УДК 517.9

©2002 р. В.Ю. Слюсарчук

Український державний університет
водного господарства та природокористування, Рівне

ТЕОРЕМА ПРО НЕРУХОМУ ТОЧКУ ДЛЯ c-НЕПЕРЕРВНИХ ОПЕРАТОРІВ У ПРОСТОРАХ ОБМЕЖЕНИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Наведено теорему про нерухому точку для c-неперервних операторів, що діють у просторі $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.

A fixed point theorem for a c-continuous mappings in the space $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, are obtained.

1. c-Неперервні оператори.

Позначимо через $l_p = l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ банахів простір всіх відображень $x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, для кожного з яких $\sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)| < \infty$, якщо $p = \infty$, і $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^p < \infty$, якщо $p \in [1,\infty)$, з нормою

$$\|x\|_{l_p} =$$

$$= \begin{cases} \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|, & \text{якщо}\, p = \infty, \\ \left(\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} |x(n)|^p\right)^{1/p}, & \text{якщо}\, p \in [1,\infty). \end{cases}$$

Через $\mathfrak{S}$ позначимо множину всіх скінченних підмножин M множини $\mathbb{Z}$.

Для кожної множини $M \in \mathfrak{S}$ визначимо оператор $I_M : l_p \longrightarrow l_p$ рівністю

$$(I_M x)(n) = \begin{cases} x(n), & \text{якщо}\, n \in M, \\ 0, & \text{якщо}\, n \in \mathbb{Z}\setminus M, \end{cases}$$

де $x \in l_p$.

Говоритимемо, що послідовність $x_k \in l_p$, $k \in \mathbb{N}$ *локально збігається* до елемента $x \in l_p$ при $k \to \infty$, і позначатимемо

$$x_k \overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow} x \text{ при } k \to \infty,$$

якщо ця послідовність обмежена і

$$\lim_{k\to\infty} \|I_M(x_k - x)\|_{l_p} = 0$$

для кожної множини $M \in \mathfrak{S}$.

Оператор $F : l_p \longrightarrow l_p$ називатимемо *c-неперервним*, якщо для довільних $x \in l_p$ і послідовності $x_k \in l_p$, $k \in \mathbb{N}$, для яких $x_k \overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow} x$ при $k \to \infty$, випливає, що $Fx_k \overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow} Fx$ при $k \to \infty$.

Поняття c-неперервного оператора було введено (на мові "ε, δ") Е. Мухамадієвим [1] при дослідженні диференціальних операторів, і було продовжено його вивчення в [2]–[9] та інших працях. Розглянуте вище означення c-неперервного оператора було введено автором (див., наприклад, [10],[11]).

При дослідженні нелінійних операторів, що діють у просторі l_p, потрібно мати на увазі, що ні c-неперервність не випливає із неперервності, ні неперервність не випливає із c-неперервності. Наведемо відповідні приклади у випадку простору l_∞.

Приклад 1. Оператор $A : l_\infty \longrightarrow l_\infty$, визначений рівністю

$$(Ax)(n) = \operatorname{arctg}\{nx(n)\},\ n \in \mathbb{Z},$$

є c-неперервним. Однак у точці $x = 0$ для A порушується властивість неперервності.

Приклад 2. Розглянемо множину $l_{\infty,c}$ усіх елементів x простору l_∞, для кожного з яких існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} x(n)$. Ця множина є банаховим простором з нормою

$$\|x\|_{l_{\infty,c}} \overset{\text{def}}{=} \|x\|_{l_\infty},$$

$x \in l_{\infty,c}$. На $l_{\infty,c}$ визначимо лінійний обмежений функціонал

$$\varphi_0(x) = \lim_{n\to+\infty} x(n).$$

Згідно з теоремою Гана—Банаха про продовження лінійного функціоналу [12], існує лінійний обмежений функціонал φ, для якого $\varphi(x) = \varphi_0(x)$ для всіх $x \in l_{\infty,c}$ і $\|\varphi\|_{l_\infty^*} = 1$.

Розглянемо лінійний неперервний оператор $B : l_\infty \longrightarrow l_\infty$, визначений рівністю

$$(Bx)(n) = \varphi(x),\ n \in \mathbb{Z}.$$

Цей оператор не є c-неперервним, оскільки для елементів

$$x_k(n) = \begin{cases} 0, & \text{якщо}\, n \le k, \\ 1, & \text{якщо}\, n > k, \end{cases} \qquad k \ge 1,$$

простору l_∞ справджуються співвідношення

$$x_k \overset{\text{лок.},l_\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ при } k \to \infty,$$

$$(Bx_k)(n) = 1,\ k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{Z},$$

і

$$B0 = 0,$$

тобто Bx_k локально не прямує до $B0$ при $k \to \infty$.

2. Основні задача та теорема.

Для множини $S \subset l_p$ позначимо через $cl_{l_p}^{\text{лок}} S$ множину всіх таких елементів $x \in l_p$, для кожного з яких існує послідовність $x_k \in S$, $k \ge 1$, що $x_k \overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow} x$ при $k \to \infty$. Замикання множини S у просторі l_p позначимо через $cl_{l_p} S$.

Множини $cl_{l_p}^{\text{лок}} S$ і $cl_{l_p} S$ можуть не збігатися.

Приклад 3. Нехай $p = \infty$ і S – множина всіх таких елементів $x = x(n)$ простору l_∞, для кожного з яких $\|x\|_{l_\infty} \le 1$ і $x(n) \ne 0$ для скінченної множини значень n. Тоді

$$cl_{l_\infty}^{\text{лок}} S = \{x \in l_\infty : \|x\|_{l_\infty} \le 1\}$$

і елемент $z = z(n) \equiv 1$ із $cl_{l_\infty}^{\text{лок}} S$ не належить множині $cl_{l_\infty} S$, оскільки $\|z - w\|_{l_\infty} \ge 1$ для всіх $w \in S$ (тому $\|z - w\|_{l_\infty} \ge 1$ для всіх $w \in cl_{l_\infty} S$). Отже, $cl_{l_\infty} S \ne cl_{l_\infty}^{\text{лок}} S$.

Важливою в нелінійному функціональному аналізі є

Теорема 1 (Шаудер [13]). *Якщо Ω – замкнена опукла обмежена підмножина банахового простору X і $F : \Omega \longrightarrow \Omega$ – цілком неперервний оператор, то тоді F має нерухому точку.*

Метою цієї статті є встановлення аналога теореми 1 для c-неперервних операторів, що діють у просторі l_p.

Справджується

Теорема 2. *Нехай*:
1) $1 \le p \le \infty$;
2) $\mathfrak{N} : l_p \longrightarrow l_p$ – *c-неперервний оператор*;
3) $\mathcal{V}$ – *обмежена опукла підмножина простору l_p*;
4) $I_M \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ *для всіх* $M \in \mathfrak{S}$;
5) $cl_{l_p}^{\text{лок}} \mathcal{V} = \mathcal{V}$;
6) $\mathfrak{N}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.

Тоді існує хоча б одна точка $x \in \mathcal{V}$ така, що $\mathfrak{N}x = x$.

3. Зв'язок обмежених і локально збіжних послідовностей.

Доведення теореми 2 використовуватиме наступне твердження.

Лема. *Для кожної обмеженої послідовності елементів $x_k \in l_p$, $k \in \mathbb{N}$ існують такі строго зростаюча послідовність чисел $k_l \in \mathbb{N}$, $l \in \mathbb{N}$ і елемент $x \in l_p$, що*

$$x_{k_l} \overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow} x \text{ при } l \to \infty \tag{1}$$

і

$$\|x\|_{l_p} \le \sup_{k\ge1} \|x_k\|_{l_p}. \tag{2}$$

Доведення. Спочатку розглянемо випадок, коли $p = \infty$. Припустимо, що

$$n_k = (-1)^k [k/2],\ k \in \mathbb{N},$$

де $[k/2]$ – ціла частина числа $k/2$. Очевидно, що $\{n_k : k \in \mathbb{N}\} = \mathbb{Z}$. На підставі обмеженості множини $\{x_k \in l_\infty : k \in \mathbb{N}\}$ існують збіжні числові послідовності

$$x_{k_{1,1}}(n_1), x_{k_{1,2}}(n_1), \ldots, x_{k_{1,m}}(n_1), \ldots,$$

$$x_{k_{2,1}}(n_2), x_{k_{2,2}}(n_2), \ldots, x_{k_{2,m}}(n_2), \ldots,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{k_{m,1}}(n_m), x_{k_{m,2}}(n_m), \ldots, x_{k_{m,m}}(n_m), \ldots,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

для яких послідовності чисел $k_{l,p}$, $p \in \mathbb{N}$ є строго зростаючими для кожного $l \in \mathbb{N}$ і

$$\{k_{l,p} : p \in \mathbb{N}\} \supset \{k_{l+1,p} : p \in \mathbb{N}\} \qquad (3)$$

для $l \in \mathbb{N}$. Позначимо через a_m границю $\lim\limits_{p\to\infty} x_{k_{m,p}}(n_m)$, а через x – елемент простору l_∞, для якого $x(n_m) = a_m$ для всіх $m \in \mathbb{N}$. З (3) випливає, що $k_{q,q} \in \{k_{m,p} : p \in \mathbb{N}\}$ для $q \geq m$ і $m \in \mathbb{N}$. Тому послідовність

$$x_{k_{1,1}}(n), x_{k_{2,2}}(n), \dots, x_{k_{q,q}}(n), \dots$$

є збіжною для кожного $n \in \mathbb{N}$ і, отже,

$$x_{k_{q,q}} \overset{\text{лок.},l_\infty}{\longrightarrow} x \text{ при } q \to \infty.$$

Нерівність (2) випливає з того, що

$$x(n_m) = \lim_{p\to\infty} x_{k_{m,p}}(n_m)$$

і

$$|x(n_m)| \leq \sup_{p\geq 1} |x_{k_{m,p}}(n_m)|$$

для всіх $m \in \mathbb{N}$.

Тепер розглянемо випадок $p \in [1, \infty)$.

Зауважимо, що кожний елемент u простору l_p є елементом простору l_∞, причому

$$\|u\|_{l_\infty} \leq \|u\|_{l_p}$$

для кожного $p \in [1, +\infty)$. Тому $(x_k)_{k\geq 1}$ – обмежена в l_∞ послідовність і існують такі елемент $x \in l_\infty$ та підпослідовність $(x_{k_l})_{l\geq 1}$ послідовності $(x_k)_{k\geq 1}$, в якій $(k_l)_{l\geq 1}$ – строго зростаюча послідовність, що

$$x_{k_l} \overset{\text{лок.},l_\infty}{\longrightarrow} x \text{ при } l \to \infty. \qquad (4)$$

Покажемо, що $x \in l_p$ і справджується співвідношення (1).

Розглянемо довільну множину $M \in \mathfrak{S}$. із (4) та із скінченності множини M випливає, що

$$\lim_{l\to\infty} \|I_M(x_{k_l} - x)\|_{l_p} = 0$$

і

$$\|I_M x\|_{l_p} \leq \sup_{l\geq 1} \|I_M x_{k_l}\|_{l_p}.$$

Оскільки

$$\sup_{l\geq 1} \|I_M x_{k_l}\|_{l_p} \leq \sup_{k\geq 1} \|I_M x_k\|_{l_p} \leq \sup_{k\geq 1} \|x_k\|_{l_p},$$

то

$$\|I_M x\|_{l_p} \leq \sup_{k\geq 1} \|x_k\|_{l_p}.$$

Звідси та з довільності вибору множини M випливають співвідношення (1) і (2).

Лема доведена.

4. Доведення теореми 2.

Розглянемо множини $M_k = [-k, k] \cap \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. З умов теореми випливає, що для кожного $k \in \mathbb{N}$:

1) $I_{M_k} l_p$ – скінченновимірний підпростір простору l_p;
2) $I_{M_k}\mathcal{V}$ – обмежена замкнена опукла підмножина простору l_p;
3) оператор $\mathfrak{N}$ неперервний на $I_{M_k} l_p$;
4) $I_{M_k}\mathfrak{N} I_{M_k}\mathcal{V} \subset I_{M_k}\mathcal{V}$.

Тому за теоремою Боля—Брауера про нерухому точку [12] для кожного $k \in \mathbb{N}$ існує елемент $x_k \in I_{M_k}\mathcal{V}$ такий, що

$$I_{M_k}\mathfrak{N} x_k = x_k. \qquad (5)$$

На підставі третьої умови теореми послідовність $(x_k)_{k\geq 1}$ є обмеженою послідовністю. Тому, згідно з лемою, існують підпослідовність $(x_{k_m})_{m\geq 1}$ послідовності $(x_k)_{k\geq 1}$ і елемент $u \in l_p$, для яких

$$x_{k_m} \overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow} u \text{ при } m \to \infty. \qquad (6)$$

Звідси, з (5) та з c-неперервності оператора $\mathfrak{N}$ отримуємо, що

$$\mathfrak{N} u = u.$$

Зауважимо, що $u \in \mathcal{V}$. Справді, позначимо через $\tilde{x}_{k_m}$ такий елемент в $\mathcal{V}$, для якого

$$I_{M_k}\tilde{x}_{k_m} = x_{k_m}. \qquad (7)$$

Такий елемент існує завдяки четвертій та п'ятій умовам теореми. На підставі (6) і (7)

$$\tilde{x}_{k_m} \overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow} u \text{ при } m \to \infty.$$

Оскільки $\tilde{x}_{k_m} \in \mathcal{V}$ і $cl_{l_p}^{\text{лок}}\mathcal{V} = \mathcal{V}$, то $u \in \mathcal{V}$.

Теорема 2 доведена.

5. Зауваження та приклади.

Зауваження 1. *Зі способу доведення теореми 2 випливає, що ця теорема правильна й у випадку банахового простору $l_p(G,\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le\infty$, де G – довільна зліченна адитивна група і $n\in\mathbb{N}$.*

Зауваження 2. *Твердження теореми 2 стає хибним, якщо рівність $cl_{l_p}^{\text{лок}}\mathcal{V}=\mathcal{V}$ замінити рівністю $cl_{l_p}\mathcal{V}=\mathcal{V}$.*

Приклад 4. Розглянемо c-неперервний оператор $\mathfrak{N}:l_\infty\longrightarrow l_\infty$, визначений рівністю

$$(\mathfrak{N}x)(n)=\begin{cases}1-x^2(0), & \text{якщо}\, n=1,\\ x(n-1), & \text{якщо}\, n\ne 1,\end{cases}$$

де $x\in l_\infty$, і множину $\mathcal{V}$, що збігається із замиканням у просторі l_∞ розглянутої в прикладі 3 множини S. Очевидно, що $I_M\mathcal{V}\subset\mathcal{V}$ для всіх $M\in\mathfrak{S}$ і

$$0\le 1-y^2\le 1,$$

якщо $-1\le y\le 1$. Тому $\mathfrak{N}\mathcal{V}\subset\mathcal{V}$.

Неважко перевірити, що кожна нерухома точка z оператора $\mathfrak{N}$, для якої $\|z\|_{l_\infty}\le 1$, має вигляд

$$z_a=z_a(n)=\begin{cases}1-a^2, & \text{якщо}\, n\ge 1,\\ a, & \text{якщо}\, n\le 0,\end{cases}$$

де $a\in[-1,1]$. інших нерухомих точок w, для яких $\|w\|_{l_\infty}\le 1$, оператор $\mathfrak{N}$ не має.

Оскільки

$$\|z_a-s\|_{l_\infty}\ge\min_{-1\le t\le 1}\max\left\{|t|,1-t^2\right\}>0$$

для всіх $s\in\mathcal{V}$ і $a\in[-1,1]$, то $z_a\notin\mathcal{V}$ для всіх $a\in[-1,1]$.

Отже, при $p=+\infty$ твердження теореми 2 хибне, якщо рівність $cl_{l_p}^{\text{лок}}\mathcal{V}=\mathcal{V}$ замінити рівністю $cl_{l_p}\mathcal{V}=\mathcal{V}$.

Зауваження 3. *Твердження теореми 2 стає хибним, якщо c-неперервність оператора $\mathfrak{N}:l_p\longrightarrow l_p$ замінити неперервністю цього оператора.*

Приклад 5. Нехай $p\in[1,+\infty)$. Розглянемо функцію $\lambda:[0,+\infty)\longrightarrow[0,1]$ і оператор $\mathfrak{N}:l_p\longrightarrow l_p$, визначені за допомогою рівностей

$$\lambda(t)=\begin{cases}(1-t^p)^{1/p}, & \text{якщо}\, t\in[0,1),\\ 0, & \text{якщо}\, t\ge 1,\end{cases}$$

$$(\mathfrak{N}x)(n)=\begin{cases}x(n-1), & \text{якщо}\, n>1,\\ 0, & \text{якщо}\, n=1,\\ \lambda(\|x\|_{l_p}), & \text{якщо}\, n=0,\\ x(n+1), & \text{якщо}\, n<0,\end{cases}\tag{8}$$

де $x\in l_p$. Очевидно, що оператор $\mathfrak{N}$ неперервний на l_p. Однак цей оператор не є c-неперервним. Справді, якщо $x_k\overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow}0$ при $k\to\infty$ і $\|x_k\|_{l_p}=1$, $k\ge 1$, то $\mathfrak{N}x_k$ локально не прямує до $\mathfrak{N}0$ при $k\to\infty$, оскільки $(\mathfrak{N}0)(0)=1$ і $(\mathfrak{N}x_k)(0)=0$ для всіх $k\ge 1$.

Розглянемо множину

$$\mathcal{V}=\{x\in l_p:\|x\|_{l_p}\le 1\}.$$

Очевидно, що $cl_{l_p}^{\text{лок}}\mathcal{V}=\mathcal{V}$, $I_M\mathcal{V}\subset\mathcal{V}$ для всіх $M\in\mathfrak{S}$ і $\mathfrak{N}\mathcal{V}\subset\mathcal{V}$.

Оператор $\mathfrak{N}$ не має нерухомих точок у $\mathcal{V}$. Справді, якщо $\mathfrak{N}x=x$ для деякого $x\in\mathcal{V}$, то, згідно з (8), $\|x\|_{l_p}=1$. Тому $x(0)=x(1)=0$. А оскільки $x(n)=x(n-1)$ для всіх $n>1$ і $x(n)=x(n+1)$ для всіх $n<0$, то $x(n)=0$ для всіх $n\in\mathbb{Z}$, що суперечить тому, що $\|x\|_{l_p}=1$.

Таким чином, при $p\in[1,+\infty)$ твердження теореми 2 стає хибним, якщо c-неперервність оператора $\mathfrak{N}:l_p\longrightarrow l_p$ замінити неперервністю цього оператора.

Це твердження справджується і при $p=+\infty$.

Приклад 6. Розглянемо неперервний оператор $\mathcal{B}:l_\infty\longrightarrow l_\infty$, що визначається рівністю

$$(\mathcal{B}x)(n)=\begin{cases}x(n-1), & \text{якщо}\, n\ge 1,\\ 0, & \text{якщо}\, n=0,\\ x(n+1), & \text{якщо}\, n\le -1,\end{cases}$$

де $x\in l_\infty$, та множину

$$\mathcal{V}=\{x\in l_\infty:\|x\|_{l_\infty}\le 1\},$$

для якої, очевидно, $I_M\mathcal{V}\subset\mathcal{V}$ для всіх $M\in\mathfrak{S}$.

Визначимо оператор $\mathfrak{N}:l_\infty\longrightarrow l_\infty$ за допомогою рівності

$$(\mathfrak{N}x)(n)=1-\|x\|_{l_\infty}+|(\mathcal{B}x)(n)|,\ n\in\mathbb{Z},$$

де $x \in l_\infty$. Цей оператор, очевидно, є неперервним, але не c-неперервним оператором (з того, що $x_k \overset{\text{лок.},l_\infty}{\longrightarrow} 0$ при $k \to \infty$ і $\|x_k\|_{l_\infty} = 1$ для всіх $k \geq 1$, не випливає, що $\mathfrak{N}x_k \overset{\text{лок.},l_\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{N}0$ при $k \to \infty$). Очевидно також, що якщо $x \in \mathcal{V}$, то

$$\|\mathfrak{N}x\|_{l_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |1 - \|x\|_{l_\infty} + |(\mathcal{B}x)(n)|| =$$

$$= \sup_{n\in\mathbb{Z}}(1 - \|x\|_{l_\infty} + |(\mathcal{B}x)(n)|) =$$

$$= 1 - \|x\|_{l_\infty} + \|\mathcal{B}x\|_{l_\infty} = 1.$$

Тут використано те, що $\|Bx\|_{l_\infty} = \|x\|_{l_\infty}$ для всіх $x \in l_\infty$.

Таким чином, $\mathfrak{N}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.

Оператор $\mathfrak{N}$ не має нерухомих точок. Справді, якби елемент $x^* \in \mathcal{V}$ був нерухомою точкою оператора $\mathfrak{N}$, то тоді $\|x^*\|_{l_\infty} = 1$, оскільки $\|\mathfrak{N}x\|_{l_\infty} = 1$ для всіх $x \in \mathcal{V}$. З іншого боку, із рівності $\mathfrak{N}x^* = x^*$ випливало б, що $\mathcal{B}x^* = x^*$, тобто $x^*(n) \equiv 0$, а це суперечить тому, що $\|x^*\|_{l_\infty} = 1$.

Таким чином, і при $p = +\infty$ твердження теореми 2 стає хибним, якщо c-неперервність оператора $\mathfrak{N} : l_p \longrightarrow l_p$ замінити неперервністю цього оператора.

6. Малі на безмежності збурення оборотного c-неперервного оператора.

Наведемо застосування теореми 2.

Теорема 3. *Нехай*:

1) $1 \leq p \leq +\infty$;

2) *c-неперервний оператор $\mathcal{A} : l_p \longrightarrow l_p$ має обернений неперервний оператор $\mathcal{A}^{-1}$, для якого для деякого числа $k > 0$ справджується нерівність*

$$k\|\mathcal{A}^{-1}y\|_{l_p} \leq \|y\|_{l_p} \tag{9}$$

для всіх $y \in l_p$;

3) $\mathcal{B} : l_p \longrightarrow l_p$ – *c-неперервний оператор*;

4) $\lim\limits_{r\to+\infty} \left(kr - \sup\limits_{\|y\|_{l_p}\leq r} \|\mathcal{B}y\|_{l_p} \right) = +\infty.$

Тоді рівняння

$$\mathcal{A}x + \mathcal{B}x = h \tag{10}$$

має хоча б один розв'язок $x \in l_p$ для кожного $h \in l_p$.

Доведення. Спочатку покажемо, що оператор $\mathcal{A}^{-1}$ є c-неперервним оператором. Припустимо, що це твердження хибне. Тоді існують числа $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{Z}$ і обмежені послідовності

$$x, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m, \ldots\ , \tag{11}$$

$$h, h_1, h_2, h_3, \ldots, h_m, \ldots$$

елементів простору l_p, для яких

$$\mathcal{A}x = h, \tag{12}$$

$$\mathcal{A}x_m = h_m, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

$$h_m \overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow} h \text{ при } m \to \infty \tag{14}$$

і

$$\inf_{m\geq 1} |x_m(n_0) - x(n_0)| \geq \varepsilon. \tag{15}$$

Завдяки обмеженості послідовності (11) та згідно з лемою існують підпослідовність

$$x_{m_1}, x_{m_2}, \ldots, x_{m_l}, \ldots$$

цієї послідовності і елемент $u \in l_p$ такі, що $x_{m_l} \overset{\text{лок.},l_p}{\longrightarrow} u$ при $l \to \infty$. Тому

$$|u(n_0) - x(n_0)| \geq \varepsilon \tag{16}$$

завдяки (15) і

$$\mathcal{A}u = h \tag{17}$$

завдяки (12), (13), (14) і c-неперервності оператора $\mathcal{A}$.

Співвідношення (12), (16) і (17) суперечать неперервній оборотності оператора $\mathcal{A}$.

Отже, припущення про відсутність c-неперервності оператора $\mathcal{A}^{-1}$ є хибним.

Розглянемо оператор $\mathfrak{N} : l_p \longrightarrow l_p$, що визначається рівністю

$$\mathfrak{N}y = \mathcal{A}^{-1}(h - \mathcal{B}y),$$

де $y \in l_p$. Цей оператор є c-неперервним оператором, оскільки аналогічну властивість мають оператори $\mathcal{A}^{-1}$ і $\mathcal{B}$.

З другої та четвертої умов теореми випливає, що існує таке число $R > 0$, що для множини $\mathcal{V} = \{x \in l_p : \|x\|_{l_p} \leq R\}$ та оператора $\mathfrak{N}$ справджується включення $\mathfrak{N}\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$.

Очевидно, що $cl_{l_p}^{\text{лок}}\mathcal{V} = \mathcal{V}$ і $I_M\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ для всіх $M \in \mathfrak{S}$. Тому на підставі теореми 2 рівняння

$$\mathfrak{N}x = x$$

має хоча б один розв'язок $x \in \mathcal{V}$. Оскільки це рівняння рівносильне рівнянню (10), то множина розв'язків $x \in l_p$ останнього рівняння є непорожньою.

Теорема 3 доведена.

Далі розглянемо функцію $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, для якої

$$\overline{\lim_{|t|\to+0}} \left|\frac{f(t)}{t}\right| < +\infty,$$

і оператор $\mathcal{A} : l_p \longrightarrow l_p$, визначений рівністю

$$(\mathcal{A}x)(n) = x(n+1) - f(x(n)),\ n \in \mathbb{Z}, \quad (18)$$

де $x \in l_p$.

Наведемо для цього оператора умови виконання співвідношення (9).

У [14] показано, що для оператора $\mathcal{A}$ виконується співвідношення (9), якщо цей оператор є ліпшицевим, має обернений ліпшицевий оператор і $\mathcal{A}0 = 0$. Однак співвідношення (9) може виконуватися й у випадку неліпшицевого оператора $\mathcal{A}$.

Теорема 4. *Нехай $1 \le p \le +\infty$ і оператор $\mathcal{A} : l_p \longrightarrow l_p$ має обернений неперервний оператор $\mathcal{A}^{-1}$. Якщо*

$$|f(t)| \le q|t| \quad (19)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, де $q \in [0,1)$, то

$$\|\mathcal{A}^{-1}y\|_{l_p} \le (1-q)^{-1}\|y\|_{l_p} \quad (20)$$

для всіх $y \in l_p$. Якщо

$$|f(t)| \ge Q|t| \quad (21)$$

для всіх $t \in \mathbb{R}$, де $Q \in (1,+\infty)$, то

$$\|\mathcal{A}^{-1}y\|_{l_p} \le (Q-1)^{-1}\|y\|_{l_p} \quad (22)$$

для всіх $y \in l_p$.

Доведення. Розглянемо різницеве рівняння

$$x(n+1) = f(x(n)) + h(n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

де $h \in l_p$, і відповідний оператор $\mathcal{A} : l_p \to l_p$. Очевидно, що

$$(\mathcal{A}^{-1}h)(n+1) \equiv f\left((\mathcal{A}^{-1}h)(n)\right) + h(n) \quad (23)$$

для кожного $h \in l_p$.

Якщо виконується нерівність (19), то на підставі (23)

$$|(\mathcal{A}^{-1}h)(n+1)| \le q|(\mathcal{A}^{-1}h)(n)| + |h(n)|$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $h \in l_p$. Тому

$$\|\mathcal{A}^{-1}h\|_{l_p} \le q\|\mathcal{A}^{-1}h\|_{l_p} + \|h\|_{l_p}$$

для кожного $h \in l_p$, звідки випливає (20).

Якщо виконується нерівність (21), то на підставі (23)

$$|(\mathcal{A}^{-1}h)(n+1)| \ge Q|(\mathcal{A}^{-1}h)(n)| - |h(n)|$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}$ і $h \in l_p$. Тому

$$\|\mathcal{A}^{-1}h\|_{l_p} \ge Q\|\mathcal{A}^{-1}h\|_{l_p} - \|h\|_{l_p}$$

для кожного $h \in l_p$, звідки випливає (22).

Теорема 4 доведена.

Приклад 7. Розглянемо різницеве рівняння з максимумами

$$x(n+1) = f(x(n))+$$
$$+g(\max_{s\in M_1} x(n+s), \ldots, \max_{s\in M_m} x(n+s))+$$
$$+h(n),\ n \in \mathbb{Z}, \quad (24)$$

де $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ і $g : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ – неперервні функції, $M_i \in \mathfrak{S}$, $i = \overline{1,m}$, $m \in \mathbb{N}$ і $h \in l_\infty$.

Наведемо умови існування обмежених розв'язків цього рівняння.

Оскільки рівняння (24) є окремим випадком рівняння (10), то на підставі теорем 3 і 4 справджується

Теорема 5. *Нехай*:

1) *визначений за допомогою рівності* (18) *оператор $\mathcal{A} : l_\infty \longrightarrow l_\infty$ має обернений неперервний оператор*;

2) $|f(t)| \le q|t|$ *для деякого $q \in [0,1)$ та всіх $t \in \mathbb{R}$ і*

$$\lim_{r\to+\infty}\Bigg((1-q)r -$$

$$- \max_{|t_1|\le r,\ldots,|t_m|\le r} |g(t_1,\ldots,t_m)|\Bigg) = +\infty$$

або $|f(t)| \ge Q|t|$ *для деякого* $Q \in (1,+\infty)$ *та всіх* $t \in \mathbb{R}$ *і*

$$\lim_{r\to+\infty}\Bigg((Q-1)r -$$

$$- \max_{|t_1|\le r,\ldots,|t_m|\le r} |g(t_1,\ldots,t_m)|\Bigg) = +\infty.$$

Тоді рівняння (24) *для кожного* $h \in l_\infty$ *має принаймні один розв'язок* $x \in l_\infty$.

Зауважимо, що згідно з [15], перша умова теореми 5 виконується тоді і тільки тоді, коли для всіх $x, y \in \mathbb{R}$, $x \ne y$,

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|$$

і $R(f - I) = \mathbb{R}$ або

$$|f(x) - f(y)| > |x - y|$$

і $R(f-I) = R(h+I) = \mathbb{R}$. Тут $R(f-I)$ і $R(f+I)$ – множини значень відповідно функцій $y = f(x) - x$ і $y = f(x) + x$.

На завершення зауважимо, що аналогічні властивості c-неперервних операторів про нерухомі точки використовувалися в роботах [16]–[19] для дослідження нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, імпульсних систем, функціонально-диференціальних та дискретних рівнянь.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Мухамадиев Э.* Об обратимости функциональных операторов в пространстве ограниченных на оси функций // Мат. заметки.— 1972.— **11**, N3.— С. 269–274.

2. *Мухамадиев Э.* Исследования по теории периодических и ограниченных решений дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Душанбе. 1978.— 289 с.

3. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость почти периодических c-непрерывных функциональных операторов // Мат. сб.— 1981.— **116**(158), N4(12).— С. 483–501.

4. *Слюсарчук В.Е.* Интегральное представление c-непрерывных линейных операторов // Докл. АН УССР.— 1981.— сер.А, N8.— С. 34–37.

5. *Слюсарчук В.Е.* Обратимость неавтономных дифференциально-функциональных операторов // Мат. сб.— 1986.— **130**(172), N1(5).— С. 86–104.

6. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости неавтономных функционально-дифференциальных операторов // Мат. заметки.— 1987.— **42**, N2.— С. 262–267.

7. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия обратимости равномерно c-непрерывных функционально-дифференциальных операторов // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, N2.— С. 201–205.

8. *Курбатов В.Г.* Линейные дифференциально-разностные уравнения.— Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1990.— 168 с.

9. *Чан Хыу Бонг.* Почти периодические и ограниченные решения линейных функционально-дифференциальных уравнений: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.— Киев. 1993.— 255 с.

10. *Слюсарчук В.Е.* Метод c-непрерывных операторов в теории импульсных систем // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по теории и приложениям функционально-дифференциальных уравнений.— Душанбе. 1987.— С. 102–103.

11. *Слюсарчук В.Е.* Слабо нелинейные возмущения импульсных систем // Математическая физика и нелинейная механика.— 1991.— Вып. 15(49).— С. 32–35.

12. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Краткий курс функционального анализа.— М.: Высшая школа, 1982.— 272 с.

13. *Schauder J.* Die Fixpunktsatz in Funktionalräume // Studia Math.— 1930.— **2**.— P. 171–180.

14. *Слюсарчук В.Е.* Необходимые и достаточные условия липшицевой обратимости нелинейных разностных операторов в пространствах $l_p(\mathbb{Z},\mathbb{R})$, $1 \le p \le \infty$ // Мат. заметки.— 2000.— **68**, N3.— С. 448–454.

15. *Слюсарчук В.Ю.* Необхідні і достатні умови оборотності нелінійних різницевих відображень у просторі $l_\infty(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ // Мат. студії.— 2000.— **13**, N1. – С. 63–73.

16. *Слюсарчук В.Е.* Ограниченные решения нелинейных эллиптических уравнений // Успехи мат. наук.— 1980.— **35**, N1(211).— С. 215–216.

17. *Слюсарчук В.Е.* Ограниченные решения импульсных систем // Дифференц. уравнения.— 1983.— **19**, N4.— С.588–596.

18. *Слюсарчук В.Е.* Слабо нелинейные возмущения нормально разрешимых функционально-дифференциальных и дискретных уравнений // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, N5.— С.660–662.

19. *Слюсарчук В.Е.* $\mathcal{P}$-непрерывные операторы и их применение к решению задач математической физики // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 1997.— Вып. 15.— С. 188–226.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2002