УДК 517.956.4

©2003 р. Т.М. Балабушенко

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПОБУДОВА ТА ОЦІНКИ ФУНДАМЕНТАЛЬНИХ МАТРИЦЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ПОЛІНОМІАЛЬНОЇ В'ЯЗКИ $\overrightarrow{2b}$-ЕЛІПТИЧНИХ СИСТЕМ, ПОРОДЖЕНИХ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНОЮ СИСТЕМОЮ

Побудовані та встановлені оцінки фундаментальних матриць розв'язків поліноміальної в'язки $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породженої стаціонарною $\overrightarrow{2b}$-параболічною системою, яка задовольняє спеціальну $\Lambda_\delta^{1,r}$-умову.

It was constructed and established estimates of fundamental matrices of solutions of polynomial sheaf of $\overrightarrow{2b}$-elliptic systems generated by stationary $\overrightarrow{2b}$-parabolic system which satisfies a special $\Lambda_\delta^{1,r}$-condition.

Оцінки фундаментальної матриці розв'язків (ФМР) параболічних систем у необмежених за часовою змінною областях мають досить широкий спектр застосувань. Досліджуючи параболічні за Петровським системи, С.Д. Ейдельман розглянув такого типу оцінки в рамках спеціальних умов на системи ($\Lambda_1^\pm$- і $\Lambda_2^\pm$-умов). Ці умови полягали в тому, що для ФМР виконуються оцінки, оцінні функції з яких прямують до нуля при прямуванні часової змінної до нескінченності. Приклади класів систем, які задовольняють $\Lambda_i^\pm$-умови, $i = 1, 2$, та застосування оцінок з цих умов наведені в працях [1-7]. Одним із застосувань Λ_i^+-оцінок ФМР Z параболічних за Петровським систем була побудова і дослідження ФМР відповідних еліптичних систем. При цьому матриця E одержувалась як інтеграл за часовою змінною t від нуля до нескінченності, можливо регуляризований, від матриці Z.

Узагальненням $\Lambda_i^\pm$-умов на випадок $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем є введені в [8,9] $\Lambda_\delta^{m,r}$-умови. Застосуванню оцінок з $\Lambda_\delta^{1,r}$-умови до побудови й одержання оцінок ФМР $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем, породжених $\overrightarrow{2b}$-параболічними, і присвячена дана стаття.

Зауважимо, що для одного частинного випадку $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем результати, аналогічні тут наведеним, містяться в замітці [10].

Відзначимо ще недавно опубліковану статтю [11]. У ній для рівнянь другого порядку одержано нове, порівняно із зазначеним вище, співвідношення, яке зв'язує фундаментальні розв'язки еліптичного і відповідного параболічного рівнянь.

Нехай $n, s, b_1, ..., b_n, n_1, ..., n_s$ — задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, ..., 2b_n)$; $\mathbb{N}_s$ — множина послідовних натуральних чисел від 1 до s; $\mathbb{Z}_+^n$ — сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів; B — найменше спільне кратне чисел $b_1, ..., b_n$; $m_j \equiv B/b_j$, $q_j \equiv 2b_j/(2b_j - 1)$, $j \in \mathbb{N}_n$; $M \equiv m_1 + ... + m_n$; $||k|| \equiv \sum_{j=1}^n m_j k_j$, якщо $k \equiv (k_1, ..., k_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; $\Pi \equiv (0, \infty) \times \mathbb{R}^n$; $|x|_q \equiv (\sum_{j=1}^n |x_j|^{q_j})$; δ_{ij} — символ Кронекера.

Розглянемо $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи вигляду

$$\sum_{j=1}^s A_{ij}(x, \partial_t, \partial_x) u_j(t, x) = f_i(t, x), \quad (t, x) \in \Pi, \quad i \in \mathbb{N}_s, \qquad (1)$$

і

$$\sum_{j=1}^s A_{ij}(x, \partial_t + \mu, \partial_x) u_j(t, x) = f_i(t, x), \quad (t, x) \in \Pi, \quad i \in \mathbb{N}_s, \qquad (2)$$

де

$$A_{ij}(x,\partial_t,\partial_x)\equiv\delta_{ij}\partial_t^{n_j}-$$
$$-\sum_{\substack{2Bk_0+||k||\le 2Bn_j\\ 0\le k_0<n_j}} a^{ij}_{k_0k}(x)\partial_t^{k_0}\partial_x^k,\quad \{i,j\}\subset\mathbb{N}_s,$$

μ – комплексний параметр.

Цим системам відповідає поліноміальна в'язка $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем

$$\sum_{j=1}^{s}L^{\mu}_{ij}(x,\partial_x)u_j(x)\equiv$$
$$\equiv-\sum_{j=1}^{s}\sum_{\substack{2Bk_0+||k||\le 2Bn_j\\ 0\le k_0<n_j}} a^{ij}_{k_0k}(x)\mu^{k_0}\partial_x^k u_j(x)+$$
$$+\delta_{ij}\mu^{n_j}u_i(x)=g_i(x),$$
$$i\in\mathbb{N}_s,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad \mu\in\mathbb{C}. \tag{3}$$

Означення 1. *Матрицею Гріна (МГ) задачі Коші для системи (1) називається матриця* $G\equiv(G_0,G_1,...,G_s)$, $G_0\equiv(G_0^{ij})_{i,j=1}^{s}$, $G_j\equiv(G_j^{il})_{i=1,l=1}^{s,n_j}$, $j\in\mathbb{N}_s$, *така, що компоненти розв'язку* $u\equiv(u_1,...,u_s)'$ *системи (1) в області* Π, *які задовольняють умови*

$$\partial_t^{l-1}u_i(t,x)|_{t=0}=\varphi_i^l(x),\ x\in\mathbb{R}^n,$$
$$l\in\mathbb{N}_{n_i},\ i\in\mathbb{N}_s, \tag{4}$$

зображуються у вигляді

$$u_i(t,x)=\sum_{j=1}^{s}\left(\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}G_0^{ij}(t-\tau,x,\xi)\times\right.$$
$$\times f_j(\tau,\xi)d\xi+$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{n_j}\int_{\mathbb{R}^n}G_j^{il}(t,x,\xi)\varphi_j^l(\xi)d\xi\right),$$
$$(t,x)\in\Pi,\ i\in\mathbb{N}_s, \tag{5}$$

для довільних досить гладких і фінітних функцій f_j,φ_j^l.

Зауважимо, що МГ G і G^{μ} задачі Коші для відповідно систем (1) і (2) пов'язані співвідношенням

$$G^{\mu}(t-\tau,x,\xi)=e^{-\mu(t-\tau)}G(t-\tau,x,\xi),$$
$$0\le\tau<t,\ \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{6}$$

і для компонент розв'язку u^{μ} системи (2) правильні зображення

$$u_i^{\mu}(t,x)=\sum_{j=1}^{s}\left(\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\mu(t-\tau)}\times\right.$$
$$\times G_0^{ij}(t-\tau,x,\xi)f_j(\tau,\xi)d\xi+$$
$$\left.+\sum_{l=1}^{n_j}\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\mu t}G_j^{il}(t,x,\xi)\varphi_j^l(\xi)d\xi\right),$$
$$(t,x)\in\Pi,\ i\in\mathbb{N}_s. \tag{7}$$

Нехай система (1) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічна, а її коефіцієнти $a^{ij}_{k_0k}$ разом з похідними $\partial_x^k a^{ij}_{k_0k}$, $||k||\le 2Bn_j$, $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_s$, обмежені та задовольняють рівномірну умову Гельдера в $\mathbb{R}^n$. Тоді, згідно з [6, 12], для системи (1) існує ФМР Z і МГ G, причому $G_0=Z$, а елементи $G_j, j\in\mathbb{N}_s$, виражаються лінійними комбінаціями похідних від елементів Z, коефіцієнтами яких є відповідні похідні від коефіцієнтів системи.

Означення 2. *Система (1) задовольняє* $\Lambda_{\delta}^{1,r}$*-умову,* $\delta\in\mathbb{R}$, $r\in\mathbb{Z}_+^1\cup\{\infty\}$, *якщо для її МГ задачі Коші* $G\equiv(G_0,G_1,...,G_s)$ *існують похідні* $\partial_t^{k_0}\partial_x^k G$, $2Bk_0+||k||\le r$, *і справджуються оцінки*

$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^k G_0^{ij}(t,x,\xi)|\le$$
$$\le C_{k_0k}\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t))^{-1-k_\nu-2B(k_0-p_0^{ij}(t))/M}\times$$
$$\times\exp\left\{\delta t-c\sum_{\nu=1}^{n}(|x_\nu-\xi_\nu|/\alpha_\nu(t))^{q_\nu}\right\},$$
$$|\partial_t^{k_0}\partial_x^k G_j^{il}(t,x,\xi)|\le$$
$$\le C_{k_0k}\prod_{\nu=1}^{n}(\alpha_\nu(t))^{-1-k_\nu-2B(k_0-p_j^{il}(t))/M}\times$$
$$\times\exp\left\{\delta t-c\sum_{\nu=1}^{n}(|x_\nu-\xi_\nu|/\alpha_\nu(t))^{q_\nu}\right\},$$

$t>0$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $2Bk_0+||k||\le r, l\in\mathbb{N}_{n_j}$, $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_s$, *де* $C_{k_0k}>0, c>0$*;* $\alpha_\nu,\nu\in\mathbb{N}_n$, –

деякі невід'ємні неспадні функції такі, що $\alpha_\nu(0)=0$ і $\alpha_\nu(t)\to\infty$ при $t\to\infty$, а p_0^{ij} і p_j^{il} – деякі кусково-сталі функції.

Основним результатом цієї статті є така теорема.

Теорема. *Нехай*

$$Z(t,x,\xi)=(Z_{ij}(t,x,\xi))_{i,j=1}^{s},$$

$t>0$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, – ФМР системи (1), яка задовольняє $\Lambda_\delta^{1,r}$-умову з $\delta\in\mathbb{R}$, $\alpha_\nu(t)=t^{1/(2b_\nu)}$, $t>0$, і

$$p_0^{ij}(t)=\begin{cases} p_{01}^{ij}, & t\le 1,\\ p_{02}^{ij}, & t>1.\end{cases}$$

Тоді формулою

$$E^\mu(x,\xi)=\int\limits_0^\infty e^{-\mu\beta}Z(\beta,x,\xi)d\beta,$$

$$\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n\setminus\{x=\xi\}, \tag{8}$$

визначається ФМР системи (3) з $\mu\in\mathbb{C}$ таким, що $Re\ \mu>\delta$. Для елементів E_{ij}^μ, $\{i,j\}\subset\mathbb{N}_s$, матриці E^μ справджуються оцінки

$$|\partial_x^k E_{ij}^\mu(x,\xi)|\le$$

$$\le\begin{cases} C, & M+||k||<2B(p_{01}^{ij}+1),\\ C\ln|x-\xi|_q^{-(2B-1)/(2B)}+C_1, & \\ & M+||k||=2B(p_{01}^{ij}+1),\\ C|x-\xi|_q^{2B(p_{01}^{ij}+1)-M-||k||}, & \\ & M+||k||>2B(p_{01}^{ij}+1),\end{cases} \tag{9}$$

$$|x-\xi|_q\le 1,$$

$$|\partial_x^k E_{ij}^\mu(x,\xi)|\le C\exp\{-h_\mu|x-\xi|_q^{2B/(2B-1)}\},$$

$$|x-\xi|_q>1, \tag{10}$$

$$||k||\le r,\ C>0,\ C_1>0,\ h_\mu>0.$$

Доведення. Спочатку доведемо, що інтеграл

$$I_{ij}^k\equiv\int\limits_0^\infty e^{-\mu\beta}\partial_x^k Z_{ij}(\beta,x,\xi)d\beta$$

збігається рівномірно щодо x при $\varepsilon\le|x-\xi|_q\le 1$, де ε –довільно фіксоване число з проміжку $(0,1)$, і для нього правильна оцінка (9).

Використовуючи оцінки для $G_0=Z$ з $\Lambda_\delta^{1,r}$-умови, маємо

$$I_{ij}^k\le C\int\limits_0^\infty \beta^{-(M+||k||)/(2B)+p_0^{ij}(\beta)}\times$$

$$\times\exp\{(\delta-Re\mu)\beta-c\sum_{\nu=1}^n|x_\nu-\xi_\nu|^{q_\nu}\beta^{1-q_\nu}\}d\beta=$$

$$=C\int\limits_0^1\beta^{-(M+||k||)/(2B)+p_{01}^{ij}}\times$$

$$\times\exp\{(\delta-Re\mu)\beta-c\sum_{\nu=1}^n|x_\nu-\xi_\nu|^{q_\nu}\beta^{1-q_\nu}\}d\beta+$$

$$+C\int\limits_1^\infty\beta^{-(M+||k||)/(2B)+p_{02}^{ij}}\times$$

$$\times\exp\{(\delta-Re\mu)\beta-c\sum_{\nu=1}^n|x_\nu-\xi_\nu|^{q_\nu}\beta^{1-q_\nu}\}d\beta\equiv$$

$$\equiv I_{ij1}^k+I_{ij2}^k.$$

За допомогою леми 7.1 з [6, с.42] одержуємо

$$I_{ij1}^k\le\int\limits_0^1\beta^{-(M+||k||-2Bp_{01}^{ij})/(2B)}\times$$

$$\times\exp\{-c\sum_{\nu=1}^n|x_\nu-\xi_\nu|^{q_\nu}\beta^{-1/(2B-1)}\}d\beta\le$$

$$\le\begin{cases} C, & M+||k||<2B(p_{01}^{ij}+1),\\ C\ln|x-\xi|_q^{-(2B-1)/(2B)}+C_1, & \\ & M+||k||=2B(p_{01}^{ij}+1),\\ C|x-\xi|_q^{2B(p_{01}^{ij}+1)-M-||k||}, & \\ & M+||k||>2B(p_{01}^{ij}+1).\end{cases} \tag{11}$$

Інтеграл I_{ij2}^k має оцінку

$$I_{ij2}^k\le C\int\limits_1^\infty\beta^{p_{02}^{ij}}\exp\{(\delta-Re\mu)\beta\}d\beta\le C_0. \tag{12}$$

З оцінок (11) і (12) випливає рівномірна при $\varepsilon \le |x-\xi|_q \le 1$ збіжність інтегралів I_{ij}^k і, отже, законність операції диференціювання в інтегралі (8), а також правильність оцінок (9).

Доведемо, що виконуються оцінки (10). Використавши оцінки ФМР для $G_0 = Z$ з $\Lambda_\delta^{1,r}$-умови, одержимо

$$|\partial_x^k E_{ij}^\mu(x,\xi)| \le C \int\limits_0^1 \beta^{p_0^{ij}(\beta)-(M+||k||)/(2B)} \times$$
$$\times \exp\left\{-\varepsilon \sum_{\nu=1}^n |x_\nu - \xi_\nu|^{q_\nu} \beta^{-1/(2B-1)}\right\} \times$$
$$\times \exp\left\{(\delta - Re\mu)\beta - \right.$$
$$\left. -(c-\varepsilon)\sum_{\nu=1}^n |x_\nu - \xi_\nu|^{q_\nu} \beta^{-1/(2B-1)}\right\} d\beta +$$
$$+C \int\limits_1^\infty \beta^{p_0^{ij}(\beta)-(M+||k||)/(2B)} \times$$
$$\times \exp\{(\delta - Re\mu)\varepsilon_1\beta\} \exp\{(\delta - Re\mu)(1-\varepsilon_1)\beta -$$
$$\left. -c\sum_{\nu=1}^n |x_\nu - \xi_\nu|^{q_\nu} \beta^{-1/(2b'-1)}\right\} d\beta,\ b' \equiv \min_{1\le\nu\le n} b_\nu.$$

Функція $\Psi(\beta) \equiv (\delta - Re\mu)\beta - c|x|_q \times \beta^{-1/(2r-1)}$, $\beta > 0$, набуває найбільшого значення в точці $\beta_0 \equiv c^{1/r'}(2r-1)^{-1/r'}(\delta - Re\mu)^{-1/r'}|x|_q^{1/r'}$, $r' \equiv 2r/(2r-1)$, яке дорівнює $\Psi(\beta_0) = -2r(2r-1)^{-1/r'}c^{1/r'}(\delta - Re\mu)^{1/(2r)}|x|_q^{1/r'}$. Використовуючи цей факт відповідно у випадках $r = b'$ і $r = B$, лему 7.1 з [6, с.42] і те, що $|x-\xi|_q > 1$, маємо

$$|\partial_x^l E_{ij}^\mu(x,\xi)| \le C \exp\{-2B(c-\varepsilon)^{1/Q} \times$$
$$\times(\delta - Re\mu)^{1/(2B)}(2B-1)^{1/Q}|x-\xi|_q^{1/Q}\} \times$$
$$\times \int\limits_0^1 \beta^{p_{01}^{ij}-(M+||k||)/(2B)} \times$$
$$\times \exp\{-\varepsilon|x-\xi|_q \beta^{-1/(2B-1)}\} d\beta +$$
$$+C\exp\{-2b'(2b'-1)^{1/q'}c^{1/q'}(\delta - Re\mu)^{1/(2b')} \times$$
$$\times(1-\varepsilon_1)^{1/(2b')}|x-\xi|_q^{1/q'}\} \times$$
$$\times \int\limits_1^\infty \beta^{p_{02}^{ij}-(M+||k||)/(2B)} \times$$
$$\times \exp\{(\delta - Re\mu)\varepsilon_1\beta\} d\beta \le$$
$$\le C\exp\{-h_\mu|x-\xi|_q^{1/Q}\},$$

де $q' \equiv 2b'/(2b'-1)$, $Q \equiv 2B/(2B-1)$, $h_\mu > 0$.

Доведемо, що функція (8) є ФМР системи (3). Оскільки $G \equiv (G_0, G_1, ..., G_s)$ – МГ задачі Коші для системи (1), то для довільних досить гладких і фінітних функцій f_i та φ_j^l, $l \in \mathbb{N}_{n_j}$, $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_s$, компоненти розв'язку u системи (1) мають зображення (5).

Далі, оскільки система (1) стаціонарна, то розв'язок $v^\mu \equiv (v_1^\mu, ..., v_s^\mu)'$ $\overrightarrow{2b}$-еліптичної системи (3) буде задовольняти систему (2) з $f(t,x) = g(x)$ та початкові умови (4) з $\varphi_i^1 = v_i^\mu$ і $\varphi_i^l = 0$ для $l > 1$. Тому згідно з (5) і (6) для v_i^μ, $i \in \mathbb{N}_s$, правильні зображення (7). Здійснивши в них заміну $t - \tau = \beta$, одержимо такі формули для компонент розв'язку v^μ:

$$v_i^\mu(x) = \sum_{j=1}^s \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_0^t e^{-\mu\beta} Z_{ij}(\beta,x,\xi) d\beta \right) \times \right.$$
$$\times g_j(\xi) d\xi +$$
$$\left. + \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\mu t} G_j^{i1}(t,x,\xi) v_j^\mu(\xi) d\xi \right),$$
$$x \in \mathbb{R}^n,\ i \in \mathbb{N}_s. \qquad (13)$$

Зображення (13) правильні для довільного $t > 0$, тому природно перейти в них до границі при $t \to \infty$. За припущень, зроблених в теоремі, такий граничний перехід можливий і його результатом є зображення

$$v_i^\mu(x) = \sum_{j=1}^s \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\int\limits_0^\infty e^{-\mu\beta} Z_{ij}(\beta,x,\xi) d\beta \right) g_j(\xi) d\xi,$$
$$x \in \mathbb{R}^n,\ i \in \mathbb{N}_s. \qquad (14)$$

Справді, проведемо оцінку для $t > 1$ інтеграла

$$J_{ij}^t \equiv \int\limits_t^\infty d\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\mu\beta} Z_{ij}(\beta,x,\xi) g_j(\xi) d\xi,$$

$$\{i,j\} \subset \mathbb{N}_s,$$

враховуючи обмеженість g та використовуючи оцінки з $\Lambda_\delta^{1,r}$-умови. Одержимо

$$|J_{ij}^t| \le C \int\limits_t^\infty \beta^{p_0^{ij}(\beta)-M/(2B)} e^{(\delta - Re\mu)\beta} \times$$

$$\times \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ -c \sum_{\nu=1}^n |x_\nu - \xi_\nu|^{q_\nu} \beta^{1-q_\nu} \right\} \times$$

$$\times |g_j(\xi)| d\xi \Bigg) d\beta \le$$

$$\le C \int\limits_t^\infty \beta^{p_{02}^{ij}} e^{(\delta - Re\mu)\beta} d\beta \to 0, \ t \to \infty, \qquad (15)$$

бо $Re\ \mu > \delta$.

Розглянемо для $t > 1$ інтеграл

$$K_{ij}^t \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\mu t} G_j^{i1}(t,x,\xi) v_j^\mu(\xi) d\xi, \ \{i,j\} \subset \mathbb{N}_s.$$

Використавши оцінки з $\Lambda_\delta^{1,r}$-умови та обмеженість v_j^μ, одержимо

$$|K_{ij}^t| \le C e^{(\delta - Re\mu)t} t^{p_j^{i1}(t) - M/(2B)} \times$$

$$\times \int\limits_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ -c \sum_{\nu=1}^n |x_\nu - \xi_\nu|^{q_\nu} \beta^{1-q_\nu} \right\} |v_j^\mu(\xi)| d\xi \le$$

$$\le C e^{(\delta - Re\mu)t} t^{p_j^{i1}(t)} \to 0, \ t \to \infty. \qquad (16)$$

Із співвідношень (15) і (16) випливає правильність формули (14) і, отже, те, що функція (8) є ФМР системи (2).

Зауваження 1. *Таким чином, формула (8) визначає ФМР тих $\overrightarrow{2b}$-еліптичних систем із в'язки (3), які відповідають комплексному параметру μ такому, що $Re\ \mu > \delta$. Якщо $Re\ \mu = \delta$, то міркуваннями, аналогічними проведеним при доведенні теореми, можна довести, що у випадку, коли $M > 2B(p_{01}^{ij}+1), \{i,j\} \subset \mathbb{N}_s$, ФМР E^μ системи (3) також визначається формулою (8) і для неї при $|x-\xi|_q \le 1$ справджуються оцінки (9), а при $|x-\xi|_q > 1$ – оцінки*

$$|\partial_x^k E_{ij}^\mu(x,\xi)| \le C |x-\xi|_q^{2B(p_{02}^{ij}+1)-M-||k||},$$

$$||k|| \le r, \quad \{i,j\} \subset \mathbb{N}_s.$$

Розглянемо випадок, коли $Re\ \mu = \delta$ і $M \le 2B(p_{01}^{ij}+1)$ принаймні для однієї пари $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_s$. Інтеграл (8) у цьому випадку розбігається. Для параболічних за Петровським систем зі сталими коефіцієнтами у працях [6, 7] пропонувалася регуляризація розбіжного інтеграла за допомогою многочленів, які є частинними сумами рядів Тейлора для функцій Z_{ij}, $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_s$.

У нашому випадку регуляризацію інтеграла (8) можна здійснювати аналогічним способом, тобто елементи ФМР E^μ системи (3) можна визначати формулами

$$E_{ij}^\mu(x,\xi) = \int\limits_0^\infty e^{-\mu\beta} \Big(Z_{ij}(\beta,x,\xi) -$$

$$- P_{2B(p_{01}^{ij}+1)-M}(Z_{ij})(\beta,x,\xi) \Big) d\beta, \qquad (17)$$

де для функції $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ і $l \ge 0$

$$P_l(h)(x) \equiv \sum_{||m|| \le l} \frac{(x-y)^m}{m!} \times$$

$$\times \partial_y^m h(y), \ x \in \mathbb{R}^n, \qquad (18)$$

y — фіксована точка з $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, а для $l < 0$ $P_l(h) \equiv 0$.

Зауваження 2. *Згідно з результатами [8, 9] умови теореми для системи (1) виконуються, зокрема, в таких випадках:*

а) $A_{ij}(x,\partial_t,\partial_x) \equiv \delta_{ij}\partial_t^{n_j} - \sum\limits_{\substack{2Bk_0+||k||=2Bn_j \\ 0\le k_0<n_j}} a_{k_0k}^{ij} \partial_t^{k_0} \partial_x^k$, *де* $a_{k_0k}^{ij}$ – *сталі,* $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_s$ *(виконується* $\Lambda_0^{1,\infty}$*-умова з* $\alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $p_0^{ij}(t) = n_i - 1, \ t > 0$*);*

б) $A_{ij}(x,\partial_t,\partial_x) \equiv \delta_{ij}\partial_t^{n_j} - \sum\limits_{\substack{2Bk_0+||k||\le 2Bn_j \\ 0\le k_0<n_j}} a_{k_0k}^{ij} \partial_t^{k_0} \partial_x^k$, *де* $a_{k_0k}^{ij}$ – *сталі,* $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_s$, *а дійсні частини λ-коренів рівняння* $det(A_{lj}(\lambda, i\sigma))_{l,j=1}^s = 0$ *(тут i – уявна одиниця), не дорівнюють нулеві для всіх* $\sigma \in \mathbb{R}^n$ *(виконується* $\Lambda_\delta^{1,\infty}$*-умова з* $\delta < 0, \ \alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $p_0^{ij}(t) = n_i - 1, \ t > 0$*);*

в) система (1) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічна, її коефіцієнти $a_{k_0k}^{ij}$ разом з *похідними* $\partial_x^k a_{k_0 k}^{ij}, ||k|| \le 2Bn_j$, $\{i,j\} \subset \mathbb{N}_s$, *обмежені та задовольняють рівномірну умову Гельдера в* $\mathbb{R}^n$ *(виконується* $\Lambda_\delta^{1,r}$*-умова з деяким* $\delta > 0$, $r = \min\limits_{1\le j\le s}(2Bn_j)$, $\alpha_\nu(t) = t^{1/(2b_\nu)}$, $p_0^{ij}(t) = n_i - 1,\ t > 0$*).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Оценки решений параболических систем и некоторые их приложения // Мат. сб.— 1953.— **33**, N 2.— C.359—382.

2. *Эйдельман С.Д.* О связи между фундаментальными матрицами решений параболических и эллиптических систем // Мат. сб.— 1954.— **35**, N 1.— C.57—72.

3. *Эйдельман С.Д.* О некоторых свойствах решений параболических систем // Укр. мат. журн.— 1956.— **8**, N 2.— C.191—207.

4. *Эйдельман С.Д.* Лиувиллевы теоремы и теоремы об устойчивости для решений параболических систем // Мат. сб.— 1958.— **44**, N 4.— C.481—508.

5. *Эйдельман С.Д.* О фундаментальных решениях параболических систем. II // Мат. сб.— 1961.— **53**, N 1.— C.73—136.

6. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 443 с.

7. *Івасишин Л.М.* Дослідження якісних властивостей розв'язків параболічних систем високого порядку по часовій змінній у півпросторі $\mathbb{R}_+^{n+1}$ // Доп. НАН України.— 1998.— N 1.— C.17—23.

8. *Balabushenko T.M.* On estimates of Green matrix of the Cauchy problem for $\overrightarrow{2b}$-parabolic systems in unbounded with respect to time variable domains and their applications // Intern. Conf. "Nonlinear partial differential equations" (Kyiv, August 22-28, 2001): Book of abstracts.— Donetsk, 2001.— P.13.

9. *Балабушенко Т.М.* Про оцінки в необмежених відносно часової змінної областях фундаментальної матриці розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем // Мат. студії.— 2002.— **17**, N 2.— C.163—174.

10. *Федорук В.В.* О связи между фундаментальными матрицами решений $\overrightarrow{2b}$-параболической и $\overrightarrow{2b}$-эллиптической систем // Тезисы докладов XX научной сессии ЧГУ. Секция мат. наук.— Черновцы, 1964.— C.52—53.

11. *Конёнков А.Н.* О связи между фундаментальными решениями эллиптических и параболических уравнений // Дифференц. уравнения.— 2002.— **38**, N 2.— C.247—256.

12. *Івасишен С.Д., Кондур О.С.* Про матрицю Гріна задачі Коші та характеризацію деяких класів розв'язків для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем довільного порядку // Мат. студії.— 2000.— **14**, N 1.— C.73—84.

Стаття надійшла до редколегії 20.01.2003