УДК 519.21

©2002 р. Є.Ф. Царков[1], М.Л. Свердан[2]

[1]Ризький технічний університет, Рига, Латвія
[2]Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

КВАДРАТИЧНІ ФУНКЦІОНАЛИ ДЛЯ ФУНКЦІОНАЛЬНО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглянуто метод побудови квадратичних функціоналів Ляпунова для аналізу стійкості квазілінійних функціонально-диференціальних рівнянь. Цей підхід грунтується на аналізі півгрупи лінійного оператора, який діє в частково впорядкованому просторі зліченної адитивної симетричної матричнозначної міри. Слабкий інфінітезимальний оператор цієї півгрупи допомагає знайти додатню матричну міру для побудови квадратичного функціоналу, який описує необхідні та достатні умови експоненціальної стійкості лінійного функціонально-диференціального рівняння. Показано, як цей квадратичний функціонал може успішно застосовуватися для аналізу стійкості квазілінійного рівняння.

The paper proposes method of quadratic Lyapunov functional construction for stability analysis of quasilinear functional differential equations. The approach is based on analysis of linear operator semigroup, which is acting in the partially ordered space of countable additive symmetric matrix-valued measures. The weak infinitesimal operator of this semigroup helps to find a positive matrix measure for construction of a quadratic functional, that defines necessary and sufficient condition of exponential stability for linear functional differential equation. It is shown how this quadratic functional can be successfully applied for stability analysis of quasilinear equation.

1. Вступ. Добре відомо, що другий метод Ляпунова є потужним засобом аналізу збурень динамічних систем (див., наприклад, [1,3,5,6,8,11]). Введений Ляпуновим на початку минулого століття для звичайних диференціальних рівнянь, цей метод був узагальнений і адаптований багатьма авторами до динамічного аналізу різницевих рівнянь, функціонально-диференціальних рівнянь (ФДР), диференціальних рівнянь з частинними похідними, стохастичних диференціальних рівнянь, марковських динамічних систем та багатьох інших динамічних об'єктів. Нагадаємо, описаний в [1] алгоритм другого методу Ляпунова, який застосовується до аналізу збурень ФДР

$$\frac{d}{dt}x_t = f(x_t) + g(t, x_t), \tag{1}$$

де $x_t := \{x(t+\theta), -h \leq \theta \leq 0\}$. Щоб застосувати другий метод Ляпунова (введений для ФДР (1) М. Красовським у [3]), потрібно вибрати залежний від часу t та неперервної функції $\varphi(\theta)$ неперервний функціонал $v(t, \varphi)$, підставити $t+s$ замість першого аргумента t, замінити другий аргумент φ на розв'язок $x(t{+}s, t, \varphi)$ рівняння (1) з початковою функцією φ, заданої у час t, і обчислити так звану *похідну за Ляпуновим в силу розв'язку рівняння* (1):

$$(\mathbf{L}v)(t, \varphi) :=$$
$$:= \lim_{s \to +0} \frac{v(t+s, x(t+s, t, \varphi)) - v(t, \varphi)}{s}. \tag{2}$$

Ті ж самі кроки потрібно здійснити, обчислюючи похідну за Ляпуновим $\mathbf{L_0}v$ в силу незбуреної системи

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f(\hat{x}_t) := \int_{-h}^{0} \{dF(\theta)\}\hat{x}(t+\theta), \tag{3}$$

де $n \times n$-вимірна матриця $F(\theta)$ складається з функцій обмеженої варіації $F_{ij}(\theta)$, $i, j \div 1, n$. Різниця $(\mathbf{L}v)(t, \varphi) - (\mathbf{L}_0 v)(t, \varphi)$ лінійно залежить від збурення $g(t, \varphi)$. Ця функція повинна допомогти нам з динамічним аналізом системи (1). Очевидно, що для успішного застосування вищезгаданого методу необхідно вибрати досить гладкий функціонал $v(t,\varphi)$, який дозволить не тільки обчислити похідну за Ляпуновим в силу (3) $(\mathbf{L}_0 v)(t,\varphi)$, але й оцінити різницю $(\mathbf{L}v)(t,\varphi) - (\mathbf{L}_0 v)(t,\varphi)$ у формі, зручній для подальшого аналізу. Крім цього, функціонал, який використовується для аналізу асимптотичної стійкості (1), повинен мати [1] "інфінітезимальну границю при $|\varphi| \to 0$", тобто $\lim\limits_{|\varphi(0)|\to 0} \sup\limits_{t\geq 0} v(t,\varphi) = 0$ та "нескінченну границю при $||\varphi|| \to \infty$", тобто $\lim\limits_{||\varphi||\to\infty} \inf\limits_{t\geq 0} v(t,\varphi) = \infty$ (*функціонал Ляпунова-Красовського*). Саме тому для аналізу збурення квазілінійного ФДР (1) [1] рекомендує застосувати неперервні квадратичні (за φ) функціонали, які:

1) задовольняють нерівність $|\varphi(0)|^2 \leq v(t,\varphi)$ для всіх $t \geq 0$ та неперервних функцій φ;

2) дозволяють досить просто обчислити похідну за Ляпуновим в силу незбуреної системи (3) $(\mathbf{L_0}v)(t,\varphi)$.

Ми будемо називати ці функціонали *квадратичними функціоналами Ляпунова-Красовського*. Зрозуміло, що дуже корисно мати такий квадратичний функціонал, який найкращим чином використовує зображення незбуреного рівняння (3) та збурень $g(t,\varphi)$ в (1). У цій статті запропоновано метод побудови вищезгаданого квадратичного функціонала Ляпунова-Красовського, який грунтується на розв'язанні рівняння Ляпунова

$$(\mathbf{L}_0 v)(\varphi) = -u(\varphi) \tag{4}$$

для заданого квадратичного функціонала $u(\varphi)$. Ми будемо здійснювати це в наступному розділі, вивчаючи простір $\mathbf{C}^*(Q)$ зліченних адитивних симетричних матричнозначних мір на квадраті $Q := \{-h \leq \theta_1 \leq 0, -h \leq \theta_2 \leq 0\}$, частково впорядкований за допомогою спеціальним чином створеного конуса. У третьому розділі ми проаналізуємо спеціально створену півгрупу лінійних неперервних операторів [2], визначених лінійним функціональним рівнянням у просторі $\mathbf{C}^*(Q)$. Четвертий розділ вивчає рівняння Ляпунова для лінійного детермінованого функціонально-диференціального рівняння (3), як операторне рівняння в $\mathbf{C}^*(Q)$. Ми доведемо, що розв'язки цього рівняння визначають квадратичні оператори, які можуть бути використані не тільки для аналізу збурень квазілінійного ФДР. Останній розділ пояснює запропонований алгоритм побудови функціонала Ляпунова-Красовського для лінійного скалярного ФДР.

2. Конус додатних квадратичних функціоналів. Нехай $\mathbf{M}_n$ — простір симетричних $n \times n$-вимірних матриць і $\mathcal{C} := \mathbf{C}(Q \to \mathbf{M}_n)$, тобто простір неперервних матричних функцій $q(\theta_1,\theta_1)$, які задовольняють умову симетрії $q^T(\theta_1,\theta_2) = q(\theta_2,\theta_1)$ для всіх $\{\theta_1,\theta_2\} \in Q$ з нормою, визначеною за допомогою рівності

$$||q|| := \sup_{\{\theta_1,\theta_2\}\in Q} \sqrt{\mathrm{Sp}\,\{q^T(\theta_1,\theta_2)q(\theta_1,\theta_2)\}}. \tag{5}$$

Згідно з теоремою Рісса, множина лінійних неперервних функціоналів $\mathcal{E}^*$ є ізометрично ізоморфною до простору матричнозначних зліченних адитивних функцій борелевих підмножин квадрату Q. Скалярний добуток елементів $q \in \mathcal{C}$ та $\mu \in \mathcal{C}^*$ визначений рівністю

$$[\mu, q] := \iint\limits_Q \mathrm{Sp}\,\{q(\theta_2,\theta_1)\mu(d\theta_1,\theta_2)\}, \tag{6}$$

де Sp — слід матриці.

Оскільки інтеграл у правій частині останньої рівності має зміст для довільної вимірної матричнозначної функції $q \in \mathbf{B}(Q \to \mathbf{M}_n)$, то ми збережемо вищезгадану систему позначень для цього випадку. Кожен елемент $\mu \in \mathcal{C}^*$ можна розглядати як лінійний неперервний оператор, що діє з простору $\mathbf{C}_n([-h,0])$ у простір $\mathbf{C}^*_n([-h,0])$ згідно з таким правилом:

$$(\mu\varphi)(A) := \int\limits_{-h}^{0} \mu(A, d\theta)\varphi(\theta),$$

де A — елемент σ-алгебри борелевих підмножин відрізка $[-h,0]$. Позначимо $< l,\varphi >$ скалярний добуток елементів $l \in \mathbf{C}_n^*([-h,0])$ та $\varphi \in \mathbf{C}_n([-h,0])$:

$$< L,\varphi >:= \int_{-h}^{0} l^T(d\theta)\varphi(\theta).$$

Використовуючи вищенаведені формули, можна ввести до розгляду білінійний функціонал на $\mathbf{C}_n([-h,0])$, визначений для довільного $\mu \in \mathcal{C}^*$ рівністю

$$< \mu\varphi,\psi >:= \iint_Q \varphi^T(\theta_2)\mu(d\theta_1,\theta_2)\psi(\theta_1). \quad (7)$$

Аналогічно, якщо $q \in \mathcal{C}$ і $x \in \mathbf{C}_n^*([-h,0])$, тоді можна ввести оператор $q : \mathbf{C}_n^*([-h,0]) \to \mathbf{C}_n([-h,0])$, який діє згідно з таким правилом:

$$(qx)(\theta) := \int_{-h}^{0} q(\theta,s)x(ds)$$

та визначає білінійну форму в $\mathbf{C}_n^*([-h,0])$

$$< x,qy > (\theta) := \iint_Q x^T(d\theta_1)q(\theta_1,\theta_2)y(d\theta_2)$$

для довільних $x,y \in \mathbf{C}_n^*([-h,0])$. Права частина останньої рівності має зміст для довільної обмеженої вимірної матричнозначної функції та може бути використана також для цих q. Для довільних двох елементів $\varphi,\psi \in \mathbf{C}_n([-h,0])$ і $x,y \in \mathbf{C}_n^*([-h,0])$ можна визначити їх тензорний добуток

$$\forall\,\theta_1 \in [-h,0]\ \forall\,\theta_2 \in [-h,0]:$$

$$(\varphi\otimes\psi)(\theta_1,\theta_2) := \psi(\theta_1)\varphi^T(\theta_2),$$

$$\forall\,A \in \Sigma_{[-h,0]}\ \forall\,B \in \Sigma_{[-h,0]}:$$

$$(x\otimes y)(A,B) := x(A)y^T(B),$$

і легко перевірити виконання таких рівностей:

$$\forall\mu \in \mathcal{C}^*:\ [\mu,\varphi\otimes\psi] =< \mu\varphi,\psi >,$$

$$\forall q \in \mathcal{C}:\ [\varphi\otimes\psi,q] =< x,qy >,$$

$$[\varphi\otimes\psi,x\otimes y] =< y,\varphi >< x,\psi > .$$

Лема 1. *Множина*

$$\mathbf{K} := \{q \in \mathcal{C} :< x,qx >\geq 0\ \forall\,x \in \mathbf{C}_n^*([-h,0])\}$$

майже відтворює конус [4] у $\mathcal{E}$, тобто

1) $\forall q_1 \in \mathbf{K}$, $\forall q_2 \in \mathbf{K} : q_1 + q_2 \in \mathbf{K}$;

2) $\forall q \in \mathbf{K}$, $\forall\alpha \geq 0 : \alpha q \in \mathbf{K}$;

3) $q \in \mathbf{K}$ та $-q \in \mathbf{K}$, включаючи $q = 0$;

4) $\mathcal{C}$ — замикання $\overline{\mathcal{L}(\mathbf{K})}$ з множини лінійної комбінації елементів $\mathbf{K}$.

Доведення. Твердження 1)—3) — тривіальний наслідок означення $\mathbf{K}$. Для простоти доведемо твердження 4) для $n = 1$. Позначимо

$$\mathbf{K}_0 = \{\varphi\otimes\psi,\ \varphi \in \mathcal{C},\ \psi \in \mathcal{C}\}$$

і припустимо, що $\mathcal{L}(\mathbf{K}_0) \subset \mathcal{L}(\mathbf{K})$ є лінійною оболонкою $\mathbf{K}_0$. Зрозуміло, що $\mathcal{L}(\mathbf{K}_0)$ містить одиничну функцію, добуток двох елементів $\mathcal{L}(\mathbf{K}_0)$ є елементом $\mathcal{L}(\mathbf{K}_0)$. Крім цього, для довільних двох різних точок $\{\theta_1^{(1)},\theta_2^{(1)}\} \in Q$ та $\{\theta_1^{(2)},\theta_2^{(2)}\} \in Q$ можна вибрати такі функції $q_1,q_2 \in \mathbf{K}_0$, що $q_1(\theta_1^{(1)},\theta_2^{(1)}) \neq Q_2(\theta_1^{(2)},\theta_2^{(2)})$ (множина відокремлюється точками з Q). Звідси, згідно з широковідомою теоремою Стоуна-Вейєрштрасса [9] випливає, що $\overline{\mathcal{L}(\mathbf{K}_0)} = \mathbf{C}(Q)$. Лема 1 доведена.

Крім норми (5), введемо в просторі $\mathcal{E}$ норму

$$||q||_1 := \max_{\substack{1\leq k,j\leq n\\ \{\theta_1,\theta_2\}\in Q}} |q_{kj}(\theta_1,\theta_2)|. \quad (8)$$

Лема 2. *Норма (8) є монотонною відносно конуса $\mathbf{K}$, тобто $q \in \mathbf{K}$, $p \in \mathbf{K}$, включаючи нерівність $||q||_1 \leq ||q+p||_1$.*

Доведення. Якщо $q \in \mathbf{K}$, то білінійна форма $< l_1,ql_2 >$ на просторі $\mathcal{C}^*$ є невід'ємною та квадратична форма $< l,\,ql >$ є симетричною. Отже, задана рівністю (8) норма для довільних $p,q \in \mathbf{K}$ може бути оцінена формулою

$$||q+p||_1 := \max_{\substack{1\leq k\leq n\\ \theta\in[-h,0]}} (q_kk(\theta,\theta) + p_{kk}(\theta,\theta)) \geq$$

$$\geq \max_{\substack{1\leq k\leq n \\ \theta\in[-h,0]}} q_{kk}(\theta,\theta)$$

внаслідок невід'ємності функцій $p_{kk}(\theta,\theta)$ для всіх $k \div 1, n$.

Разом із $\mathbf{K}$ розглянемо спряжений конус [4] $\mathbf{K}^*$:

$$\mathbf{K}^* := \{\mu \in \mathcal{E}^* : [\mu, q] \geq 0 \; \forall \, q \in \mathbf{K}\}.$$

Наслідок 1. *Кожен елемент μ конуса $\mathbf{K}^*$ є симетричною матричнозначною мірою й визначає додатні квадратичні функціонали $< \mu\varphi, \varphi >$ на просторі $\mathbf{C}_n([-h,0])$ або $\mathbf{B}_n([-h,0])$.*

Назвемо $\mathbf{K}^*$-*конусом додатних квадратичних функціоналів*. Нескладно перевірити, що елементи $\mathbf{K}^*$ задовольняють нерівності

$$< \mu\varphi, \psi >^2 \leq < \mu\varphi, \varphi >< \mu\psi, \psi >, \quad (9)$$

$$2| < \mu\varphi, \psi > | \leq$$
$$\leq \alpha < \mu\varphi, \varphi > + \alpha^{-1} < \mu\psi, \psi > \quad (10)$$

для довільного $\varphi, \psi \in \mathbf{C}_n([-h,0])$ і $\alpha > 0$. Назвемо $\mu \in \mathbf{K}^*$ *строго додатним квадратичним функціоналом*, якщо рівність $< \mu\varphi, \varphi >$ включає $\varphi = 0$. Конус $\mathbf{K}^*$ є відтворюваним [4], тобто для довільного $\mu \in \mathcal{E}^*$ можна знайти такі $\mu_1, \mu_2 \in \mathbf{K}^*$, що $\mu = \mu_1 - \mu_2$.

Доведення випливає з [4], оскільки, згідно із вищезгаданою лемою, конус $\mathbf{K}^*$ спряжений до нормального конуса $\mathbf{K}$.

3. Розв'язна півгрупа для лінійного ФДР у просторі $\mathcal{E}$. Для довільних лінійних неперервних операторів $A \in \mathbf{L}(\mathbf{C}_n([-h,0]))$, $B \in \mathbf{L}(\mathbf{C}_n([-h,0]))$ та довільної $\varphi \in \mathbf{C}_n^*([-h,0])$, $\psi \in \mathbf{C}_n^*([-h,0])$ визначимо *добуток тензорного оператора* рівністю

$$(A \otimes B)(\varphi \otimes \psi) := (A\varphi) \otimes (B\psi)$$

та лінійно розширимо його на множину

$$\mathcal{E}_0 := \mathcal{L}(\{\varphi \otimes \psi, \; \varphi, \psi \in \mathbf{C}_n([-h,0])\}) \subset \mathcal{E},$$

зберігаючи позначення $A \otimes B$. Оскільки

$$||(A\otimes)B(\varphi \otimes \psi)|| = ||A\varphi|| ||B\psi||,$$

то можна легко показати, що

$$||A \otimes B|| = ||A|| ||B||$$

і довести таке твердження.

Лема 3. *Якщо послідовності лінійних неперервних операторів $\{A_m, m \in \mathbf{N}\} \in (L\mathbf{C}_n([-h,0]))$, $\{B_m, m \in \mathbf{N}\} \in \mathbf{L}(\mathbf{C}_n([-h,0]))$ збігаються в сильній топології оператора до деяких операторів A і B, тоді послідовність тензорних добутків $\{A_m \otimes B_m, m \in \mathbf{N}\} \in (L\mathcal{E})$ збігається в сильній топології оператора до деякого лінійного неперервного оператора, який також буде позначатися як тензорний добуток $A \otimes B$.*

Використовуючи цей результат, введемо до розгляду лінійну неперервну півгрупу $\{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ на просторі $\mathcal{E}$, задану лінійним ФДР (1). Згідно з [1], [2], це рівняння породжує на просторі $\mathbf{C}_n([-h,0])$ неперервну півгрупу $\{\mathbf{X}(t), t \geq 0\}$ із класу $\mathbf{C}_0$, визначеного рівностями

$$\forall \, t \geq 0 \; \forall \, \varphi \in \mathbf{C}_n([-h,0]) \; \forall \, \theta \in [-h,0] :$$

$$(\mathbf{X}(t)\varphi)(\theta) = x(t+\theta, \varphi),$$

де $\{x(t,\varphi)\}$ — розв'язок (1) із початковою умовою $x(s,\varphi) = \varphi(s)$, $s \in [-h,0]$. Позначимо $\mathbf{S}(t) := \mathbf{X}(t) \otimes \mathbf{X}(t)$.

Лема 4. *Сім'я операторів $\{\mathbf{S}(t), t \geq 0\}$ — строго неперервна півгрупа на $\mathcal{E}$ з інфінітезимальним оператором $\mathbb{A}$, визначеним на $q \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ як матрична функція з елементами $\{(\mathbb{A}q)_{ij}(\theta_1,\theta_2), \; j,k \div 1,n\}$, заданими рівностями*

$$(\mathbb{A}q)_{ij}(\theta_1,\theta_2) =$$

$$= \begin{cases} \left(\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}+\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\right) q_{ij}(\theta_1,\theta_2), \\ \qquad\qquad -h \le \theta_1 < 0, -h \le \theta_2 < 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_1} q_{ij}(\theta_1,0) + \sum\limits_{k=1}^{n} q_{ik}(\theta_1,\theta) F_{jk}(d\theta), \\ \qquad\qquad -h \le \theta_1 < 0, \theta_2 = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_1} q_{ij}(0,\theta_2) + \sum\limits_{k=1}^{n} q_{kj}(\theta,\theta_2) F_{ik}(d\theta), \\ \qquad\qquad \theta_1 = 0, -h \le \theta_2 < 0, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} q_{ik}(0,\theta) F_{jk}(d\theta) + q_{kj}(\theta,0) F_{ik}(d\theta)), \\ \qquad\qquad \theta_1 = 0, \theta_2 = 0. \end{cases}$$

Крім цього, для $t \ge h$ оператор $\mathbf{S}(t)$ компактний.

Доведення. Оскільки $\mathbf{S}(t) = \mathbf{X}(t)\times\mathbf{X}(t)$, тоді твердження леми 4 — простий наслідок відповідних властивостей сильно неперервної півгрупи $\{\mathbf{X}(t)\}$ та обчислення інфінітезимального оператора $\mathbb{A}$ на довільному елементі $q \in \mathcal{D}(\mathbb{A}) \cap \mathbf{K}_0$.

Теорема 1. *Спектр $\sigma(\mathbb{A})$ оператора $\mathbb{A}$ володіє такими властивостями:*

1) для довільного $b \in \mathbf{R}$ множина $\{\Re z \ge b\} \cap \sigma(\mathbb{A})$ є порожньою або складається зі скінченної кількості точок;

2) для довільної точки спектра $\alpha \in P\sigma(\mathbb{A})$ кореневий підпростір оператора $\mathbb{A} - \alpha I$ має скінченну розмірність;

3) $\sigma(\mathbb{A}) = P\sigma(\mathbb{A})$;

4) число $\sup \Re\{\sigma(\mathbb{A})\} := \omega_0$ — власне значення оператора $\mathbb{A}$. Воно визначає тип півгрупи $\{\mathbf{S}(t)\}$, тобто $\omega_0 = \lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{1}{t} \ln ||\mathbf{S}(t)||$;

5) $\operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \omega_0 I) \cap \mathbf{K} = \emptyset$.

Доведення. Перше та друге твердження теореми 1 випливають із відомих рівностей для строго неперервної півгрупи [2]: $\exp\{t\sigma(\mathbb{A})\} \subset \sigma(\mathbf{S}(t))$ і $P\sigma(\mathbf{S}(t)) = \exp\{tP\sigma(\mathbb{A})\}$.

Припустимо, що 3) не виконується, тобто існує $\alpha_0 = \gamma_0 + I\beta_0 \in \backslash P\sigma(\mathbb{A})$. Із 1) випливає, що $\mathbb{A}$ має тільки скінченну кількість власних значень з дійсною частиною $\Re\alpha_0 = \gamma_0$: $\alpha_1 = \gamma_0 + i\beta_1$, $\alpha_2 = \gamma_0 + i\beta_2$, ..., $\alpha_m = \gamma_0 + i\beta_m$. Виберемо $t_0 \ge h$ так, щоб воно було неспіввимірним з кожним із чисел $2\pi/(\beta_k - \beta_0), k \div 1, m$. З рівностей $\sigma(\mathbf{S}(t_0)) = P\sigma(\mathbf{S}(t_0)) = \exp\{t_0 P\sigma(\mathbb{A})\}$ випливає, що $\exp\{t_0\alpha_0\}$ дорівнює одному з чисел $\exp\{t_0\alpha_k\}$ $k \div 1, m$, тобто $(\beta_0 - \beta_k)t_0$ кратне 2π, що суперечить вибору t_0.

Доведемо четверте твердження теореми. Оскільки $\max\{|z| : z \in \sigma(\mathbf{S}(h))\} = \exp(\max\{h\Re\alpha : \alpha \in \sigma(\mathbb{A})\}$, тоді можна одержати:

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \lim_{m\to\infty} \frac{1}{mh} ||(\mathbf{S}(h))^m|| = \\ &= \frac{1}{h} \ln \lim_{m\to\infty} ||(\mathbf{S}(h))^m||^{1/m} = \\ &= \frac{1}{h} \ln \max\{|z| : z \in \sigma(\sigma(\mathbf{S}(h)))\} = \\ &= \max\{\Re\alpha : \alpha \in \sigma(\mathbb{A})\}. \end{aligned}$$

Відома теорема Крейна-Рутмана [4] твердить, що компактний оператор, який залишає як інваріант майже твірний конус у банаховому просторі, має додатне дійсне власне значення, яке дорівнює спектральному радіусу. Отже, для всіх $t \ge 0$ оператор $\mathbf{S}(t)$ має найбільше (за модулем) власне значення r_t і, як було доведено раніше, $r_t = \exp\{t\omega_0\}$. Нехай $\omega_0 \notin \sigma(\mathbb{A})$ та $\{\omega_0 + i\beta_1, \omega_0 + i\beta_2, ..., \omega_0 + i\beta_m\}$ — всі власні значення оператора $\mathbb{A}$, дійсна частина спектральної точки якого дорівнює ω_0. Вибираючи $t \ge h$ неспіввимірним з $2\pi/\beta_k$, $k \div 1, m$, одержуємо протиріччя. Отже, твердження 4) доведено.

Згідно з теоремою Крейна-Рутмана [4], власні значення $q^{(t)} \in \mathbf{K}$ такі, що $\mathbf{S}(t)q^{(t)} = e^{\omega_0 t}q^{(t)}$ для всіх $t \ge h$ збігаються до r_t. Використовуючи раніше вибране число t, одержимо:

$$\begin{aligned} &\operatorname{Ker}\left(\mathbf{S}(t) - e^{\omega_0 t} I\right) = \\ &= \bigcup_{j\in\mathbf{N}} \operatorname{Ker}\left(\mathbb{A} - \left(\omega_0 - \frac{2\pi(j-1)}{t}\right) I\right) \\ &= \operatorname{Ker}(\mathbb{A} - \omega_0 I), \end{aligned}$$

оскільки $2\pi/t \notin \{\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m\}$. Отже, $q^{(t)} \in \mathrm{Ker}(\mathbb{A} - \omega_0 I) \cap \mathbf{K}$. Теорема 1 доведена.

Наслідок 2. *Сім'я оператора* $\{\mathbf{S}(t),\ t \geq 0\}$ *формує слабко неперервну півгрупу зі слабким інфінітезимальним оператором* $\mathbb{A}^*$.

Доведення випливає з означення спряженого оператора півгрупи [2]. Нехай $v(t,\varphi)$ — істотно гладка сім'я функціоналів у просторі $\mathbf{C}_n([-h,0])$ і $\hat{x}_t(s,\varphi)(\theta) := \hat{x}(t+\theta, s, \varphi)$, $\theta \in [-h,0]$ — розв'язок (1) з початковою умовою $\hat{x}(s+\theta,\varphi) = \varphi(\theta)$, $-h \leq \theta \leq 0$. Згідно з [1] визначимо *похідну за Ляпуновим* $v(s,\varphi)$ *в силу (1)* формулою

$$(\mathcal{L}v)(s,\,\varphi) :=$$
$$:= \lim_{t\to s+} \frac{v(t,\,\hat{x}_t(t,\varphi)) - v(s,\,\varphi)}{t-s} \qquad (11)$$

Наслідок 3. *Для довільного* $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ *квадратичний функціонал* $v(\varphi) :=< \mu\varphi, \varphi >$ *має похідну за Ляпуновим* $\mathcal{L}_0 v$ *за (3) та* $(\mathcal{L}_0 v)(\varphi)$ *— також квадратична форма, задана рівністю*

$$(\mathcal{L}v)(\varphi) =< \mathbb{A}^*\mu\varphi, \varphi > \qquad (12)$$

Доведення випливає з означення півгрупи $\{\mathbf{X}(t)\}$ та $\{\mathbf{S}(t) = \mathbf{X}(t) \otimes \mathbf{X}(t)\}$:

$$\lim_{t\to+0} \frac{v(x_t(\varphi), x_t(\varphi)) - v(\varphi,\varphi)}{t} =$$
$$= \lim_{t\to+0} \frac{< \mu\mathbf{X}(t)\varphi, \mathbf{X}(t)\varphi > - < \mu\varphi, \varphi >}{t} =$$
$$= \lim_{t\to+0} \frac{[\mu,\,\mathbf{S}(t)\varphi\otimes\varphi] - [\mu,\,\varphi\otimes\varphi]}{t} =$$
$$= \lim_{t\to+0} \frac{[\mathbf{S}^*(t)\mu,\,\varphi\otimes\varphi] - [\mu,\,\varphi\otimes\varphi]}{t} =$$
$$= \lim_{t\to+0} \left\langle \frac{\mathbf{S}^*(t)\mu - \mu}{t}\varphi,\,\varphi \right\rangle.$$

4. Рівняння Ляпунова для квадратичних функціоналів

Конус $\mathbf{K}^*$ дозволяє вводити часткове впорядкування в просторі $\mathcal{E}^*$: будемо записувати $\mu \triangleright \nu$, якщо $\mu - \nu \in \mathbf{K}^*$, тобто $[\mu\varphi, q] \geq [\nu, q]$ для всіх $q \in \mathbf{K}$.

Лема 5. $\mu \triangleright 0$, *тоді й тільки тоді, коли* $< \mu\varphi, \varphi > \geq 0$ *для всіх* $\varphi \in \mathbf{C}_n([-h,0])$.

Доведення випливає з теореми Стоуна-Вейєрштрасса [9] та теореми Мерсера, згідно з якими довільний елемент $q \in \mathbf{K}$ може бути зображений як рівномірно збіжний ряд

$$q = \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \varphi_m \otimes \varphi_m,$$

з невід'ємним λ_m та $\varphi_m \in \mathbf{C}_n([-h,0])$ для довільного $m \in \mathbf{N}$.

Отже, елементи $\mu \in \mathbf{K}^*$ можуть бути ідентифіковані як *додатні квадратичні функціонали* $< \mu\varphi, \varphi >$. Надалі будемо використовувати додатний квадратичний функціонал χ_0, який визначається рівністю

$$< \chi_0\varphi, \varphi >= |\varphi(0)|^2$$

для всіх $\varphi \in \mathbf{C}_n([-h,0])$. Наприклад, множина $\mathbf{K}_0^*$ з квадратичних функціоналів Ляпунова-Красовського може бути представлена формулою:

$$\mathbf{K}_0^* := \{\mu \in \mathbf{K} :\ \exists\, c > 0, \mu \triangleright c\chi_0\}.$$

Теорема 2. *Наступні твердження еквівалентні:*

a) тривіальний розв'язок (3) експоненціально стійкий;

b) тип півгрупи $\{\mathbf{S}(t)\}$ *від'ємний, тобто*

$$\omega_0 := \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln ||\mathbf{S}(t)|| < 0;$$

c) для всіх $q \in \mathbf{K}$ *існує невід'ємна матрична функція* $\mathbf{U}q \in \mathbf{K}$, *яка визначена потенціалом* $\mathbf{U}$ *півгрупи* $\{\mathbf{S}(t)\}$, *тобто*

$$\mathbf{U}q := \int_0^{\infty} \mathbf{S}(t) q\, dt; \qquad (13)$$

d) існує функціонал Ляпунова-Красовського $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)$ *такий, що* $-\mathbb{A}^*\mu \in \mathbf{K}_0^*$;

e) оператор $\mathbb{A}$ *не має жодних невід'ємних дійсних власних значень.*

Доведення теореми проведемо згідно з такою діаграмою:

$$\begin{array}{ccccc} & & d) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ a) & \to & b) & \to & c) \\ & & \uparrow & \swarrow & \\ & & e) & & \end{array}$$

$a) \Rightarrow b)$ Оскільки $||\mathbf{S}(t)|| \equiv ||\mathbf{X}(t)||^2$, то від'ємність типу півгрупи $\{\mathbf{S}(t)\}$ випливає з експоненціальної стійкості (3).

$b) \Rightarrow c)$ Внаслідок повноти простору $\mathcal{E}$ з від'ємності типу півгрупи випливає збіжність інтегралу (13) для довільного $q \in \mathcal{E} \supset \mathbf{K}$.

$c) \Rightarrow e)$ Припустимо, що $e)$ не справджується. За теоремою 1 існує таке число $\omega_0 \geq 0$ та $q_0 \in \mathbf{K}$, що $\mathbb{A}q_0 = \omega_0 q_0$. Однак у цьому випадку $\mathbf{S}(t)q_0 = q_0 \exp\{\omega_0 t\}$ і, отже, інтеграл (13) розбігається.

$e) \Rightarrow b)$ Це випливає одразу з твердження 4 теореми 1.

$c) \Rightarrow d)$ Визначимо додатний функціонал

$$\mu := \chi_0 + \mathbf{U}^*(2\chi_0 + \mathrm{Sp}\,\{F^T F\} \triangleright \chi_0,$$

де $F(d\theta)$ — матричнозначна міра з правої частини (1) і Sp — слід матриці. З $\mathbb{A}\mathbf{U}q = -q$ для всіх $q \in \mathcal{D}(\mathbb{A})$ випливає, що

$$\begin{aligned} [\mathbb{A}^*\chi_0,\, q] &= [\chi_0,\, \mathbb{A}q] = \\ &= 2\int\limits_{-h}^{0} \mathbf{Sp}\{F^T(d\theta)q(\theta,0)\}. \end{aligned}$$

Звідси можна одержати, що

$$\begin{aligned} -[\mathbb{A}^*\mu,\, q] &= 2\int\limits_{-h}^{0} \mathbf{Sp}\{F^T(d\theta)q(\theta,0)\} - \\ +2[\chi_0,\, q] &+ [\mathbf{Sp}\{F^T F\} \triangleright \chi_0,\, q] \geq [\chi_0,\, q]. \end{aligned}$$

Отже, d) доведено.

$d) \Rightarrow a)$ Можна взяти $v(\varphi) =< \mu\varphi, \varphi >$ з вищевизначеним μ і пересвідчитися в тому, що

$$(\mathcal{L}v)(\varphi) =< \mathbb{A}^*\mu\varphi, \varphi > \leq -|\varphi(0)|^2.$$

Твердження a) випливає з теореми 1.

Доведення теореми 2 завершене.

Наслідок 4. *Тривіальний розв'язок (3) експоненціально стійкий тоді й тільки тоді, коли для довільного* $\nu \in \mathbf{K}_0^*$ *існує розв'язок* $\mu \in \mathbf{K}^*$ *рівняння*

$$\mathbb{A}^*\mu = -\nu. \tag{14}$$

Доведення. Згідно з твердженням 4) теореми 1, *необхідність* випливає з твердження b) теореми 2, оборотності $\mathbb{A}$, рівності

$$\int\limits_0^\infty [\nu, \mathbf{S}(t)q]dt =$$

$$= [\nu, -\mathbb{A}^{-1}q] = [(\mathbb{A}^*)^{-1}\nu, q] = [\mu, q]$$

та інваріантності $\mathbf{K}$ відносно $\mathbf{S}(t)$ для всіх $t \geq 0$.

Достатність. Нехай $\mu \in \mathbf{K}^*$ задовольняє (14). Згідно з означенням півгрупи $\{\mathbf{S}^*(t)\}$, можна записати наступні нерівності:

$$\begin{aligned} & 0 \leq < \mathbf{S}^*(t)\varphi,\, \varphi > = < \mu\varphi,\, \varphi > + \\ + & \int\limits_0^t < \mathbf{S}^*(s)\mathbb{A}^*\mu\varphi,\, \varphi > ds = \\ = & < \mu\varphi,\, \varphi > - \int\limits_0^t < \mathbf{S}^*(s)\nu\varphi,\, \varphi > ds \leq \\ \leq & < \mu\varphi,\, \varphi > - \int\limits_0^t < \mathbf{S}^*(s)\chi_0\varphi,\, \varphi > ds \end{aligned}$$

для всіх $t \geq 0$. Оскільки півгрупа $\{\mathbf{S}^*(t)\}$ залишає конус $\mathbf{K}^*$ інваріантним, останній інтеграл у правій частині вищезгаданої формули є монотонною неспадною функцією за t для довільного $\varphi \in \mathbf{C}_n([-h,0])$. Отже, можна одержати

$$\begin{aligned} 0 &< \int\limits_0^\infty [\chi_0,\, \mathbf{S}(s)\varphi \otimes \varphi]ds = \\ &= \int\limits_0^\infty < \mathbf{S}^*(s)\chi_0\varphi,\, \varphi > ds \leq ||\mu||||\varphi||^2 \end{aligned}$$

для довільного $\varphi \in \mathbf{C}_n([-h,0])$. Конус $\mathbf{K}$ за побудовою є майже твірним в $\mathcal{E}$ і тому попередня нерівність справджується для довільного $q \in \mathcal{E}$ замість $\varphi \otimes \varphi$, включаючи власне значення $q_0 \in \mathbf{K}$, відповідно до типу ω_0 півгрупи $\{\mathbf{S}(t)\}$, яка задовольняє рівність $\mathbf{S}(t)q_0 = e^{t\omega_0}q_0$. Отже,

$$0 \ < \ \int\limits_0^\infty [\chi_0, \mathbf{S}(s)q_0]ds =$$

$$= \ \int\limits_0^\infty e^{s\omega_0}[\chi_0, q_0]ds \le ||\mu||||q_0||$$

і число ω_0 повинно бути від'ємним.

Доведення наслідку 4 завершено.

Зауваження 1. *Застосовуючи результати теореми 2 та наслідка 4 можна легко довести, що тривіальний розв'язок (3) експоненціально стійкий тоді й тільки тоді, коли існує строго додатний квадратичний функціонал μ, який задовольняє рівняння Ляпунова*

$$\mathbb{A}^*\mu = -\chi_0. \qquad (15)$$

Зауваження 2. *Рівняння (14) і (15) можна записати у вигляді рівняння Ляпунова (4) з похідною за Ляпуновим в силу рівняння (3) для квадратичних функціоналів $v(\varphi) :=< \mu\varphi, f >$, $u(\varphi) :=< \nu\varphi, f >$, і $u_0(\varphi) :=< \chi_0\varphi, f >= |\varphi(0)|^2$:*

$$(\mathcal{L}v)(\varphi) = -u(\varphi), \qquad (16)$$

$$(\mathcal{L}v)(\varphi) = -u_0(\varphi) = -|\varphi(0)|^2. \qquad (17)$$

5. Функціонали Ляпунова-Красовського для квазілінійних ФДР. Припустимо, що другий доданок $g(t,\varphi)$ у правій частині квазілінійного рівняння (1) є неперервною функцією, яка задовольняє локальну умову Ліпшиця [1] у такій формі: *існує така додатна міра $\beta \in \mathbf{C}^*([-h,0])$ з $||\beta|| = 1$, що*

$$\forall t \in \mathbf{R}\ \forall r > 0\ \exists c_r > 0$$

$$\forall \varphi, \psi \in V_r := \{\varphi \in \mathbf{C}_n([-h,0]), ||\varphi|| \le r\} :$$

$$|g(t,\varphi) - g(t,\psi)| \le$$

$$\le c_r \int\limits_{-h}^0 |\varphi(\theta) - \psi(\theta)|^2 \beta(d\theta). \qquad (18)$$

Можна довести (див., наприклад, [1]), що це твердження гарантує існування єдиного розв'язку $\{x(t,s,\varphi), s \le t < T(s,\varphi)\}$ рівняння (1) з початковою умовою $x(s+\theta,s,\varphi) = \varphi(\theta)$, $\theta \in [-h,0]$ для довільного $s \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathbf{C}_n([-h,0])$ з деяким додатним залежним від початкових умов числом $T(s,\varphi)$. Отже, для досить гладкого скалярного додатного квадратичного функціонала $v(\varphi) =< \mu\varphi, \varphi >$, заданого додатною матричнозначною мірою $\mu \in \mathbf{K}^*$, можна обчислити похідну за Ляпуновим $\mathcal{L}v$ в силу рівняння (1) (за формулою (2)), та, застосовуючи результати попередніх розділів, обчислити похідну за Ляпуновим $\mathcal{L}_0 v$ (2) в силу незбуреного рівняння (3):

$$(\mathcal{L}_0 v)(\varphi) :=< \mathbb{A}^*\mu\varphi, \varphi > .$$

Тут і надалі $\mathbb{A}$ позначатимемо інфінітезимальний оператор відповідної для лінійного ФДР півгрупи в просторі $\mathcal{E}$, який був розглянутий у розділі 3.

Теорема 3. *Якщо функція $g(t,\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця (18) та $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)$, тоді квадратичний функціонал $v(\varphi) =< \mu\varphi, \varphi >$ має похідну за Ляпуновим в силу квазілінійного ФДР (1) та для довільного $\varphi \in \mathbf{C}_n([-h,0])$ ця похідна дорівнює*

$$\mathcal{L}v(\varphi) =$$

$$=< \mathbb{A}^*\mu\varphi, \varphi > + < 2\mu\varphi, \mathbf{1}g(t,\varphi) >, \qquad (19)$$

де $\mathbf{1}$ — $n \times n$-матриця-функція $\{\mathbf{1}(\theta), \theta \in [-h,0]\}$, визначена рівністю

$$\mathbf{1}(\theta) = \begin{cases} 0 & -h \le \theta < 0, \\ I & \theta = 0, \end{cases}$$

та I — одинична $n \times n$-матриця.

Доведення. Позначимо $\hat{x}(t,s,\varphi)$ розв'язок лінійного ФДР (3), який задовольняє початкову умову $\hat{x}(s+\theta,s,\varphi) = \varphi(\theta)$ для $\theta \in [-h,0]$. З означення оператора Ляпунова (2) можна одержати такі рівності:

$$(\mathcal{L}_g v)(s, \varphi) =$$

$$= \lim_{t\downarrow 0}\{< \mu x_{s+t}(s,\varphi),\, x_{s+t}(s,\varphi) > -$$

$$- < \mu\varphi,\, \varphi >\} =$$

$$= \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\{< \mu(x_{s+t}(s,\varphi) -$$

$$-\hat{x}_{s+t}(s,\varphi)),\, x_{s+t}(s,\varphi) - \hat{x}_{s+t}(s,\varphi) >\}$$

$$+2\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\{< \mu(\hat{x}_{s+t}(s,\varphi) - \varphi),\, x_{s+t}(s,\varphi) -$$

$$-\hat{x}_{s+t}(s,\varphi) >\}$$

$$+\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\{< \mu\hat{x}_{s+t}(s,\varphi),\, \hat{x}_{s+t}(s,\varphi) > -$$

$$- < \mu\varphi,\, \varphi >\} +$$

$$+2\lim_{t\downarrow 0} < \mu\varphi \frac{x_{s+t}(s,\varphi) - \hat{x}_{s+t}(s,\varphi)}{t} > \qquad (21)$$

Згідно з умовою Ліпшиця (18), існують такі додатні числа δ, M, що

$$\max_{0\le t\le\delta} |g(s+t, \hat{x}_{s+t}(s,\varphi))| = M.$$

Отже, для всіх $t \in [0,\delta]$

$$|\hat{x}(s+t,s,\varphi) - x(s+t,s,\varphi)| \le$$

$$\le \ ||\varphi|| \int_0^t ||\hat{x}_{s+\tau}(s,\varphi) - x_{s+\tau}(s,\varphi)||d\tau +$$

$$+M\delta$$

і перший доданок у (21) дорівнює нулеві за лемою Гронуолла [1]

$$\max_{0\le t\le\delta} ||\hat{x}_{s+t}(s,\varphi) - x_{s+t}(s,\varphi)|| \le M\delta e^{||f||\delta}.$$

Аналогічний результат для другого доданка випливає з попередньої нерівності та з нерівності

$$\sup_{0\le t\le\delta} | < \mu(\hat{x}_{s+t}(s,\varphi) - \varphi), x_{s+t}(s,\varphi) -$$

$$-\hat{x}_{s+t}(s,\varphi) > | \le ||\mu||\omega(\delta)\delta M e^{||f||\delta},$$

де $\omega(\delta)$ — модуль неперервності неперервної функції $\hat{x}(s+t,s,\varphi) - \varphi(0)$ на сегменті $0 \le t \le \delta$. Згідно з означенням оператора $\mathbb{A}^*$ та результатами попереднього розділу

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\{< \mu(\hat{x}_{s+t}(s,\varphi) - \varphi), x_{s+t}(s,\varphi) -$$

$$-\hat{x}_{s+t}(s,\varphi) >\} =< \mathbb{A}^*\mu\varphi,\, \varphi > .$$

Для обчислення останнього доданку в (21)

$$R(\varphi) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}\{< \mu\varphi,\, x_{s+t}(s,\varphi) - \hat{x}_{s+t}(s,\varphi) >\}$$

використаємо неперервність білінійного оператора $< \mu\varphi, \psi >$ як функції другого аргумента, оскільки матричнозначна міра μ визначає лінійний неперервний оператор, що діє з $\mathbf{C}_n([-h,0])$ у $\mathbf{C}^*_n([-h,0])$. Різниця

$$R(t,\theta) := x(t+s+\theta, s,\varphi) - \hat{x}(t+s+\theta,s,\varphi)$$

не дорівнює нулеві тільки тоді, коли $t+\theta > 0$. Крім цього, як було показано раніше,

$$\sup_{-h\le t+\theta\le\delta} |R(t,\theta)| \le M e^{||f||\delta},$$

і

$$\int_0^\delta |f(x_{s+t}(s,\varphi) - \hat{x}_{s+t}(s,\varphi))|dt \le ||f||M\delta^2 e^{||f||\delta}.$$

Отже, з урахуванням рівності

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} R(t,0) =$$

$$= \ \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t g(u+s, x_{u+s}(s,\varphi))du = g(s,\varphi)$$

можна обчислити слабку границю

$$w\lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(x_{t+s}(s,\varphi) - \hat{x}_{t+s}(s,\varphi)) = \mathbf{1}g(s,\varphi).$$

Доведення завершено.

Лема 6. *Для довільного вектора $p \in \mathbf{R}^n$ та довільного $\mu \in \mathbf{K}^*$ справджується рівність*

$$< \mu\mathbf{1}p,\, \mathbf{1}p >= p^T\delta(\mu)p =$$

$$= \sum_{k=1}^n p_k^2 \mu_{kk}(\{0,0\}), \qquad (22)$$

де $\delta(\mu) = \mu(\{0,0\})$, тобто μ — $n\times n$ симетрична діагональна матрична міра точок $\{0,0\}$.

Доведення випливає з рівності

$$\begin{aligned} &< \mu \mathbf{1}g,\, \mathbf{1}g >= \\ = &\int_Q \{\mathbf{1}(\theta_1)p \otimes \mathbf{1}(\theta_2)p\}\, \mu(d\theta_1, d\theta_2) = \\ = &\ p^T \left\{ \int_Q \mathbf{1}(\theta_1)\mathbf{1}(\theta_2)\mu(d\theta_1, d\theta_2) \right\} p. \end{aligned}$$

Незважаючи на простоту, доведена лема разом із нерівностями (9) та (10) дозволяє одержати з теореми 3 очевидне та корисне наступне твердження.

Наслідок 5. *При виконанні умов теореми 3 для квадратичного функціонала* $v(\varphi) :=< \mu\varphi, \varphi >$ *виконуються наступні нерівності:*

$$(\mathcal{L}_g v)(\varphi) \leq < \mathbb{A}^* \mu\varphi, \varphi > + \alpha^2 < \mu\varphi, \varphi > + \\ + \alpha^{-2} g^T(t,\varphi)\delta(\mu) g(t,\varphi), \quad (23)$$

$$(\mathcal{L}_g v)(\varphi) \leq < \mathbb{A}^* \mu\varphi,\, \varphi > + \\ + 2\sqrt{< \mu\varphi,\, \varphi >}\sqrt{g^T(t,\varphi)\delta(\mu)g(t,\varphi)}, \quad (24)$$

для всіх $t \in \mathbf{R}$, $\varphi \in \mathbf{C}_n([-h, 0])$ *та* $\alpha > 0$.

Наслідок 6. *При виконанні умов теореми 3 для довільних додатних функціоналів* $\mu \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)$ *і* $\nu \in \mathcal{D}(\mathbb{A}^*)$ *з* $\delta(\nu) = 0$ *похідна за Ляпуновим квадратичного функціонала* $v_1(\varphi) :=< (\mu + \nu)\varphi, \varphi >$ *в силу (1) задовольняє наступну рівність:*

$$(\mathcal{L}_g v)(\varphi) =< \mathbb{A}^*(\mu + \nu)\varphi,\, \varphi > + \\ + 2 < \mu\varphi,\, \mathbf{1}g(t,\varphi) > . \quad (25)$$

Доведення випливає з нерівності

$$| < \nu\varphi, \mathbf{1}g(t,\varphi) > | \leq \\ \leq \sqrt{< \nu\varphi,\, \varphi >}\sqrt{g^T(t,\varphi)\delta(\nu)g(t,\varphi)} = 0.$$

Теорія лінійних ФДР дуже часто використовує матричний розв'язок $H(t)$ рівняння (3) з початковою умовою $H(\theta) = \mathbf{I}(\theta)$, тобто $n \times n$-матричну функцію, яка задовольняє рівності

$$H(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ I, & t = 0, \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt}H(t) = \int_{-h}^{0} \{F(d\theta)\} H(t+\theta), \quad t > 0. \quad (26)$$

Якщо тривіальний розв'язок (3) асимптотично стійкий, тоді можна застосувати перетворення Лапласа вищезгаданої матриці $H(t)$

$$\tilde{H}(\lambda) = \int_0^\infty e^{-t\lambda} H(t)dt$$

для довільного комплексного числа λ з невід'ємною дійсною частиною. Просте обчислення дозволяє знайти цю матрицю:

$$\tilde{H}(\lambda) = \left(\lambda I - \int_{-h}^{0} e^{\theta\lambda} F(d\theta) \right)^{-1}.$$

Звідси, з урахуванням теореми Планшереля [1] для перетворення Лапласа, можна записати рівність

$$\int_0^\infty H^T(t)H(t)dt = \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}^T(-i\omega)\tilde{H}(i\omega)d\omega. \quad (27)$$

За означенням розв'язної півгрупи $\{\mathbf{X}(t)\}$ для рівняння (3), матрична функція $H(t)$ може бути представлена також у вигляді $H(t) = \{\mathbf{X}(t)\mathbf{I}\}_{\theta=0}$. Внаслідок того, що $\mathbf{S}(t) = \mathbf{X}(t) \otimes \mathbf{X}(t)$ і, отже,

$$\mathbf{S}(t)\{\mathbf{I}p \otimes \mathbf{I}p\} = \mathbf{X}(t)\mathbf{I}p\{\mathbf{X}(t)\mathbf{I}p\}^T$$

для довільного $p \in \mathbf{R}^n$, інтеграл у лівій частині формули (27) можна записати також за допомогою півгрупи $\mathbf{S}(t)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty H^T(t)H(t)dt &= \int_0^\infty \left\{ \{\mathbf{X}(t)\mathbf{I}\}^T \mathbf{X}(t)\mathbf{I} \right\}_{\theta=0} dt = \\ &= \int_0^\infty \{\mathbf{S}(t)\hat{\mathbf{I}}\}_{\theta_1=\theta_2=0} dt \end{aligned}$$

де $\hat{\mathbf{I}}(\theta_1,\theta_2) = \mathbf{I}(\theta_1)\mathbf{I}(\theta_2)$. Нагадаємо, що вищезгадана формула може використовуватися тільки для експоненціально спадних матриць-функцій $H(t)$, тобто у випадку, коли спектр $\sigma(\mathbb{A})$ оператора півгрупи $\mathbb{A}$ знаходиться в лівій частині комплексної площини. Це дозволяє також використовувати оборотність оператора $\mathbb{A}^*$ і можливість запису матричнозначної міри $(\mathbb{A}^*)^{-1}\chi_0 \in \mathbf{K}^*$ за допомогою невласного інтеграла півгрупи $\mathbf{S}^*(t)$ [2]:

$$
\begin{aligned}
-[(\mathbb{A}^*)^{-1}\chi_0, q] &= \int_0^\infty [\mathbf{S}(t)^*\chi_0, q]dt \\
&= \int_0^\infty [\chi_0, \mathbf{S}(t)q]dt
\end{aligned}
$$

для довільного $q \in \mathcal{E}$. Таким чином, підставляючи у попередній формулі $q = \hat{\mathbf{I}}$, можна одержати рівність

$$
\begin{aligned}
- \quad & [(\mathbb{A}^*)^{-1}\chi_0, \hat{\mathbf{I}}] = \int_0^\infty [\chi_0, \mathbf{S}(t)\hat{\mathbf{I}}]dt = \\
= & \int_0^\infty [\chi_0, \mathbf{X}(t)\mathbf{I} \otimes \mathbf{X}(t)\mathbf{I}]dt = \\
= & \int_0^\infty \mathbf{Sp} H^T(t)H(t)dt
\end{aligned}
$$

і, отже,

$$
\begin{aligned}
\delta\left((\mathbb{A}^*)^{-1}\{-\chi_0\}\right) &= \int_0^\infty H^T(t)H(t)dt = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{H}^T(-i\lambda)\tilde{H}(i\lambda)d\lambda. \qquad (28)
\end{aligned}
$$

Це дозволяє запропонувати наступну формулу для визначеного рівнянням Ляпунова (15) квадратичного функціоналу Ляпунова $< \mu\varphi, \varphi >$:

$$
\begin{aligned}
< \mu\varphi,\, \varphi > &= [(\mathbb{A}^*)^{-1}\{-\chi_0\},\, \varphi \otimes \varphi] = \\
&= [\chi_0,\, \mathbb{A}^{-1}\{-\varphi \otimes \varphi\}]. \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Вищезгадана формула допомагає нам обчислити матрицю $\delta(\mu) = \delta((\mathbb{A}^*)^{-1}\{-\chi_0\})$. Ця матриця може бути визначена рівністю

$$
\delta(\mu) = \lim_{s\uparrow 0}\int_s^0\int_s^0 \mu(d\theta_1, d\theta_2)\mathbf{q}(\theta_1,\theta_2)
$$

з довільною матричною функцією $q \in \mathcal{E}$, яка задовольняє рівність $q(0,0) = I$. Застосовуючи формулу (29) та слабку неперервність скалярного добутку як функції другого аргументу, можна знайти матрицю $\delta(\mu)$ як розв'язок рівняння $\mathbb{A}q = -\hat{\mathbf{I}}$ в точці $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 0$, тобто як розв'язок $q = \{q_{ij}, i, j \div 1, n\}$ системи рівнянь

$$
\begin{cases}
(\dfrac{\partial}{\partial\theta_1} + \dfrac{\partial}{\partial\theta_2})q_{ij}(\theta_1,\theta_2) = 0, \\
\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}q_{ij}(\theta_1, 0) + \\
+ \displaystyle\sum_{k=1}^n q_{ik}(\theta_1,\theta)F_{jk}(d\theta) = 0, \\
\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}q_{ij}(0,\theta_2) + \\
+ \sum_{k=1}^n q_{kj}(\theta,\theta_2)F_{ik}(d\theta) = 0,
\end{cases} \qquad (30)
$$

з крайовою умовою

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^n q_{ik}(0,\theta)F_{jk}(d\theta) \quad &+ \quad \sum_{k=1}^n q_{kj}(\theta,0)F_{ik}(d\theta) = \\
&= \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}
\end{aligned}
$$

6. Приклад. Цей розділ ілюструє запропонований у попередніх розділах алгоритм побудови функціонала Ляпунова (29) для лінійного скалярного ФДР

$$
\frac{dx}{dt} = ax(t) + bx(t-1) \qquad (31)
$$

як розв'язку рівняння (30). Спочатку потрібно знайти симетричну функцію $q(\theta_1,\theta_2)$ для $\theta_1 \in [-1,0]$, $\theta_2 \in [-1,0]$, яка задовольняє диференциальне рівняння в частинних похідних $(\mathbb{A})q = -\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2)$. Внаслідок умови симетричності оператор $\mathbb{A}$ цього рівняння (див. лему 4) можна задати формулою

$$\mathbb{A}q(\theta_1,\theta_2)=\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial\theta_1}+\dfrac{\partial}{\partial\theta_2}\right)q(\theta_1,\theta_2),\\ \text{якщо } -1\le\theta_2\le\theta_1<0,\\ \dfrac{\partial}{\partial\theta_2}q(0,\theta_2)+aq(0,\theta_2)+\\ \qquad +bq(\theta_2,-1,),\\ \text{якщо } -1\le\theta_2<\theta_1=0,\\ 2aq(0,0)+2bq(0,-1),\\ \text{якщо } \theta_2=\theta_1=0.\end{cases}$$

Отже, для $-1\le\theta_2<0$, $-1\le\theta_1<0$ вищезгадане рівняння можна виписати у такій формі:

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta_1}+\frac{\partial}{\partial\theta_2}\right)q(\theta_1,\theta_2)=-\varphi(\theta_1)\varphi(\theta_2). \quad (32)$$

Оскільки ми шукаємо симетричну функцію, можна знаходити розв'язок (32) для $-1\le\theta_2\le\theta_1<0$ та розширити цю функцію на множину $-1\le\theta_1\le\theta_2<0$, застосовуючи симетрію $q(\theta_1,\theta_2)=q(\theta_2,\theta_1)$. Замінюючи $\theta_1=t-s,\theta_2=t+s$, $q(t-s,t+s):=f(t,s)$ та розв'язуючи одержане звичайне диференціальне рівняння, нескладно знайти загальний розв'язок вищезгаданого рівняння

$$q(\theta_1,\theta_2)=r(\theta_2-\theta_1)+ \\ +\int\limits_{\theta_2}^{\theta_2-\theta_1}\varphi(u-\theta_2+\theta_1)\varphi(u)du \quad (33)$$

з довільною гладкою функцією $\{r(t),t\in[-1,0]\}$. Якщо $\theta_1=0,-1\le\theta_2\le0$, тоді функція $q(\theta_1,\theta_2)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$\frac{\partial}{\partial\theta_2}q(0,\theta_2)+aq(0,0)+bq(\theta_2,-1)=-\varphi(0)\varphi(\theta_2)$$

з крайовою умовою

$$2aq(0,0)+2bq(0,-1)=-|\varphi(0)|^2.$$

Підстановка (33) приводить до диференціального рівняння для $\{r(t),-1\le t\le0\}$

$$\dot r(t)=-ar(t)-br(-1-t)+g(t), \quad (34)$$

де

$$g(t)=-b\int\limits_{-1}^{-1-t}\varphi(u+1+t)\varphi(u)du-\varphi(t)\varphi(0)$$

та крайова умова має вигляд

$$2ar(0)+2br(-1)=-|\varphi(0)|^2. \quad (35)$$

Диференціюючи рівняння (34) за t, можна записати вищезгадане рівняння як звичайне диференціальне рівняння другого порядку

$$\ddot r(t)+(b^2-a^2)r(t)=bg(-1-t)-ag(t)+\dot g(t) \quad (36)$$

і легко знайти розв'язок цього рівняння. У припущенні, що $\omega^2:=b^2-a^2>0$, потрібну функцію $r(t)$ можна записати в такій формі:

$$\begin{aligned} r(t) &= c_1\cos(\omega t)+c_2\sin(\omega t)+\\ &+ \frac{1}{\omega}\int\limits_{-1}^{t}\sin(\omega(t-s))(bg(-1-s)-\\ &- ag(s)+\dot g(s))ds\end{aligned}$$

з довільними сталими c_1 і c_2. Оскільки рівняння (34) було продиференційоване, тоді знайдений розв'язок $r(t)$ рівняння (36) повинен задовольняти не тільки крайову умову (35), але й додаткову крайову умову $\dot r(0)=-ar(0)-br(-1)+(g)0$. Крайові умови дозволяють записати систему лінійних рівнянь для сталих c_1 і c_2

$$\begin{aligned} c_1(-a-b\cos\omega) &+ c_2(b\sin\omega-\omega)=f_1,\\ c_1(2a+b\cos\omega) &+ c_2(-2b\sin\omega)=f_2\end{aligned}$$

де

$$f_1=a\left(\frac{1}{\omega}\int\limits_{-1}^{0}\sin(\omega s)(bg(-1-s)- \right.\\ -ag(s))ds-\\ -\frac{1}{\omega}\sin(\omega)\left[\int\limits_{-1}^{0}|\varphi(s)|^2ds+\varphi(-1)\varphi(0)\right]+\\ \left.+\int\limits_{-1}^{0}\cos(\omega s)g(s)ds\right)+$$

$$+\int\limits_{-1}^{0}\cos(\omega s)(bg(-1-s)-ag(s))ds-$$

$$-\cos(\omega)\left[\int\limits_{-1}^{0}|\varphi(s)|^2ds+\varphi(-1)\varphi(0)\right]+$$

$$+\omega\int\limits_{-1}^{0}\sin(\omega s)g(s)ds, \tag{37}$$

$$f_2=-|\varphi(0)|^2+$$

$$+\frac{2a}{\omega}\int\limits_{-1}^{0}\sin(\omega s)(bg(-1-s)-ag(s))ds-$$

$$-\frac{2a}{\omega}\sin(\omega)\left[\int\limits_{-1}^{0}|\varphi(s)|^2ds+\varphi(-1)\varphi(0)\right]+$$

$$+2a\int\limits_{-1}^{0}\cos(\omega s)g(s)ds. \tag{38}$$

Звідси одержуємо, що

$$c_1=\frac{f_1 2b\sin\omega+f_2(b\sin\omega-\omega)}{2\omega(a+b\cos\omega)}, \tag{39}$$

$$c_2=\frac{f_2(a+b\cos\omega)+f_1(b\sin\omega-\omega)}{2\omega(a+b\cos\omega)}, \tag{40}$$

і бажана функція $q(\theta_1,\theta_2)$ може бути задана у явній формі

$$q(\theta_1,\theta_2)=c_1\cos(\omega(\theta_2-\theta_1))+$$

$$+c_2\sin(\omega(\theta_2-\theta_1))+$$

$$+\int\limits_{-1}^{\theta_2-\theta_1}\frac{\sin(\omega(\theta_2-\theta_1-s))}{\omega}(bg(-1-s)-$$

$$-ag(s))ds-$$

$$-\frac{1}{\omega}\sin(\omega(\theta_2-\theta_1+1))\Big[\int\limits_{-1}^{0}|\varphi(s)|^2ds+$$

$$+\varphi(-1)\varphi(0)\Big]+$$

$$+\int\limits_{-1}^{\theta_2-\theta_1}\cos(\omega(\theta_2-\theta_1-s))g(s)ds \tag{41}$$

для $\theta_1\le\theta_2\le 0$, і розширена до $\theta_2\le\theta_1\le 0$ за допомогою симетрії $q(\theta_1,\theta_2)=(q\theta_2,\theta_1)$. Як було показано у попередньому розділі, функціонал

$$<\mu\varphi,\,\varphi>=q(0,0)=c_1-$$

$$-\frac{\sin\omega}{\omega}\Big[\int\limits_{-1}^{0}|\varphi(s)|^2ds+\varphi(-1)\varphi(0)\Big] \tag{42}$$

додатно визначений тоді й тільки тоді, коли тривіальний розв'язок рівняння (31) експоненціально стійкий. Крім цього, використовуючи формули (23) та (24), можна порівняно просто проаналізувати динаміку збуреного рівняння

$$\frac{dy}{dt}=ay(t)+by(t-1)+g(t,y_t), \tag{43}$$

оскільки для вищезгаданого функціонала $<\mathbb{A}^*\mu\varphi,\,\varphi>=-|\varphi(0)|^2$. Для цього потрібно обчислити число $\delta(\mu)$, підставляючи у формули (42), (41), (39), (40), (37) та (38) функцію $\varphi(0)\mathbf{I}(\theta)$ замість $\varphi(\theta)$. Для φ функціонал f_1 з (37) дорівнює нулеві та $f_2=-|\varphi(0)|^2$. Отже,

$$\delta(\{\mu\})=$$

$$\left\{c_1-\frac{\sin\omega}{\omega}\left[\int\limits_{-1}^{0}|\varphi(s)|^2ds+\varphi(-1)\varphi(0)\right]\right\}=$$

$$=-\frac{b\sin\omega-\omega}{2\omega(a+b\cos\omega)}.$$

Використовуючи формулу (24), можна оцінити похідну за Ляпуновим в силу (43) за допомогою наступної нерівності:

$$(\mathcal{L}_g v)(\varphi)\le<\mathbb{A}^*\mu\varphi,\,\varphi>+$$

$$+2\sqrt{<\mu\varphi,\,\varphi>}|g(t,\varphi)|\delta(\mu)=-|\varphi(0)|^2-$$

$$-2\sqrt{<\mu\varphi,\,\varphi>}|g(t,\varphi)|\frac{b\sin\omega-\omega}{2\omega(a+b\cos\omega)}$$

для всіх $t\in\mathbf{R}$ та $\varphi\in\mathbf{C}_n([-h,0])$, $\alpha>0$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Hale J., Sjord M.* Introduction to Functional Differential Equations.— NY, Hong Kong: Springer-Verlag, 1993.

2. *Hille E., and Phillips R.* Functional Analysis and Semigroups // Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.— 1957.— Vol. 31.

3. *Красовский Н.Н.* Некоторые проблемы устойчивости движения.— М.: Физматгиз, 1959.— 211 с.

4. *Крейн М.А., Рутман М.А.* Линейный оператор, оставляющий как инвариант конус в банаховом пространстве // Успехи мат. наук.— 1947.— **3**, N 1.— С.3—95.

5. *Мартынюк Д.И.* Лекции о теории устойчивости систем с запаздыванием.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1971.— 177 с.

6. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы систем управления с запаздыванием.— М.: Наука, 1981.— 448 с.

7. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations.— Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1958.

8. *Репин Ю.М.* Квадратические функционалы Ляпунова для систем с запаздыванием // Прикл. мат. мех.— 1965.— **29**, N 3.— С.364—366.

9. *Schaefer H.*, Topological Vector Space.— NY: The McMillan Co., 1966.

10. *Katafygiotys L., Tsarkov Ye.F.* On the Stability of Linear Stochastic Differential Equations // Random Operators and Stochastic Equations.— 1995.— **3**, N 4.— P.352—365.

11. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений.— Рига: Зинатне, 1989.

Стаття надійшла до редколегії 28.04.2002