УДК 512.54

©2002 р. В.С. Сікора

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ВЕРХНЯ ОЦІНКА ДІАМЕТРА ГРАФА КЕЛІ ВІНЦЕВОГО ДОБУТКУ ДВОХ ЗНАКОЗМІННИХ ГРУП

Оцінено зверху діаметр графа Келі для вінцевого добутку двох знакозмінних груп відносно побудованих раніше мінімальних систем твірних.

The upper bound of diameter of Cayley graph is obtained for wreath product of two alternating groups regarding to mininal systems of generators.

Нехай A_k — знакозмінна група, що діє на множині чисел $\{1, 2, ..., k\}$ $(k \geq 4)$. Розглядаємо групу $G_{n,m} = A_n \wr A_m$ — вінцевий добуток знакозмінних груп підстановок A_n і A_m $(n, m \geq 4)$.

Дослідження, проведені нами в [1], дають змогу твердити, що група $G_{n,m}$ є 2-породженою, тобто що її мінімальна (за кількістю елементів) система твірних містить тільки два елементи. Тому виникає запитання: скільки множників міститиме найкоротший розклад довільного елемента групи $A_n \wr A_m$ на добуток твірних та обернених до них із побудованих мінімальних систем твірних. Тобто якою є верхня оцінка діаметра графа Келі групи $G_{n,m}$ для довільних натуральних $n, m \geq 4$.

Розвиваючи методику, запропоновану у [2], у даній роботі обчислимо верхню оцінку діаметра графа Келі групи $G_{n,m} = A_n \wr A_m$ $(n, m \geq 4)$.

I. Основним результатом даної роботи є наступне твердження:

Теорема. *Для довільних натуральних $n, m \geq 4$ правильною є оцінка:*

$$D(A_n \wr A_m) \leq 20n^2m^2(n+m)^2. \qquad (1)$$

Нехай Σ — деяка незвідна система твірних знакозмінної групи A_k $(k \geq 4)$. Символом $l_\Sigma(g)$ позначимо довжину найкоротшого розкладу підстановки $g \in A_k$ на добуток твірних елементів із Σ і покладемо

$$L_\Sigma(k) = \max_{g \in A_k} l_\Sigma(g).$$

Лема. *1) Якщо*

$$\Sigma_1 = \{a_1 = (1, 2, 3), a_2 = (2, 3, 4), ..., a_{k-2} = (k-2, k-1, k)\}$$

— система твірних групи A_k для довільного $k \geq 3$, то

$$L_{\Sigma_1} \leq k. \qquad (2)$$

2) Якщо

$$\Sigma_2 = \{q_1 = (1, 2, ..., k), q_2 = (1, 2, 3)\}$$

— система твірних групи A_k для довільного непарного $k \geq 5$, то

$$L_{\Sigma_2} \leq 2k^2. \qquad (3)$$

3) Якщо

$$\Sigma_3 = \{r_1 = (1, 2, ..., k-1), r_2 = (2, 3, ..., k)\}$$

— система твірних групи A_k для довільного парного $k \geq 4$, то

$$L_{\Sigma_2} \leq 2k^3. \qquad (4)$$

Доведення. Той факт, що Σ_1, Σ_2, Σ_3 дійсно є системами твірних знакозмінної групи A_k при вказаних значеннях k випливає з леми 2, теорем 2 і 7 роботи [3].

1) Оцінка (2) перевіряється безпосередньо при $k = 3, 4, 5$ і доводиться методом математичної індукції для довільного $k \geq 3$.

2) Щоб довести оцінку (3), зауважимо, що довільний 3-цикл вигляду $(i, i+1, i+2)$ (де $1 \leq i \leq k-2$) можна виразити через елементи q_1, q_2 із Σ_2 за формулою

$$(i, i+1, i+2) = q_1^{i-1} \cdot q_2 \cdot q_1^{-i+1}.$$

Крім того, довільну підстановку $g \in A_k$ можна розкласти на добуток 3-циклів вказаного вигляду (які є елементами Σ_1). Тому $l_{\Sigma_2}((i, i+1, i+2)) = (i-1) + 1 + (i-1) = = 2i - 1$ та

$$\max_{1 \leq i \leq k-2} l_{\Sigma_2}((i, i+1, i+2)) = 2k - 5.$$

Враховуючи тепер, що $(i, i+1, i+2) = a_i \in \Sigma_1$ та оцінку (2), отримуємо:

$$L_{\Sigma_2}(k) \leq k(2k-5) \leq 2k^2,$$

що і доводить нерівність (3).

Оцінку (4) отримуємо аналогічно.

II. Довільний елемент σ групи $A_n \wr A_m$ можна подати у вигляді добутку "координатних" таблиць наступним чином:

$$\sigma = [f; g_1, g_2, ..., g_n] =$$
$$= [\varepsilon; g_1, \varepsilon, ..., \varepsilon] \cdot [\varepsilon; \varepsilon, g_2, \varepsilon, ..., \varepsilon] \cdot$$
$$\cdot ... \cdot [\varepsilon; \varepsilon, ..., \varepsilon, g_n] \cdot [f; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon], \qquad (5)$$

де $f \in A_n$; $q_i \in A_m$ $(i = 1, 2, ..., n)$; $n, m \geq 3$.

Домовимося надалі про наступні позначення.

$$\sigma_1 = [\varepsilon; g_1, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\sigma_2 = [\varepsilon; \varepsilon, g_2, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$.................$$
$$\sigma_n = [\varepsilon; \varepsilon, ..., \varepsilon, g_n],$$
$$\sigma_{n+1} = [f; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Нагадаємо [1], що в групі $G_{n,m}$ можна задати наступні чотирьохелементні системи твірних:

$$\alpha_1 = [(1, 2, ..., n); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\beta_1 = [(1, 2, 3); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\gamma_1 = [\varepsilon; (1, 2, ..., m), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\delta_1 = [\varepsilon; (1, 2, 3), \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

при непарних $n, m \geq 5$;

$$\alpha_2 = [(1, 2, ..., n-1); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\beta_2 = [(2, 3, ..., n); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\gamma_2 = [\varepsilon; (1, 2, ..., m-1), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\delta_2 = [\varepsilon; (2, 3, ..., m), \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

при парних $n, m \geq 4$;

$$\alpha_3 = [(1, 2, ..., n); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\beta_3 = [(1, 2, 3); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\gamma_3 = [\varepsilon; (1, 2, ..., m-1), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\delta_3 = [\varepsilon; (2, 3, ..., m), \varepsilon, ..., \varepsilon]$$

при непарному $n \geq 5$ і парному $m \geq 4$;

$$\alpha_4 = [(1, 2, ..., n-1); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\beta_4 = [(2, 3, ..., n); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\gamma_4 = [\varepsilon; (1, 2, ..., m), \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\delta_4 = [\varepsilon; (1, 2, 3), \varepsilon, ..., \varepsilon]$$

при парному $n \geq 4$ і непарному $m \geq 5$.

Нехай n, m — натуральні числа, $n, m \geq 4$. Позначимо:
$a = (1, 2, ..., n)$, $b = (1, 2, 3)$,
$c = (1, 2, ..., n-1)$, $d = (2, 3, ..., n) \in A_n$;
$x = (1, 2, ..., m)$, $y = (1, 2, 3)$,
$z = (1, 2, ..., m-1)$, $t = (2, 3, ..., m) \in A_m$;

У роботі [1] нами побудовано конкретні системи твірних групи $G_{n,m}$ $(n, m \geq 5)$, які складаються з двох підстановок. Залежно від вигляду чисел m, n, такими будуть:

$\Lambda_1 = \{\varphi_1, \psi_1\}$ для довільних непарних n, m, де m не ділиться націло на 3, де

$$\varphi_1 = [a; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon], \ \psi_1 = [b; \varepsilon, \varepsilon, y, x, \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon];$$

$\Lambda_2 = \{\varphi_2, \psi_2\}$ для довільних непарних n, m, що $m \equiv 0 (\bmod 3)$, де

$$\varphi_2 = [a; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon], \ \psi_2 = [b; \varepsilon, \varepsilon, x, y, \varepsilon, ..., \varepsilon];$$

$\Lambda_3 = \{\varphi_3, \psi_3\}$ для довільних парних n, m, де $m-1$ не ділиться націло на 3, де

$$\varphi_3 = [c; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],\ \psi_3 = [c \cdot d^{-1}; \varepsilon, z, t, \varepsilon, ..., \varepsilon];$$

$\Lambda_4 = \{\varphi_4, \psi_4\}$ для довільних парних n, m, де $m-1 \equiv 0(\bmod 3)$, де

$$\varphi_4 = [c; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$

$$\psi_4 = [c^{-1} \cdot d; \varepsilon, z, z \cdot t^{-1}, \varepsilon, ..., \varepsilon, z];$$

$\Lambda_5 = \{\varphi_5, \psi_5\}$ для непарного n та парного m такого, що $m-1$ не кратне 3, де

$$\varphi_5 = [a; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],\ \psi_5 = [b; \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon, z, t, \varepsilon, ..., \varepsilon];$$

$\Lambda_6 = \{\varphi_6, \psi_6\}$ для непарного n та парного m такого, що $m-1 \equiv 0(\bmod 3)$, де

$$\varphi_6 = [a; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],$$
$$\psi_6 = [b^{-1}; \varepsilon, z, z, z \cdot t^{-1}, \varepsilon, ..., \varepsilon];$$

$\Lambda_7 = \{\varphi_7, \psi_7\}$ для парного n та непарного m, де не ділиться націло на 3, де

$$\varphi_7 = [c; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],\ \psi_7 = [d; \varepsilon, \varepsilon, x, \varepsilon, ..., \varepsilon, y];$$

$\Lambda_8 = \{\varphi_8, \psi_8\}$ для парного n та непарного m, що $m \equiv 0(\bmod 3)$, де

$$\varphi_8 = [c; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon],\ \psi_8 = [c \cdot d^{-1}; x, y, \varepsilon, ..., \varepsilon].$$

Позначимо символом $L_{\Lambda_j}(n, m)$ максимальне значення довжини редукованого розкладу довільної підстановки з $G_{n,m}$ за елементами системи твірних Λ_j $(1 \leq j \leq 8)$, тобто

$$L_{\Lambda_j}(n, m) = \max_{\sigma \in G_{n,m}} l_{\Lambda_j}(\sigma).$$

Тоді діаметр графа Келі групи $G_{m,n}$ щодо мінімальної системи твірних дорівнює

$$D(G_{m,n}) = \max_{1 \leq j \leq 8} \left\{ L_{\Lambda_j}(n, m) \right\}.$$

III. Схема доведення теореми. Як зазначено вище, довільну підстановку $g \in A_k$ можна записати у вигляді нескоротного добутку твірних елементів із Σ_1, Σ_2 чи Σ_3, причому мають місце оцінки (2), (3) чи (4) відповідно. Тому кожна з підстановок f та q_i $(i = 1, 2, ..., n)$ виражаються через відповідні твірні елементи груп A_n та A_m. Отже, таблиці σ_j $(1 \leq j \leq n+1)$ будуть розкладатися на добуток твірних α_l, β_l, γ_l, δ_l $(1 \leq l \leq 4)$ групи $G_{n,m}$ залежно від величини чисел n і m. Нас цікавить довжина мінімального розкладу таблиці $\sigma \in G_{n,m}$ на добуток елементів однієї з систем $\Lambda_j (1 \leq j \leq 8)$.

Для доведення теореми потрібно розглянути вісім однотипних випадків. Ми розглянемо тільки один, оскільки всі інші отримуються аналогічно. Наприклад, наведемо процес обчислення оцінки для $L_{\Lambda_1}(n, m)$ при непарних $n, m \geq 5$, де $m \not\equiv 0(\bmod 3)$

При доведенні теореми про системи твірних групи $A_n \wr A_m$ в [1] було встановлено, що таблиці α_1, β_1, γ_1, δ_1 розкладаються на добутки підстановок φ_1, ψ_1 із Λ_1 та обернених до них. Причому довжини цих розкладів можна оцінити наступним чином:

$$l_{\Lambda_1}(\alpha_1) = 1,$$
$$l_{\Lambda_1}(\beta_1) \leq 13(m+n)(m+1),$$
$$l_{\Lambda_1}(\gamma_1) \leq m+n+1,$$
$$l_{\Lambda_1}(\delta_1) \leq 24(m+n)(m+1).$$

Розклад довільної підстановки $f \in A_n$ на добуток твірних $a = (1, 2, ..., n)$ і $b = (1, 2, 3)$ не перевищує, згідно з (3), $2n^2$. Тому розклад таблиці $\sigma_{n+1} = [f; \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon]$ на добуток підстановок α_1 і β_1 також не перевищуватиме $2n^2$. Крім того, враховуючи рівність

$$(i, i+1, i+2) = a^{i-1} \cdot b \cdot a^{-i+1},$$

отримуємо, що

$$[(i, i+1, i+2); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon] = \alpha_1^{i-1} \cdot \beta_1 \cdot \alpha_1^{-i+1},$$

звідки, провівши безпосередні обчислення, отримуємо, що

$$l_{\Lambda_1}([(i, i+1, i+2); \varepsilon, \varepsilon, ..., \varepsilon]) \leq 13(m+n)(m+1).$$

Отже, враховуючи формулу (2), отримуємо, що

$$l_{\Lambda_1}(\sigma_{n+1}) \leq 13n(m+n)(m+1).$$

Аналогічні обчислення проводимо для таблиць σ_1, σ_2,..., σ_n, які виражатимуться спочатку через γ_1, δ_1, котрі, у свою чергу, виражаються через твірні φ_1, ψ_1. Крім того, зауважимо, що

$$\sigma_{j+1} = \gamma_1^{-j} \cdot [\varepsilon; g_{j+1}, \varepsilon, ..., \varepsilon] \cdot \gamma_1^j,$$

$j = 1, 2, ..., n-1$, тобто досить обчислити оцінку для σ_1, а потім врахувати останню формулу. Отже, отримуємо, що

$$l_{\Lambda_1}(\sigma_1) \leq 25m(m+1)(m+n),$$

$$l_{\Lambda_1}(\sigma_{j+1}) \leq 25m(m+1)(m+n),$$

$j = 1, 2, ..., n-1$.

Тепер, враховуючи формулу (5) і отримані вище оцінки розкладів кожного із співмножників, маємо, що

$$L_{\Lambda_1}(n,m) = \max_{\sigma \in G_{n,m}} l_{\Lambda_1}(\sigma) \leq$$

$$\leq 13n(m+n)(m+1) + n \cdot 25m(m+1)(m+n) =$$

$$= n(m+1)(m+n)(25m+13).$$

Аналогічно обчислюємо інші оцінки:

$$L_{\Lambda_2}(n,m) \leq 3nm(m+n)(2m+3),$$

$$L_{\Lambda_3}(n,m) \leq 12n^2m(m+n),$$

$$L_{\Lambda_4}(n,m) \leq 8n(m+1)(m+n)^2,$$

$$L_{\Lambda_5}(n,m) \leq 20n^2m(n+m+1),$$

$$L_{\Lambda_6}(n,m) \leq 15(n+1)m^2(n+m),$$

$$L_{\Lambda_7}(n,m) \leq 14nm(m+2)^2,$$

$$L_{\Lambda_8}(n,m) \leq 3m^2n^2(m+n).$$

Отже, оцінка (1) є правильною. Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Заводя М.В., Сікора В.С.* Двохелементні системи твірних вінцевого добутку двох знакозмінних груп // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки.— 2002.— Вип. 2.— С.54—63.

2. *Сікора В.С.* Діаметр графа Келі вінцевого добутку двох симетричних груп для двохелементної системи твірних // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика.— Чернівці: ЧДУ, 2000.— Вип.76.— С.99-105.

3. *Пикар С.* О базисах симметрической группы // Кибернетический сборник, М.: Мир, 1965.— Вып.1.— С.7-34.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.2002