УДК 517.929.7

©2002 р. М.П. Філіпчук

Чернівецький національний університет ім.Юрія Федьковича, Чернівці

КРАЙОВА ЗАДАЧА З ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ СИСТЕМИ ІЗ ПЕРЕТВОРЕНИМ АРГУМЕНТОМ

Чисельно-аналітичним методом досліджується питання існування та наближеної побудови розв'язку системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом та параметром у двоточкових крайових умовах.

The question of existence and approximate construction of a solution for a system of differential equations with a transformed argument and a parameter in two-point boundary conditions is investigated by the numerical-analytic method.

Чисельно-аналітичний метод А.М. Самойленка виявився надзвичайно ефективним та універсальним методом дослідження різноманітних крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь [1-3]. Для рівнянь з відхиленим аргументом він покищо не знайшов такого ж широкого застосування [4]. Відзначимо в цьому напрямку праці [1, 5] та [6, 7], де розглянуто деякі крайові задачі відповідно для систем із постійним запізненням та диференціально-функціональних рівнянь нейтрального типу.

У даній роботі розглядається система диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t))), \qquad (1)$$

де $t \in [0,T]$; $x, f \in R^n$; $\lambda : [0,T] \to [0,T]$ – довільне неперервне відображення. Функція $f(t,x,y)$ вважається неперервною за t,x,y в області $G = [0,T] \times D \times D$, де D – замкнена обмежена область в R^n.

Припустимо також, що функція $f(t,x,y)$ в області G обмежена вектором $M \in R^n$, $M_i > 0$, $i = \overline{1,n}$, та задовольняє умову Ліпшіца за x, y з матрицею $K = \{k_{ij} \geq 0;\ i,j = \overline{1,n}\}$

$$|f(t,x,y)| \leq M, \qquad (2)$$

$$|f(t,\overline{x},\overline{y}) - f(t,\overline{\overline{x}},\overline{\overline{y}})| \leq K(|\overline{x}-\overline{\overline{x}}|+|\overline{y}-\overline{\overline{y}}|), \qquad (3)$$

де $|f(t,x,y)| = (|f_1(t,x,y)|, ..., |f_n(t,x,y)|)$ і нерівність між векторами розуміється покомпонентно.

Відзначимо, що у [8, 9] для системи (1) обгрунтовано схеми чисельно-аналітичного методу у випадку багатоточкових та інтегральних крайових умов.

Розглянемо для системи (1) лінійні двоточкові крайові умови з невідомим скалярним параметром $\mu \in R$

$$Ax(0) + \mu Bx(T) = d, \quad \det B \neq 0, \qquad (4)$$

$$x_1(0) = x_{01}, \qquad (5)$$

де A і B – сталі $n \times n$ матриці, d – відомий сталий n-вимірний вектор, x_1 – перша координата вектора $x = (x_1, ..., x_n)$, x_{01} – задане значення.

Зауважимо, що для системи звичайних диференціальних рівнянь крайові умови вигляду (4), (5) розглядалися в [2].

Задача полягає у відшуканні розв'язку $x = x^*(t)$ системи (1) і такого значення параметра $\mu = \mu^*$, щоб пара $(x^*(t), \mu^*)$ задовольняла умови (4), (5).

Позначимо через D_β множину точок $x_0 \in R^n$, що містяться разом зі своїм β-околом в області D при всіх значеннях параметра μ із деякої області $I_\mu = [\mu_1, \mu_2]$, $\mu_1 > 0$, де

$$\beta = \frac{T}{2}M + \left|\frac{1}{\mu}\left[B^{-1}d - (B^{-1}A + \mu E)x_0\right]\right|.$$

Розумітимемо також надалі під $\bar{D}$ множину векторів $y_0 = (x_{02}, ..., x_{0n}) \in R^{n-1}$ таких, що $x_0 = col(x_{01}, y_0)$ належить D_β.

Нехай

$$D_\beta \neq \emptyset \tag{6}$$

і найбільше власне значення $\nu_{\max}(Q)$ матриці $Q = TK$ не перевищує одиниці

$$\nu_{\max}(Q) < 1. \tag{7}$$

Розглянемо послідовність функцій, які визначаються рекурентним співвідношенням

$$x_m(t, y_0, \mu) = x_0 +$$

$$+ Lf(t, x_{m-1}(t, y_0, \mu), x_{m-1}(\lambda(t), y_0, \mu)) +$$

$$+ \frac{t}{\mu T}\left[B^{-1}d - (B^{-1}A + \mu E)x_0\right],\ m = 1, 2, ...,$$

$$x_0(t, y_0, \mu) = x_0 \in D_\beta, \tag{8}$$

де перша компонента вектора x_0 задається згідно з (5), а оператор L діє на неперервну при $t \in [0, T]$ функцію $g(t)$ наступним чином

$$Lg(t) \equiv \int\limits_0^t \left[g(z) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T g(s)ds\right]dz.$$

Безпосередньою перевіркою легко переконатися, що всі функції $x_m(t, y_0, \mu)$, залежні від параметра μ та від $(n-1)$-вимірного вектора y_0 (або, що те саме, від n-вимірного вектора x_0 з фіксованою першою координатою), задовольняють крайові умови (4), (5) для довільних $y_0 \in \bar{D}$, $\mu \in I_\mu$.

Доведемо наступне твердження про збіжність послідовних наближень $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8).

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (2), (3), (6), (7). Тоді послідовність функцій $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8), які для довільних $y_0 \in \bar{D}, \mu \in I_\mu$ задовольняють крайові умови (4), (5), рівномірно збігається при $m \to \infty$ в області $(t, y_0, \mu) \in [0, T] \times \bar{D} \times I_\mu$ до граничної функції $x^*(t, y_0, \mu)$, яка задовольняє крайові умови (4), (5) і є розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = x_0 + Lf(t, x(t), x(\lambda(t))) +$$

$$+ \frac{t}{\mu T}\left[B^{-1}d - (B^{-1}A + \mu E)x_0\right]dt, \tag{9}$$

який при $t = 0$ проходить через точку $x^*(0, y_0, \mu) = x_0 = (x_{01}, y_0)$. Крім цього, $x^*(t, y_0, \mu)$ є розв'язком крайової задачі

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(\lambda(t))) + \Delta(y_0, \mu),$$

$$Ax(0) + \mu Bx(T) = d, \quad x_1(0) = x_{01}, \tag{10}$$

де

$$\Delta(y_0, \mu) = \frac{1}{\mu T}\left[B^{-1}d - (B^{-1}A + \mu E)x_0\right] -$$

$$-\frac{1}{T}\int\limits_0^T f(t, x(t), x(\lambda(t)))dt.$$

Для відхилення $x^*(t, y_0, \mu)$ від $x_m(t, y_0, \mu)$ при всіх $(t, y_0, \mu) \in [0, T] \times \bar{D} \times I_\mu$ і $m = 1, 2, ...$ правильна оцінка

$$|x^*(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)| \leq W_m(y_0, \mu), \tag{11}$$

де $W_m(y_0, \mu) \equiv Q^m(E - Q)^{-1}\beta$.

Д о в е д е н н я. Покажемо, що в просторі неперервних вектор-функцій послідовність (8) є фундаментальною.

Встановимо спочатку, що при $(y_0, \mu) \in \bar{D} \times I_\mu$ всі функції $x_m(t, y_0, \mu) \in D$. На підставі (8) із урахуванням (2) та леми 2.1[2] знаходимо

$$|x_1(t, y_0, \mu) - x_0| \leq 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right)M +$$

$$+ \left|\frac{1}{\mu}\left[B^{-1}d - \left(B^{-1}A + \mu E\right)x_0\right]\right| \leq \beta. \tag{12}$$

Тому $x_1(t, y_0, \mu) \in D$, як тільки $(y_0, \mu) \in \bar{D} \times I_\mu$. Індукцією легко показати, що для всіх $m = 1, 2, ...,\ t \in [0, T]$ і будь-яких $(y_0, \mu) \in \bar{D} \times I_\mu$ функції $x_m(t, y_0, \mu)$ вигляду (8) не виходять за межі області D.

Покладаючи

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) = |x_{m+1}(t, y_0, \mu) - x_m(t, y_0, \mu)|,$$

на підставі (8) із урахуванням (3) отримуємо

$$r_{m+1}(t, y_0, \mu) \leq$$

$$\leq K\left[(1 - \frac{t}{T})\int\limits_0^t \omega_m(s, y_0, \mu)ds + \right.$$

$$+\frac{t}{T}\int_t^T \omega_m(s,y_0,\mu)ds\Bigg], \qquad (13)$$

де $\omega_m(s,y_0,\mu) = r_m(s,y_0,\mu) + r_m(\lambda(s),y_0,\mu)$.

Згідно з (12), $r_1(t,y_0,\mu) = |x_1(t,y_0,\mu) - x_0| \le \beta$, тому із (13) при $m=1$ знаходимо

$$r_2(t,y_0,\mu) \le 2K\beta \cdot 2t\left(1-\frac{t}{T}\right) \le Q\beta.$$

Індукцією можна довести, що для всіх $(t,y_0,\mu) \in [0,T]\times\bar{D}\times I_\mu$

$$r_{m+1}(t,y_0,\mu) \le Q^m\beta, \quad m=0,1,....$$

Тому для $j \ge 1$ маємо нерівність

$$|x_{m+j}(t,y_0,\mu) - x_m(t,y_0,\mu)| \le$$

$$\le \left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^{m+i}\right)\beta = Q^m\left(\sum_{i=0}^{j-1} Q^i\right)\beta. \qquad (14)$$

Умова (7) гарантує виконання співвідношень

$$\lim_{m\to\infty} Q^m = 0, \quad \sum_{i=0}^{j-1} Q^i \le (E-Q)^{-1}. \qquad (15)$$

Тоді із (14) та (15) на підставі критерію Коші випливає, що послідовність $x_m(t,y_0,\mu)$ вигляду (8) рівномірно збігається при $m\to\infty$ в області $(t,y_0,\mu)\in[0,T]\times\bar{D}\times I_\mu$ і

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t,y_0,\mu) = x^*(t,y_0,\mu). \qquad (16)$$

Оскільки всі послідовні наближення $x_m(t,y_0,\mu)$ задовольняють крайові умови (4), (5), то й гранична функція $x^*(t,y_0,\mu)$ для довільних $(y_0,\mu)\in\bar{D}\times I_\mu$ також їх задовольняє. При $j\to\infty$ із (14), враховуючи (16) та (15), для всіх $m=1,2,...$, $(t,y_0,\mu)\in[0,T]\times\bar{D}\times I_\mu$ отримуємо оцінку (11). Крім цього, переходячи із урахуванням (16) у (8) до границі при $m\to\infty$, бачимо, що функція $x^*(t,y_0,\mu)$ є розв'язком інтегрального рівняння (9), який при $t=0$ проходить через точку $x^*(0,y_0,\mu) = x_0 = (x_{01},y_0)$. Отже, гранична функція $x^*(t,y_0,\mu)$ справді є розв'язком крайової задачі (10). Теорему доведено.

Вкажемо необхідні і достатні умови, щоб гранична функція $x^*(t,y_0,\mu)$ послідовності (8) була розв'язком задачі (1), (4), (5).

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді для того, щоб розв'язок $x^*(t)$ початкової задачі*

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),x(\lambda(t))),\ x(0) = x_0 = (x_{01},y_0),$$

був одночасно і розв'язком крайової задачі (1), (4), (5), необхідно і досить, щоб пара (y_0,μ) була розв'язком визначального рівняння

$$\Delta(y_0,\mu) = 0, \qquad (17)$$

де

$$\Delta(y_0,\mu) = \frac{1}{\mu T}\left[B^{-1}d - \left(B^{-1}A + \mu E\right)x_0\right] -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t,x^*(t,y_0,\mu),x^*(\lambda(t),y_0,\mu))dt$$

При цьому $x^*(t) = x^*(t,y_0,\mu)$ і для всіх $m = 1,2,...,\ t\in[0,T]$ щодо відхилення точного розв'язку $x^*(t) = x^*(t,y_0,\mu)$ крайової задачі (1), (4), (5) від її наближеного розв'язку $x_m(t,y_0,\mu)$ вигляду (8) правильна оцінка (11).

На підставі теореми 2 отримуємо наступний чисельно-аналітичний алгоритм побудови розв'язку крайової задачі (1), (4), (5):

а) при $(y_0,\mu)\in\bar{D}\times I_\mu$, згідно з (8), будуємо послідовність функцій $x_m(t,y_0,\mu)$, залежну від y_0 та μ як від параметрів;

б) знаходимо її граничну функцію $x^*(t,y_0,\mu)$;

в) знаходимо розв'язок $y_0 = y_0^*,\ \mu=\mu^*$ визначального рівняння (17);

г) шукаємо розв'язок початкової задачі $\dot{x}(t) = f(t,x(t),x(\lambda(t)))$, $x(0) = x_0 = (x_{01},y_0^*)$, або, що те саме, граничну функцію $x^*(t,y_0^*,\mu^*)$ послідовності $x_m(t,y_0^*,\mu^*)$.

Отримана функція і буде точним розв'язком крайової задачі (1), (4), (5), а за наближений розв'язок, який дає похибку, що не перевищує $W_m(y_0^*,\mu^*)$, можна взяти функцію $x_m(t,y_0^*,\mu^*)$ вигляду (8).

Очевидно, головною проблемою при реалізації наведеного алгоритму є побудова в аналітичному вигляді функції $x^*(t, y_0, \mu)$. Крім цього, з точки зору практичного застосування важливо вміти зробити висновок про існування розв'язку крайової задачі (1), (4), (5) не за граничною функцією $x^*(t, y_0, \mu)$, а за її m-тим наближенням $x_m(t, y_0, \mu)$.

Тому розглянемо наближене визначальне рівняння

$$\Delta_m(y_0, \mu) = 0, \tag{18}$$

де

$$\Delta_m(y_0, \mu) = \frac{1}{\mu T}\left[B^{-1}d - \left(B^{-1}A + \mu E\right)x_0\right] -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(t, x_m(t, y_0, \mu), x_m(\lambda(t), y_0, \mu))dt,$$

яке відрізняється від точного лише тим, що замість граничної функції $x^*(t, y_0, \mu)$ фігурує її m-те наближення $x_m(t, y_0, \mu)$.

Достатні умови розв'язності крайової задачі (1), (4), (5) дає наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теореми 1, а також умови:*

1) існує опукла замкнена область $\tilde{\bar{D}} \times \tilde{I}_\mu \subset \bar{D} \times I_\mu$, в якій наближене визначальне рівняння (18) має для деякого фіксованого $m \geq 1$ єдиний розв'язок $(y_0, \mu) = (y_{0m}, \mu_m)$ ненульового індексу;

2) на межі S області $\tilde{\bar{D}} \times \tilde{I}_\mu$ виконується нерівність

$$\inf_{x_0 \in S} |\Delta_m(y_0, \mu)| > 2KW_m(y_0, \mu).$$

Тоді крайова задача (1), (4), (5) має розв'язок $(x^*(t), \mu^*)$, початкове значення $x^*(0) = col(x_{01}, y_0^*)$ якого таке, що $y_0^* \in \tilde{\bar{D}}$, а $\mu^* \in \tilde{I}_\mu$.

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 17.1 в [2].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.— К.: Наук. думка, 1985.— 224 с.

2. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.— К.: Наук. думка, 1992.— 280 с.

3. *Трофимчук Е.П., Коваленко А.В.* Численно-аналитический метод А.М. Самойленко без определяющего уравнения // Укр. мат. журн.— 1995.— **47**, N 1.— С.138-140.

4. *Ронто Н.И., Самойленко А.М., Трофимчук С.И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Укр. мат. журн.— 1998.— **50**, N 7.— С. 960—979.

5. *Янчук С.В.* Дослідження неавтономних диференціальних рівнянь та системи Чуа: Дис. ... канд. фіз.-мат. наук.— Київ, 1997.— 111 с.

6. *Augustynowicz A., Kwapisz M.* On a numerical-analytic method of solving of boundary value problem for functional differential equation of neutral type // Math. Nachr.— 1990.— **145**.— P.255—269.

7. *Kwapisz M.* Some remarks on an integral equation arising in applications of numerical-analytic method of solving of boundary value problems // Укр. мат. журн.— 1992.— **44**, N 1.— С.128—132.

8. *Філіпчук М.П., Бігун Я.Й.* Чисельно-аналітичний метод дослідження багатоточкових крайових задач для систем диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Укр. мат. журн.— 1998.— **50**, N 11.— С.1581—1585.

9. *Філіпчук М.П.* Задача з інтегральними крайовими умовами для системи диференціальних рівнянь із перетвореним аргументом // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— Чернівці: Прут, 2001.— Вип.7.— С.243—250.

Стаття надійшла до редколегії 17.06.2002