УДК 517.9

©2002 р. Т.М. Сопронюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ІСНУВАННЯ РОЗРИВНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО МНОГОВИДУ БАГАТОЧАСТОТНОЇ ІМПУЛЬСНОЇ СИСТЕМИ

Встановлено умови існування інтегрального многовиду для багаточастотних нелінійних коливних систем з імпульсним впливом і одержано оцінки частинних похідних функції, яка визначає інтегральний многовид.

We have established the conditions of existence of integrated manifold for multifrequency nonlinear oscillatory systems with pulse influence and got the estimations of the partial derivatives function which determines the integrated manifold.

Питання існування інтегрального многовиду для систем диференціальних рівнянь з імпульсним впливом досліджувалось у працях [1],[2]. У даній статті це питання розглядається стосовно більш широкого класу систем, а саме багаточастотних систем з імпульсним впливом. Якісне дослідження таких систем без імпульсного впливу описано в монографії [3]. У статті використано методику побудови інтегрального многовиду, запропоновану в цій роботі. Істотну роль у доведенні відіграють оцінки осциляційних інтегралів і сум для розривних функцій, які одержані в статтях [4] і [5].

Розглядається багаточастотна імпульсна система вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\tau)+\tilde{a}(x,\varphi,\tau)+\varepsilon A(x,\varphi,\tau,\varepsilon),\ \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau,\varepsilon),\ \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta x|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p(x,\tau_\nu)+$$

$$+\varepsilon\tilde{p}(x,\varphi,\tau_\nu) + \varepsilon^2 P(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(x,\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \tag{1}$$

де $x \in \mathcal{D} \subset R^n, \varphi \in R^m, m \geq 2, \tau \in R, \varepsilon \in (0,\varepsilon_0], \mathcal{D}$ - обмежена область, дійсні вектор-функції $a, \tilde{a}, p, \tilde{p}, q, A, P, \omega$ і b визначені і 2π-періодичні за кожною із змінних $\varphi_\nu, \nu = \overline{1,m}$, на множині $\bar{G} = \mathcal{D} \times R^m \times R \times (0,\varepsilon_0]$, $\tau_{\nu+1} - \tau_\nu = \theta\varepsilon, \theta = const > 0, \nu \in Z$. Не втрачаючи загальності, можна вважати, що середнє за φ в кубі періодів функцій $\tilde{a}(x,\varphi,\tau), \tilde{p}(x,\varphi,\tau)$ тотожно дорівнює нулю.

Розглянемо допоміжну систему рівнянь

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = a(\bar{x},\tau), \quad \tau \neq \tau_\nu, \quad \Delta\bar{x}|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon p(\bar{x},\tau_\nu) \tag{2}$$

і припустимо, що існує її розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(\tau,\varepsilon)$, який визначений для всіх $\tau \in R$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ і лежить в $\mathcal{D}$ разом із своїм ρ-околом. Будемо вважати, що система рівнянь у варіаціях

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x}a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)z, \quad \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta z|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon\frac{\partial}{\partial x}p(\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu)z.$$

гіперболічна рівномірно за $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$. Не втрачаючи загальності, систему у варіаціях можна записати у вигляді:

$$\frac{dz_+}{d\tau} = H_+(\tau,\varepsilon)z_+, \quad \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta z_+|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_+(\tau_\nu,\varepsilon)z_+, \tag{3}$$

$$\frac{dz_-}{d\tau} = H_-(\tau,\varepsilon)z_-, \quad \tau \neq \tau_\nu,$$

$$\Delta z_-|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_-(\tau_\nu,\varepsilon)z_-, \tag{4}$$

де $z = (z_+, z_-)$, z_+ і z_- - відповідно n_0 і $n-n_0$-вимірні вектори, $0 \leq n_0 \leq n$, n_0- ціле і не залежить від ε,

$$H(\tau,\varepsilon) = \mathrm{diag}\ [H_+(\tau,\varepsilon), H_-(\tau,\varepsilon)] =$$

$$= \frac{\partial a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)}{\partial x},$$

$$G(\tau,\varepsilon) = \mathrm{diag}\,[G_+(\tau,\varepsilon), G_-(\tau,\varepsilon)] =$$

$$= \frac{\partial p(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau)}{\partial x},$$

а нормальні фундаментальні матриці $Q_+(\tau,t,\varepsilon)$ і $Q_-(\tau,t,\varepsilon)$ розв'язків систем (3) і (4) для всіх $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ справджують нерівності

$$\|Q_+(\tau,t,\varepsilon)\| \le Ke^{\gamma(\tau-t)} \quad \forall\tau \le t,$$

$$\|Q_-(\tau,t,\varepsilon)\| \le Ke^{-\gamma(\tau-t)} \quad \forall\tau \ge t$$

з деякими сталими $K \ge 1$ і $\gamma > 0$, незалежними від ε.

Позначимо через $Q(\tau,t,\varepsilon)$ квадратну матрицю порядку n

$$Q(\tau,t,\varepsilon) = \begin{cases} -\mathrm{diag}\,(Q_+(\tau,t,\varepsilon);0), & \tau < t, \\ \mathrm{diag}\,(0;Q_-(\tau,t,\varepsilon)), & \tau > t. \end{cases}$$

Тоді

$$\|Q(\tau,t,\varepsilon)\| \le Ke^{-\gamma|\tau-t|}. \qquad (5)$$

Перетворимо рівняння (1) за допомогою заміни $y = x - \bar{x}(\tau,\varepsilon), y = (y_+,y_-)$, до вигляду

$$\frac{dy_+}{d\tau} = H_+(\tau,\varepsilon)y_+ + F_+(y,\tau,\varepsilon)+$$

$$+\tilde{a}_+(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau)+\varepsilon A_+(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon),$$

$$\frac{dy_-}{d\tau} = H_-(\tau,\varepsilon)y_- + F_-(y,\tau,\varepsilon)+$$

$$+\tilde{a}_-(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau)+\varepsilon A_-(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon),$$

$$\Delta y_+|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_+(\tau_\nu,\varepsilon)y_+ + \varepsilon\Phi_+(y,\tau_\nu,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\tilde{p}_+(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu)+$$

$$+\varepsilon^2 P_+(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

$$\Delta y_-|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G_-(\tau_\nu,\varepsilon)y_- + \varepsilon\Phi_-(y,\tau_\nu,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\tilde{p}_-(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu)+$$

$$+\varepsilon^2 P_-(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \qquad (6)$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon),$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(y+\bar{x}(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

де

$$(\tilde{a}_+,\tilde{a}_-) = \tilde{a}, \quad (\tilde{p}_+,\tilde{p}_-) = \tilde{p}, \quad (A_+,A_-) = A,$$

$$(P_+,P_-) = P, \quad (F_+,F_-) = F, \quad (\Phi_+,\Phi_-) = \Phi,$$

$$F = a(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau) - a(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau) - H(\tau,\varepsilon)y \equiv$$

$$\equiv \int_0^1 [\frac{\partial}{\partial y}a(ly+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau) - H(\tau,\varepsilon)]dly,$$

$$\Phi = p(y+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau) - p(\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau) - G(\tau,\varepsilon)y \equiv$$

$$\equiv \int_0^1 [\frac{\partial}{\partial y}p(ly+\bar{x}(\tau,\varepsilon),\tau) - G(\tau,\varepsilon)]dly.$$

Інтегральний многовид рівнянь (6) будемо визначати методом послідовних наближень як границю при $j \to \infty$ інтегральних многовидів $y = Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)$, $(\psi,\tau,\varepsilon) \in R^m \times R \times (0,\varepsilon_0]$, системи

$$\frac{dy}{d\tau} = H(\tau,\varepsilon)y + F(Y_{j-1}(\varphi,\tau,\varepsilon),\tau,\varepsilon)+$$

$$+\tilde{a}(X_{j-1}(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau)+$$

$$+\varepsilon A(X_{j-1}(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \ne \tau_\nu,$$

$$\Delta y|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon G(\tau_\nu,\varepsilon)y + \varepsilon\Phi(Y_{j-1}(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon\tilde{p}(X_{j-1}(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu)+$$

$$+\varepsilon^2 P(X_{j-1}(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(X_{j-1}(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \ne \tau_\nu,$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(X_{j-1}(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon), \qquad (7)$$

в яких $Y_0 \equiv 0, X_{j-1}(\varphi,\tau,\varepsilon) = \bar{x}(\tau,\varepsilon) + Y_{j-1}(\varphi,\tau,\varepsilon)$.

За допомогою матриці $Q(\tau,t,\varepsilon)$ інтегральний многовид системи (7) можна визначити формулою

$$Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau,t,\varepsilon)\times$$

$$\times[F(Y_{j-1}(\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon),t,\varepsilon)+$$

$$+\tilde{a}(X_{j-1}(\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon),\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t)+$$

$$+\varepsilon A(X_{j-1}(\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon),\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),t,\varepsilon)]dt+$$

$$+\varepsilon\sum_{\nu=-\infty}^{\infty}Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)[\Phi(Y_{j-1}(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),$$

$$\tau_\nu,\varepsilon)+\tilde p(X_{j-1}(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu)+$$
$$+\varepsilon P(X_{j-1}(\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon),\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j}(\psi,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon)], \tag{8}$$

де $\varphi=\varphi^t_{\tau,j}(\psi,\varepsilon)$ - розв'язок другого рівняння системи (7), який при $\tau=t$ набуває значення ψ.

Накладемо наступні обмеження:

$$\sigma_0=\frac{2}{\gamma}K\sup_{x,\varphi,\tau}\|\frac{\partial}{\partial x}\tilde a(x,\varphi,\tau)\|+$$

$$+\frac{2}{\gamma\theta}K\sup_{x,\varphi,\tau}\|\frac{\partial}{\partial x}\tilde p(x,\varphi,\tau)\|<1, \tag{9}$$

$$[a,\tilde a,p,\tilde p,b,q]\in C^1_\tau(\bar G,\sigma_1)\cap C^2_{x,\varphi}(\bar G,\sigma_1),$$
$$\left[\frac{\partial a}{\partial x},\frac{\partial p}{\partial x}\right]\in C^1_\tau(\bar G,\sigma_1),\quad [A,P]\in C^2_{x,\varphi}(\bar G,\sigma_1),$$

$$\sum_k[\|k\|^4\sup_{\bar G}\|r_k\|+$$

$$+\|k\|^3(\sup_{\bar G}\|\frac{\partial r_k}{\partial\tau}\|+\sup_{\bar G}\|\frac{\partial r_k}{\partial x}\|)]\le\sigma_1,$$

$$\sum_k\|k\|^{1-1/(l+1)}[\|k\|\sup_{\bar G}\|c_k\|+$$

$$+(\sup_{\bar G}\|\frac{\partial c_k}{\partial\tau}\|+\sup_{\bar G}\|\frac{\partial c_k}{\partial x}\|)]\le\sigma_1,\quad l\ge m \tag{10}$$

і $\frac{\partial}{\partial\tau}A(x,\varphi,\tau,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial\tau}P(x,\varphi,\tau,\varepsilon)$ - неперервні за $(x,\varphi,\tau)\in\mathcal D\times R^m\times R$ при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$. Тут σ_1 - деяка додатна стала, $c_k=c_k(x,\tau,\varepsilon),r_k=r_k(x,\tau,\varepsilon)$ - коефіцієнти Фур'є при гармоніках $\exp\{i(k,\varphi)\}$ розкладу відповідно функцій $c(x,\varphi,\tau,\varepsilon)=[\tilde a(x,\varphi,\tau);b(x,\varphi,\tau,\varepsilon)],r(x,\varphi,\tau,\varepsilon)=[\tilde p(x,\varphi,\tau);q(x,\varphi,\tau,\varepsilon)]$ в ряд Фур'є. Через $C^l_{x,\varphi}(\bar G,\sigma_1)$ $(C^l_\tau(\bar G,\sigma_1))$ позначено множину вектор-функцій, які при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ мають неперервні за $x,\varphi(\tau)$ і обмежені в $\bar G$ сталою σ_1 частинні похідні за всіма змінними $x,\varphi(\tau)$ до порядку l включно. За норму матриці візьмемо суму модулів її елементів.

Позначимо через $W_l(\tau)$ і $W^*_l(\tau)$ відповідно $(l+1)\times m$-матрицю $W_l(\tau)=\left(\frac{d^{g-1}}{d\tau^{g-1}}\omega_\nu(\tau)\right)^{l+1,m}_{g,\nu=1}$ і транспоновану матрицю.

Для побудови інтегрального многовиду рівнянь (6) дослідимо деякі властивості функцій $y=Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)$.

Теорема 1. *Нехай:*

1) виконуються умови (5),(9),(10);

2) функції $\omega^{(\nu)}(\tau),(\nu=\overline{0,l})$ рівномірно неперервні на R і $\|(W^*_l(\tau)W_l(\tau))^{-1}W^*_l(\tau)\|\le\sigma_1$ для всіх $\tau\in R$;

Тоді при досить малому $\varepsilon_0>0$ функції $Y_j=Y_j(\psi,\tau,\varepsilon),j=0,1,...,$ що визначаються рівністю (8), 2π -періодичні по $\psi_\nu,\nu=\overline{1,m}$, двічі неперервно диференційовні по $(\psi,\tau)\in R^m\times\bar R,\bar R=R\setminus\{\tau_\nu\}^\infty_{\nu=-\infty}$ і при кожному фіксованому $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справджуються нерівності

$$\|Y_j\|\le d_1\varepsilon^{1/(l+1)},\ \|\frac{\partial}{\partial\psi}Y_j\|\le d_2\varepsilon^{1/(l+1)},$$

$$\sum_{\eta=1}^m\|\frac{\partial^2}{\partial\varphi\partial\varphi_\eta}Y_j\|\le d_3\varepsilon^{1/(l+1)} \tag{11}$$

для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1\equiv R^m\times\bar R\times(0,\varepsilon_0]$. Тут d_1,d_2,d_3 - сталі, незалежні від ε та j.

Схема доведення теореми така ж, як і теореми теореми 13.1 у монографії [3], якщо використовувати оцінки осциляційних інтегралів і сум [4],[5] для розривних функцій.

Одержані властивості інтегральних многовидів $y=Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)$ рівнянь (7) дають можливість, використовуючи метод послідовних наближень, будувати інтегральний многовид системи (6).

Розглянемо аналог теореми 14.1 з монографії [3] для систем вигляду (1) без імпульсного впливу і покажемо, що послідовність $\{X_j(\psi,\tau,\varepsilon)\}$ збігається до інтегрального многовиду системи (1).

Теорема 2. *Якщо виконуються умови теореми 1, то для досить малого $\varepsilon_0>0$ справджуються наступні твердження:*

1) існує інтегральний многовид $x=X(\psi,\tau,\varepsilon)$ системи (1), який лежить в $d_1\varepsilon^\alpha$-околі кривої $x=\bar x(\tau,\varepsilon)$ для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_2\equiv R^m\times R\times(0,\varepsilon_0]$, $\alpha=1/(l+1)$;

2) функція $X(\psi,\tau,\varepsilon)$ - 2π-періодична за $\psi_\nu, \nu=\overline{1,m}$, неперервно диференційовна за $\psi \in R^m, \tau \in \bar{R}$ при кожному фіксованому $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, а для матриці частинних похідних за ψ справджується нерівність

$$\|\frac{\partial}{\partial\psi}X(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le d_2\varepsilon^\alpha$$

для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1$ і умова Ліпшиця за змінними ψ:

$$\|\frac{\partial X(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi} - \frac{\partial X(\bar\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\psi}\| \le d_3\varepsilon^\alpha\|\psi-\bar\psi\|$$

$$\forall(\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1, \bar\psi \in R^m;$$

3) на інтегральному многовиді система (1) набуває вигляду

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + b(X(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon), \quad \tau \ne \tau_\nu,$$

$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu} = \varepsilon q(X(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon).$$

Доведення. Для доведення збіжності послідовності $\{Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\}$ одержимо оцінку норми $\|Y_{j+1}-Y_j\|$:

$$\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon) - Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le$$

$$\le (\tilde\sigma_0 + \sigma_2\varepsilon^\alpha)\sup_{G_1}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) -$$

$$-Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\| +$$

$$+\|\int_{-\infty}^{\infty} Q(\tau,t,\varepsilon)[\tilde a(\bar x(t,\varepsilon),\varphi^t_{\tau,j+1},\varepsilon) -$$

$$-\tilde a(\bar x(t,\varepsilon),\varphi^t_{\tau,j},t)]dt\| +$$

$$+\|\varepsilon\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} Q(\tau,\tau_\nu,\varepsilon)[\tilde p(\bar x(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j+1},\varepsilon) -$$

$$-\tilde p(\bar x(\tau_\nu,\varepsilon),\varphi^{\tau_\nu}_{\tau,j},\tau_\nu)]\|, \qquad (12)$$

$$\tilde\sigma_0 = (\sigma_0+1)/2, \quad \sigma_2 = \mathrm{const}.$$

За допомогою оцінок осциляційних інтегралів та сум із [4],[5] та нерівностей (14.8) із [3] останні два доданки оцінюються зверху величиною $\sigma_3\varepsilon^\alpha \sup_{G_2}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) - Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\|$ для всіх $j \ge 1$ з деякою сталою σ_3. Тому з (12) випливає оцінка

$$\sup_{G_2}\|Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon) - Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le$$

$$\le \frac{1+\tilde\sigma_0}{2}\sup_{G_2}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) - Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\|, \qquad (13)$$

яка виконується для всіх $j \ge 1$ і $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, де ε_0 досить мале. Оскільки стала $\frac{1}{2}(1+\tilde\sigma_0)$ менша за одиницю і $\|Y_1(\psi,t,\varepsilon)\| \le d_1\varepsilon_0^\alpha$, то із (13) випливає рівномірна збіжність послідовності $\{Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\}$ на множині G_2. У зв'язку з цим функція

$$Y(\psi,\tau,\varepsilon) = \lim_{j\to\infty} Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)$$

2π-періодична за $\psi_\nu, \nu=\overline{1,m}$, неперервна за $(\psi,\tau) \in R^m \times \bar R$ при кожному фіксованому ε і $\|Y(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le d_1\varepsilon^\alpha$ для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon) \in G_2$.

Аналогічно отримуємо оцінку

$$\sup_{G_1}\|\frac{\partial}{\partial\psi}(Y_{j+1}(\psi,\tau,\varepsilon) - Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le$$

$$\le (\tilde\sigma_0 + \sigma_4\varepsilon_0^\alpha)\sup_{G_1}\|\frac{\partial}{\partial\psi}(Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) -$$

$$-Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon))\| +$$

$$+\sigma_5\sup_{G_1}\|Y_j(\psi,\tau,\varepsilon) - Y_{j-1}(\psi,\tau,\varepsilon)\|$$

зі сталими σ_4 і σ_5, незалежними від ε і j. Оскільки $\tilde\sigma_0 < 1$, то, вибираючи $\varepsilon_0 > 0$ досить малим, з останньої оцінки встановлюємо рівномірну збіжність на множині G_1 послідовності $\{\frac{\partial}{\partial\psi}Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\}$ до функції $\frac{\partial}{\partial\psi}Y(\psi,\tau,\varepsilon)$, яка задовольняє нерівність

$$\|\frac{\partial}{\partial\psi}Y(\psi,\tau,\varepsilon)\| \le d_2\varepsilon^\alpha \quad \forall(\psi,\tau,\varepsilon) \in G_1.$$

Зазначимо також, що при кожному $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ функція $\frac{\partial}{\partial\psi}Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ неперервна за ψ,τ за винятком точок імпульсного впливу, а умова Ліпшиця за ψ випливає з останньої нерівності в (11).

Враховуючи рівномірну збіжність послідовностей $\{Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\}$ і $\{\frac{\partial}{\partial\psi}Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\}$ на множині G_1, як і в [3], доводимо рівномірну збіжність послідовності $\{\frac{\partial}{\partial\tau}Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)\}$, рівність

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\partial Y_j(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}=\frac{\partial Y(\psi,\tau,\varepsilon)}{\partial\tau}$$

для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$ і неперервність функції $\frac{\partial}{\partial\tau}Y(\psi,\tau,\varepsilon)$ за $(\psi,\tau)\in R^m\times\bar{R}$.

Оскільки для всіх $(\psi,\tau,\varepsilon)\in G_1$ справджується тотожність

$$\frac{\partial Y_j}{\partial\tau}+\frac{\partial Y_j}{\partial\psi}\left[\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(X_{j-1},\psi,\tau,\varepsilon)\right]=$$
$$=H(\tau)Y_j+F(Y_{j-1},\tau)+\tilde{a}(X_{j-1},\psi,\tau)+$$
$$+\varepsilon A(X_{j-1},\psi,\tau,\varepsilon),\varepsilon),$$

в якій значення функцій Y_{j-1},X_{j-1},Y_j беруться в точці (ψ,τ,ε), то граничний перехід в ній при $j\to\infty$ веде до співвідношення

$$\frac{\partial X}{\partial\tau}+\frac{\partial X}{\partial\psi}\left[\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(X,\psi,\tau,\varepsilon)\right]=$$
$$=a(X,\tau)+\tilde{a}(X,\psi,\tau)+\varepsilon A(X,\psi,\tau,\varepsilon),\ \tau\neq\tau_\nu \tag{13}$$

в якому $X=X(\psi,\tau,\varepsilon)=\bar{x}(\tau,\varepsilon)+Y(\psi,\tau,\varepsilon)$. А в точках імпульсного впливу маємо

$$\Delta Y_j|_{\tau=\tau_\nu}=Y_j(\psi,\tau_\nu+0,\varepsilon)-Y_j(\psi,\tau_\nu,\varepsilon)=$$
$$=\varepsilon G(\tau_\nu,\varepsilon)Y_j(\psi,\tau_\nu,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\Phi(Y_{j-1}(\psi,\tau_\nu,\varepsilon),\tau_\nu,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon\tilde{p}(X_{j-1}(\psi,\tau_\nu,\varepsilon),\psi,\tau_\nu)+$$
$$+\varepsilon^2P(X_{j-1}(\psi,\tau_\nu,\varepsilon),\psi,\tau_\nu,\varepsilon),$$

тому

$$\lim_{j\to\infty}\Delta X_j|_{\tau=\tau_\nu}=\lim_{j\to\infty}(\varepsilon p(X_{j-1},\tau_\nu)+$$
$$+\varepsilon\tilde{p}(X_{j-1},\psi,\tau_\nu)+\varepsilon^2P(X_{j-1},\psi,\tau_\nu,\varepsilon)).$$

Використовуючи неперервність функцій $p(x,\tau),\tilde{p}(x,\psi,\tau),P(x,\psi,\tau,\varepsilon)$, одержуємо рівність

$$\Delta X|_{\tau=\tau_\nu}=\varepsilon p(X,\tau_\nu)+\varepsilon\tilde{p}(X,\psi,\tau_\nu)+$$
$$+\varepsilon^2P(X,\psi,\tau_\nu,\varepsilon). \tag{15}$$

Розглянемо далі задачу Коші

$$\frac{d\varphi}{d\tau}=\frac{\omega(\tau)}{\varepsilon}+b(X(\varphi,\tau,\varepsilon),\varphi,\tau,\varepsilon),\quad \tau\neq\tau_\nu,$$
$$\Delta\varphi|_{\tau=\tau_\nu}=\varepsilon q(X(\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),\varphi,\tau_\nu,\varepsilon),$$
$$\varphi|_{\tau=\tau_0}=\psi\in R^m,\quad \tau_0\in R,$$

і позначимо через $\varphi^\tau_{\tau_0}(\psi,\varepsilon)$ її розв'язок. З (14) випливає, що функція $x^\tau_{\tau_0}(\psi,\varepsilon)=X(\varphi^\tau_{\tau_0}(\psi,\varepsilon),\tau,\varepsilon)$ задовольняє рівняння

$$\frac{dx^\tau_{\tau_0}}{d\tau}=a(x^\tau_{\tau_0},\tau)+\tilde{a}(x^\tau_{\tau_0},\varphi^\tau_{\tau_0},\tau)+$$
$$+\varepsilon A(x^\tau_{\tau_0},\varphi^\tau_{\tau_0},\tau,\varepsilon),\quad \tau\neq\tau_\nu,$$

а величини стрибків цієї функції визначаються рівністю (15) і набувають вигляду

$$\Delta x|_{\tau=\tau_\nu}=\varepsilon p(x^{\tau_\nu}_{\tau_0},\tau_\nu)+\varepsilon\tilde{p}(x^{\tau_\nu}_{\tau_0},\varphi^{\tau_\nu}_{\tau_0},\tau_\nu)+$$
$$+\varepsilon^2P(x^{\tau_\nu}_{\tau_0},\varphi^{\tau_\nu}_{\tau_0},\tau_\nu,\varepsilon),$$

тому за означенням $x=X(\psi,\tau,\varepsilon)$ є інтегральним многовидом системи (1). Властивості функції $X(\psi,\tau,\varepsilon)$ випливають із властивостей $\bar{x}(\tau,\varepsilon)$ і $Y(\psi,\tau,\varepsilon)$. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища школа, 1987.— 288 с.

2. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Метод усреднения в системах с импульсным воздействием // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, N1.— С.56—64.

3. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340с.

4. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Експоненціальна оцінка фундаментальної матриці лінійної імпульсної системи. // Укр. мат. журн.— 2001.— 53, N8.— С.1101—1109.

5. *Петришин Р. І., Сопронюк Т.М.* Оцінки похибки методу усереднення для багаточастотних коливних систем. // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.–С.92–96.

Стаття надійшла до редколегії 11.10.2002