\tau(\varphi)), & \textit{при} \quad \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi)[C(\varphi_\tau(\varphi)) - I_n], & \textit{при} \quad \tau > 0 \end{cases}$$

виконується оцінка

$$\|G_0(\tau, \varphi)\| \leq K_0 \exp\left(-\gamma_0|\tau|\right) \quad \forall \tau \in R$$

з додатними сталими K_0, γ_0, які не залежать від $\varphi \in R^m$. Тоді функцію (2) називають функцією Гріна (Гріна-Самойленка) задачі про інваріантні тори для системи (1).

Цікавим є питання про зміну властивості слабкої регулярності лінійного розширення динамічної системи на торі при зміні параметра. Тобто розглянемо лінійне розширення динамічної системи на торі $\mathcal{T}_m$

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi, p), \quad \frac{dx}{dt} = A(\varphi, p)x, \qquad (3)$$

де p – параметр, що належить деякій однозв'язній множині $D \subset R^k$, $\varphi \in \mathcal{T}_m$, $x \in R^n$, $t \in R$, функція $a(\varphi, p) = (a_1(\varphi, p), ..., a_m(\varphi, p)) \in C_{Lip}(\mathcal{T}_m)$ неперервна за сукупністю змінних (φ, p), $A(\varphi, p) = A_{ij}(\varphi, p)_{i,j=\overline{1,m}}$ — n-вимірна квадратна матриця, елементи якої належать простору $C^0(\mathcal{T}_m \times D)$. Тут $C^0(\mathcal{T}_m \times D)$ — простір функцій $F(\varphi, p)$, неперервних за сукупністю змінних φ_j, $j = \overline{1,m}$ та p і 2π-періодичних за кожною змінною φ_j, $j = \overline{1,m}$.

Означення 2. *Нехай $C(\varphi, p)$ – матриця з простору $C^0(\mathcal{T}_m \times D)$. Нехай*

$$G_0(\tau, \varphi; p) = \qquad (4)$$

$$= \begin{cases} \Omega_\tau^0(\varphi, A, p) C(\varphi_\tau(\varphi), p) & \tau \leq 0, \\ \Omega_\tau^0(\varphi, A, p)[C(\varphi_\tau(\varphi), p) - I_n] & \tau > 0 \end{cases}$$

і будемо називати $G_0(\tau, \varphi; p)$ функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь (3) кожен раз, коли виконується експоненціальна оцінка

$$\|G_0(\tau, \varphi; p)\| \leq K \exp(-\gamma|\tau|),$$

де додатні константи K, γ не залежать від τ, φ, p.

Означення 3. *Система (3) називається регулярною при кожному фіксованому значенні параметра $p = p' \in D$, якщо існує єдина функція Гріна-Самойленка (4) $G_0(\tau, \varphi; p)$ задачі про інваріантні тори.*

Означення 4. *Назвемо систему (3) слабко регулярною при $p = p'$, якщо при значенні параметра $p = p' \in D$ існує принаймні одна функція Гріна-Самойленка $G_0(\tau, \varphi; p)$.*

Крім цього введемо таке означення.

Означення 5. *Будемо називати систему (3) строго слабко регулярною при $p = p'$, якщо при значенні параметра $p = p' \in D$ існує більше однієї функції Гріна-Самойленка задачі про інваріантні тори.*

Чи можлива така ситуація, щоб система (3) на одній і тій же області D зміни параметра p була регулярною і строго слабко регулярною? Виявляється, що має місце таке твердження.

Теорема. *Нехай система (3) при $p = p_0 \in D$ регулярна, а при $p = \overline{p} \in D$ є строго слабко регулярною. Тоді обов'язково існує*

$p = p^{'} \in D$, для якої система (3) не має жодної функції Гріна-Самойленка.

Доведення. Нехай не існує такої точки $p = p^{'} \in D$, для якої система (3) не має жодної функції Гріна-Самойленка. Тоді в будь-якій точці із D система або регулярна, або строго слабко регулярна. Розглянемо будь-які дві точки із D, в яких система має різну регулярність. Оскільки D — однозв'язна множина, то ми можемо з'єднати ці точки спрямною кривою l, яка належить D. Розділивши дану криву на дві частини однакової довжини, одержуємо на l точку $\tilde{p}$. Розглянемо тепер, як і раніше, точку $\tilde{p}$ і таку точку із l, щоб у цих точках система (3) мала різну властивість регулярності. Частину кривої між даними двома точками знову поділимо на дві частини і т.д. Продовжуючи цей процес, отримаємо, згідно з лемою про вкладені відрізки, одну точку p^*, в якій система буде або регулярною, або строго слабко регулярною. Тобто (див. [2]) існує n-вимірна симетрична матриця $S(\varphi) \in C^{'}(\mathcal{T}_m, a)$ така, що

$$\langle [\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi, p^*) - S(\varphi) A^*(\varphi, p^*) -$$

$$- A(\varphi, p^*) S(\varphi)] x, x \rangle \geq \|x\|^2. \qquad (5)$$

При цьому, якщо матриця $S(\varphi)$ вироджується при деякому $\varphi = \varphi_0 \in R^m$, то система (3) при $p = p^*$ буде мати безліч функцій Гріна-Самойленка (тобто буде слабко регулярною), а якщо

$$\det S(\varphi) \neq 0 \quad \forall \varphi \in R^m,$$

то система (3) при $p = p^*$ буде регулярною. Оскільки функції $a(\varphi, p)$ та $A(\varphi, p)$ неперервні за сукупністю змінних, то нерівність аналогічна (5) буде виконуватись і для точки $p = \tilde{p}$ як завгодно близької до $p = p^*$:

$$\langle [\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi} a(\varphi, \tilde{p}) - S(\varphi) A^*(\varphi, \tilde{p}) -$$

$$- A(\varphi, \tilde{p}) S(\varphi)] x, x \rangle \geq \beta \|x\|^2,$$

де β — деяка додатна константа. Очевидно, що властивість регулярності в точці $\tilde{p}$ буде такою ж, що і в p^* (в силу вироджуваності чи невироджуваності матриці $S(\varphi)$). Отже, в деякому околі точки p^* буде зберігатися властивість регулярності. А це суперечить припущенню, яке давало змогу твердити, що в точках як завгодно близьких до p^* система (3) може бути як регулярна, так і слабко регулярна. Отже, обов'язково знайдеться така точка $p = p^{'} \in D$, для якої система (3) не буде мати жодної функції Гріна-Самойленка. Теорему доведено.

Прикладом, що ілюструє дану теорему, може служити система диференціальних рівнянь

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sin \varphi, \quad \frac{dx}{dt} = (p + \cos \varphi) x,$$

де $\varphi \in \mathcal{T}_1$, $x \in R$, $t \in R$, $p \in [0, 2]$ і для якої при $p = 0$ є безліч функцій Гріна-Самойленка, при $p = 2$ є тільки одна функція Гріна-Самойленка, а при $p = 1$ — немає жодної.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* О некоторых проблемах теории возмущений гладких инвариантных торов динамических систем // Укр. мат. журн.— 1994.— Т. 46, N 12.— С. 1665–1699.

2. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Кулик В.Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.— К.: Наук. думка, 1990.— 272 с.

Стаття надійшла до редколегії 4.12.2002