УДК 517.518.85:517.518.36

©2002 р. **Н.В. Сніжко[1], М.Я. Тихоненко[2]**

[1]Запорізький державний університет, Запоріжжя
[2]Одеський національний університет ім. І.І. Мечнікова

АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЙ НА ДІЙСНІЙ ОСІ В ПРОСТОРАХ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ

Встановлюються апроксимативні властивості відрізків рядів Фур'є та інтерполяційних многочленів Лагранжа в просторах $L_{p\rho}$, $\rho(x) = \left(1+x^2\right)^{-1}$, $p > 1$, і L_p, $p \geq 2$, на дійсній осі за спеціальними базисними системами функцій. Одержані достатні умови збіжності у вказаних просторах многочленів Лагранжа та відрізків рядів Фур'є в залежності від конструктивних властивостей апроксимованих функцій.

The approximative properties of the truncated Fourier series and the interpolational Lagrange polynomials in the spaces $L_{p\rho}$, $\rho(x) = \left(1+x^2\right)^{-1}$, $p > 1$, і L_p, $p \geq 2$ on the real axis by the special systems of functions, are determined. The sufficient conditions of convergence of the interpolational Lagrange polynomials and the truncated Fourier series depending on structural properties of the approximated functions, are obtained.

Дана робота присвячена встановленню апроксимативних властивостей відрізків рядів Фур'є та інтерполяційних многочленів Лагранжа в просторах $L_{p\rho}$, $\rho(x) = (1+x^2)^{-1}$, $p > 1$, і L_p, $p \geq 2$, на дійсній осі $\mathbf{R}$ відповідно за базисними системами функцій

$$\omega_k(x) = \left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k, k = 0, \pm 1, \ldots, \quad (1)$$

$$\psi_k(x) = \frac{2i}{x+i}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^k, k = 0, \pm 1, \ldots. \quad (2)$$

Зауважимо, що апроксимативні властивості відрізків рядів Фур'є та інтерполяційних многочленів Лагранжа в просторах C, $L_{2\rho}$, $\rho(x) = (1+x^2)^{-1}$, і C_{01}, L_2 на дійсній осі відповідно за базисними системами функцій (1) і (2) досить повно досліджені в роботах [1, 2].

1. Найкращі наближення. Нехай $X_n(Y_n)$ — множина узагальнених многочленів (у.м.) вигляду

$$P_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \omega_k(x) \quad (3)$$

$$\left(Q_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} b_k \psi_k(x)\right). \quad (4)$$

Тоді величина

$$E_n(f)_{L_{p\rho}} = \inf_{P_n \in X_n} ||f - P_n||_{L_{p\rho}} \quad (5)$$

$$\left(E_n(f_1)_{L_p} = \inf_{Q_n \in Y_n} ||f_1 - Q_n||_{L_p}\right) \quad (6)$$

називається найкращим наближенням функції $f(x)$ $(f_1(x))$ у.м. вигляду (3) ((4)). А у.м.

$$P_n^*(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k^* \omega_k(x)$$

$$\left(Q_n^*(x) = \sum_{k=-n}^{n} b_k^* \psi_k(x)\right),$$

на якому реалізується рівність (5) ((6)), називається у.м. найкращого наближення функції $f(x)$ $(f_1(x))$ в просторі $L_{p\rho}(L_p)$ у.м. вигляду (3) ((4)). Оскільки простір $L_{p\rho}(L_p)$ є банаховим, то згідно з працею [3, с. 44] у.м. $P_n^*(x)$ $(Q_n^*(x))$ існує і єдиний. При цьому, згідно з працею [4, с. 153], правильна рівність:

$$E_n(f)_{L_{p\rho}} = E_n^T(\psi)_{L_p(\gamma)}, \quad (7)$$

де $E_n^T(\psi)$ — найкраще наближення в просторі $L_p(\gamma)$, $p > 1$, на відрізку $\gamma = [-\pi; \pi]$ функції $\psi(u) = f\left(tg\frac{u}{2}\right)$ тригонометричними многочленами порядку не вище n.

Лема 1. [5, стор. 268]. *Якщо* $\psi \in L_p(\gamma)$, $p > 1$, *на* $[-\pi;\pi]$ *або* $\psi \in C(\gamma)$ *на* $[-\pi;\pi]$, *то*

$$E_n^T(\psi)_{L_p(\gamma)} \to 0, n \to \infty;$$

якщо $\psi \in L_p^{(r)}(\gamma)$, $r \geq 1$, $p > 1$, *на* $[-\pi;\pi]$, *то*

$$E_n^T(\psi)_{L_p(\gamma)} \leq \frac{K_r}{(n+1)^r}||\psi^{(r)}||_{L_p(\gamma)};$$

якщо $\psi \in C^{(r)}(\gamma)$, $r \geq 1$, *на* $[-\pi;\pi]$, *то*

$$E_n^T(\psi)_{L_p(\gamma)} \leq \frac{K_r\sqrt[p]{2\pi}}{(n+1)^r}||\psi^{(r)}||_{C(\gamma)};$$

якщо $\psi \in H_\alpha^{(r)}(\gamma)$, $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, *на* $[-\pi;\pi]$, *то*

$$E_n^T(\psi)_{L_p(\gamma)} \leq \frac{K_r\pi^\alpha\sqrt[p]{2\pi}}{2(n+1)^{r+\alpha}}A_r,$$

де A_r *— стала Гельдера функції* $\psi^{(r)}(u)$, *а* K_r *— стала Фавара [5, стор. 105].*

Лема 2. *Якщо* $p \geq 2$, *то справджується оцінка:*

$$E_n(f_1)_{L_p} \leq 2E_n(f)_{L_{p\rho}},$$

де функції $f_1 \in L_p$, $p \geq 2$, *і* $f \in L_{p\rho}$, $p \geq 2$, *пов'язані між собою співвідношенням*

$$f_1(x) = \frac{2i}{x+i}f(x). \tag{8}$$

Доведення цього твердження випливає із ланцюжка нерівностей:

$$E_n(f_1)_{L_p} = ||f_1 - \sum_{k=-n}^{n} b_k^*\psi_k||_{L_p} =$$

$$= \left|\left|\frac{2i}{x+i}f(x) - \sum_{k=-n}^{n} b_k^*\frac{2i}{x+i}\omega_k(x)\right|\right| \leq$$

$$\leq \left|\left|\frac{2i}{x+i}f(x) - \sum_{k=-n}^{n} a_k^*\frac{2i}{x+i}\omega_k(x)\right|\right| \leq$$

$$\leq 2\left|\left|\frac{1}{(1+x^2)(1+x^2)^{p/2-1}}\left|f(x) - P_n^*(x)\right|\right|\right| \leq$$

$$\leq 2\,||f - P_n^*||_{L_{p\rho}} = 2E_n(f)_{L_{p\rho}}.$$

2. Наближення функцій відрізками рядів Фур'є. Нехай $f \in L_{p\rho}$, $p > 1$, $\rho(x) = (1+x^2)^{-1}$ на $\mathbf{R}$. Тоді, згідно з працею [2], її коефіцієнти і ряд Фур'є за системою функцій (1) визначаються відповідно наступним чином:

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbf{R}} \rho(x)f(x)\overline{\omega_k(x)}dx, \; \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k\omega_k(x). \tag{9}$$

Нехай P_n — оператор, який ставить у відповідність кожній функції $f \in L_{p\rho}$ відрізок її ряду Фур'є, тобто

$$(P_nf)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\omega_k(x). \tag{10}$$

Зрозуміло, що $P_n : L_{p\rho} \to X_n$ і має властивість $P_n^2 = P_n$.

Теорема 1. *Справджується така оцінка:*

$$||f - (P_nf)||_{L_{p\rho}} \leq$$

$$\leq \left(1 + ||P_n||_{L_{p\rho}\to L_{p\rho}}\right)E_n(f)_{L_{p\rho}}.$$

Доведення цього твердження випливає з властивості $P_n^2 = P_n$ і наступного ланцюжка нерівностей:

$$||f - (P_nf)||_{L_{p\rho}} \leq ||f - P_n^*||_{L_{p\rho}} +$$

$$+ ||P_n^* - (P_nf)||_{L_{p\rho}} \leq$$

$$\leq E_n(f)_{L_{p\rho}} + ||(P_n\left[f - P_n^*\right])||_{L_{p\rho}} \leq$$

$$\leq \left(1 + ||P_n||_{L_{p\rho}\to L_{p\rho}}\right)E_n(f)_{L_{p\rho}}.$$

Згідно з працею [6], правильна рівність:

$$(P_nf)(x) = (\mathcal{P}_n\psi)(\mathrm{arctg}\,2x), \tag{11}$$

де $\psi(u) = f(tg(u/2))$, а $\mathcal{P}_n$ — оператор, який ставить у відповідність кожній функції $\psi \in L_p(\gamma)$ відрізок її ряду Фур'є порядку не вище n за тригонометричною системою функцій. При цьому [6] виконується оцінка:

$$||\mathcal{P}_n||_{L_p(\gamma)\to L_p(\gamma)} \leq C_1(p), \tag{12}$$

де тут і нижче $C_i(p)$ — цілком визначені сталі, які не залежать від n, а залежать тільки від p. Тоді із рівності (11), оцінки (12) і означення норм у просторах $L_{p\rho}$ і $L_p(\gamma)$ випливає оцінка

$$||P_n||_{L_{p\rho}\to L_{p\rho}} \leq C_2(p). \qquad (13)$$

Тепер із леми 1, теореми 1 і оцінок (7), (13) випливає

Теорема 2. *Якщо* $f \in L_{p\rho}$, $p > 1$, *або* $f(x) \in C$, *то* $||f - (P_n f)||_{L_{p\rho}} \to 0, n \to \infty$; *якщо* $f \in L_{p\rho}^{(r)}$, $r \geq 1$, $p > 1$, *то* $||f - (P_n f)||_{L_{p\rho}} \leq d_1(n+1)^{-r}$; *якщо* $f \in C^{(r)}$, $r \geq 1$, *то* $||f - (P_n f)||_{L_{p\rho}} \leq d_2(n+1)^{-r}$, $p > 1$; *якщо* $f \in H_\alpha^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, *то* $||f - (P_n f)||_{L_{p\rho}} \leq d_3(n+1)^{-r-\alpha}$, $p > 1$.

Тут і далі нижче d_i — цілком визначені сталі, які не залежать від n.

Нехай $f_1 \in L_p$, $p > 1$, на $\mathbf{R}$. Тоді її коефіцієнти Фур'є і ряд Фур'є за системою функцій (2) згідно з роботою [2] визначаються відповідно наступним чином:

$$\alpha_k' = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\mathbf{R}} f_1(x)\overline{\psi_k(x)}dx, \ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k' \psi_k(x). \qquad (14)$$

Позначимо через Q_n оператор, який ставить у відповідність кожній функції $f_1 \in L_p$, $p > 1$, відрізок її ряду Фур'є за системою функцій (2), тобто

$$(Q_n f_1)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k' \psi_k(x). \qquad (15)$$

Зрозуміло, що $Q_n : L_p \to Y_n$ і має властивість $Q_n^2 = Q_n$, на підставі якої справедлива

Теорема 3. *Справджується оцінка:* $||f_1 - Q_n f_1||_{L_p} \leq \left(1 + ||Q_n||_{L_p \to L_p}\right) E_n(f_1)_{L_p}$.

Лема 3. *Якщо* $p \geq 2$, *то виконується оцінка:*

$$||Q_n||_{L_p\to L_p} \leq 2||P_n||_{L_{2p}\to L_{2p}}.$$

Доведення. Згідно з працею [2] справедлива рівність, на підставі якої і означення норм у просторах L_p і $L_{p\rho}$ при $p \geq 2$ випливає оцінка:

$$||Q_n f_1||_{L_p} \leq 2||P_n f||_{L_{p\rho}},$$

з якої отримуємо твердження леми 3. Тут функції $f_1 \in L_p$, $p \geq 2$, $f \in L_{p\rho}$, $p \geq 2$, зв'язані між собою формулою (8).

Тепер на підставі леми 3 і оцінки (13) при $p \geq 2$ випливає оцінка

$$||Q_n||_{L_p\to L_p} \leq C_3(p), \ p \geq 2. \qquad (16)$$

Із теореми 3, лем 1 і 2 і оцінок (16) і (7) випливає

Теорема 4. *Якщо* $f_1 \in L_p$, $p \geq 2$, *або* $f_1 \in C_{01}$, *то* $||f_1 - Q_n f_1||_{L_p} \to 0, n \to \infty$; *якщо* $f_1 \in L_p^{(r)}$, $r \geq 1$, $p \geq 2$, *то* $||f_1 - Q_n f_1||_{L_p} \leq d_4(n+1)^{-r}$; *якщо* $f_1 \in C_{01}^{(r)}$, $r \geq 1$, *то* $||f_1 - Q_n f_1||_{L_p} \leq d_5(n+1)^{-r}$, $p \geq 2$; *якщо* $f_1 \in \dot{H}_{\alpha 1}^{(r)}$, $r \geq 0$, $0 < \alpha \leq 1$, *то* $||f_1 - Q_n f_1||_{L_p} \leq d_6(n+1)^{-r-\alpha}$, $p \geq 2$.

Теореми 2 і 4 встановлюють достатні умови збіжності відрізків рядів Фур'є за системами функцій (1) і (2) відповідно в просторах $L_{p\rho}$, $\rho(x) = (1+x^2)^{-1}$, $p > 1$, і L_p, $p \geq 2$, на дійсній осі $\mathbf{R}$ в залежності від конструктивних властивостей апроксимованих функцій.

3. Наближення функцій інтерполяційними многочленами Лагранжа. Нехай $f \in C$. Тоді, згідно з працею [1], її інтерполяційний многочлен Лагранжа за базисною системою функцій (1) визначається наступним чином:

$$(L_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k \omega_k(x),$$

$$a_k = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} f(x_j) e^{-\frac{2\pi i}{2n+1} jk}, \qquad (17)$$

де

$$x_j = -ctg\frac{\pi}{2n+1}j, \quad j = -n, \ldots, n. \qquad (18)$$

При цьому оператор $L_n : C \to X_n \subset L_{p\rho}$ і має властивість $L_n^2 = L_n$.

Теорема 5. *Нехай* $f \in C$. *Тоді* $||f - L_n f||_{L_{p\rho}} \leq \left(1 + ||L_n||_{C \to L_{p\rho}}\right) E_n(f)_{L_{p\rho}}$.

При цьому, згідно з працею [6], виконується оцінка

$$||L_n f||_{C\to L_{p\rho}} = ||\mathcal{L}_n \psi||_{C(\gamma)\to L_p(\gamma)}, \qquad (19)$$

де $(\mathcal{L}_n\psi)(u)$ — тригонометричний інтерполяційний многочлен Лагранжа порядку не вище n функції $\psi(u) = f(tg(u/2)) \in C(\gamma)$ за рівномірною сіткою вузлів інтерполяції на відрізку $\gamma = [-\pi;\pi]$; а також справджується оцінка [6]:

$$||\mathcal{L}_n||_{C(\gamma)\to L_p(\gamma)} \le C_4(p),$$

звідки на підставі рівності (19) випливає така оцінка:

$$||L_n||_{C\to L_{p\rho}} \le C_5(p). \qquad (20)$$

Тепер із теореми 5, леми 1 і оцінок (20) та (7) випливає

Теорема 6. *Якщо* $f \in C$, *то* $||f - L_nf||_{L_{p\rho}} \to 0, n \to \infty, p > 1$; *якщо* $f \in C^{(r)}$, $r \ge 1$, *то* $||f - L_nf||_{L_{p\rho}} \le d_7(n+1)^{-r}$, $p > 1$; *якщо* $f \in H_\alpha^{(r)}$, $r \ge 0$, $0 < \alpha \le 1$, *то* $||f - L_nf||_{L_{p\rho}} \le d_8(n+1)^{-r-\alpha}$, $p > 1$.

Нехай $f_1 \in C_{01}$. Тоді її інтерполяційний многочлен Лагранжа визначається так [1]:

$$(l_nf_1)(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k^{(1)}\omega_k(x),$$

$$a_k^{(1)} = \frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n} f_1(x_j)e^{-\frac{2\pi i}{2n+1}jk}, \qquad (21)$$

де x_j — вузли інтерполяції (14). При цьому $l_n : C_{01} \to Y_n$ і $l_n^2 = l_n$.

Теорема 7. *Нехай* $f_1 \in C_{01}$. *Тоді* $||f_1 - l_nf_1||_{L_p} \le \left(1 + ||l_n||_{C_{01}\to L_p}\right) E_n(f_1)_{L_p}$.

Згідно з роботою [1] $l_nf_1 \in C_{01}$ і може бути зображений у вигляді $(l_nf_1)(x) = -\sum_{k=-n}^{n-1} \gamma_k\psi_k(x)$, де $\gamma_k = a_1^{(1)} + a_2^{(1)} + \ldots + a_{k+1}^{(1)}$.

Лема 4. *При* $p \ge 2$ *правильна оцінка:*

$$||l_n||_{C_{01}\to L_p} \le 2||L_n||_{C\to L_{p\rho}},$$

де L_n *— інтерполяційний многочлен Лагранжа за вузлами інтерполяції (18) функції* $f(x) \in C$, *пов'язаною з функцією* $f_1 \in C_{01}$ *формулою (8).*

Доведення цього твердження здійснюється аналогічно доведенню леми 2.

Тепер на підставі леми 4 і оцінки (20) виконується оцінка:

$$||l_n||_{C_{01}\to L_p} \le C_6(p), \ p \ge 2, \qquad (21)$$

а з теореми 7, леми 1 і оцінок (21), (7) випливає

Теорема 8. *Якщо* $f_1 \in C_{01}$, *то* $||f_1 - l_nf_1||_{L_p} \to 0, n \to \infty$, $p \ge 2$; *якщо* $f_1 \in C_{01}^{(r)}$, $r \ge 1$, *то* $||f_1 - l_nf_1||_{L_p} \le d_9(n+1)^{-r}$, $p \ge 2$; *якщо* $f_1 \in \dot{H}_{\alpha 1}^{(r)}$, $r \ge 0$, $0 < \alpha \le 1$, *то* $||f_1 - l_nf_1||_{L_p} \le d_{10}(n+1)^{-r-\alpha}$, $p \ge 2$.

Теореми 6 і 8 встановлюють достатні умови збіжності в просторах $L_{p\rho}$, $p > 1$, $\rho(x) = (1+x^2)^{-1}$, і L_p, $p \ge 2$, інтерполяційних многочленів Лагранжа на дійсній осі $\mathbf{R}$ за вузлами інтерполяції (18) до апроксимованих функцій відповідно із просторів C і C_{01}.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Тихоненко Н.Я., Лисицина И.Н.* Интерполяция функций на вещественной оси и приложения // Вісник Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки.— 1998.— Вип. 2.— С.77—86.

2. *Тихоненко Н.Я.* О рядах Фурье по системам рациональных функций на вещественной оси и некоторые приложения // Вісник Київськ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки.— 1998.— Вип. 2.— С.127—137.

3. *Корнейчук Н.П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М.: Наука, 1979.— 320 с.

4. *Иванов В.В.* Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.— К.: Наук. думка, 1968.— 287 с.

5. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения.— М.: Наука, 1987.— 422 с.

6. *Габдулхаев Б.Г.* Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов // Теория функций и функц. анализ.— 1967.— N 4.— С.54—74.

Стаття надійшла до редколегії 17.06.2002