УДК 517.929; 517.93

©2002 р. В.О. Плотніков, О.Д. Кічмаренко

Одеський національний університет ім. І.І. Мечнікова, Одеса

УСЕРЕДНЕННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАКСИМУМОМ

Стаття містить обгрунтування методу усереднення для диференціальних рівнянь із запізненням.

The paper substantiates Theorems on grounding averaging method for differential equations with maximum.

Рух багатьох систем автоматичного керування описується системами диференціальних рівнянь з максимумом [1-3] вигляду:

$$\dot{x}(t) = \varepsilon f(t, x(t), \max_{s\in I(t)} x(s)), \tag{1}$$

де $x \in \mathbf{R^n}$ - фазовий вектор, $\varepsilon-$ малий параметр, $I(t) = [g(t), \gamma(t)]$, $g(t)$ і $\gamma(t)$ - відомі функції, причому $g(t) \le \gamma(t) \le t$, $t \ge 0$, $f : [0,\infty) \times \mathbf{R^n} \times \mathbf{R^n} \to \mathbf{R^n}$ - $n-$вимірна вектор-функція, і

$$\max_{s\in I(t)} x(s) = \left(\max_{s\in I(t)} x_1(s), ..., \max_{s\in I(t)} x_n(s) \right).$$

Очевидно, що при $g(t) = \gamma(t) = t - h$ із (1) отримуємо диференціальні рівняння з постійним запізненням, а при $g(t) = \gamma(t)$ - диференціальні рівняння зі змінним запізненням.

Застосування методу усереднення до рівнянь вигляду (1) при досить жорстких умовах на функції $g(t)$ і $\gamma(t)$ розглядалось у праці [4], а при $g(t) = \gamma(t)$ - в [5].

У даній роботі наводиться обгрунтування методу усереднення для диференціальних рівнянь вигляду (1) за умови рівномірної неперервності функцій $g(t)$ і $\gamma(t)$.

Поставимо у відповідність рівнянню (1) наступне усереднене рівняння:

$$\dot{y}(t) = \varepsilon f^0 \left(y(t), \max_{s\in I(t)} y(s) \right), \tag{2}$$

де

$$f^0(x, y) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T f(t, x, y) dt. \tag{3}$$

Теорема 1. *Нехай в області* $Q = \{t \ge 0, D \subset \mathbf{R^n}, \mathbf{D} \subset \mathbf{R^n}\}$ *виконані наступні умови:*

1) функція $f(t, x, y)$ *- неперервна за* t*, рівномірно обмежена сталою* M*, задовольняє умову Ліпшіца за* x, y *зі сталою* λ*;*

2) функції $g(t)$ *і* $\gamma(t)$ *- рівномірно неперервні і* $0 \le g(t) \le \gamma(t) \le t$*;*

3) рівномірно відносно x, y *існує границя (3);*

4) розв'язок рівняння (2) при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $t \ge 0$, $y(0) \in D' \subset D$ *разом із* $\rho-$*околом належить області* D.

Тоді для будь-яких $\eta > 0$, $L > 0$ *існує таке* $\varepsilon^0(\eta, L) \in (0, \varepsilon_1]$*, що справджується оцінка:*

$$\|x(t) - y(t)\| \le \eta, \tag{4}$$

де $x(t)$, $y(t)$ *- розв'язки систем (1) і (2) відповідно,* $x(0) = y(0) = x_0 \in D'$, $\|x\| = \max_i |\ x_i|$.

Доведення. Переходячи від (1) і (2) до відповідних інтегральних рівнянь, знаходимо

$$\|x(t) - y(t)\| \le$$

$$\le \varepsilon \int\limits_0^t \Bigg\| f(\tau, x(\tau), \max_{s\in I(\tau)} x(s)) -$$

$$- f(\tau, y(\tau), \max_{s\in I(\tau)} y(s)) \Bigg\| d\tau + \tag{7}$$

$$+\left\|\varepsilon\int\limits_0^t\Big[f(\tau,y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))-\right.$$

$$\left.-f^0(y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))\Big]\,d\tau\right\|.$$

Вводячи рівномірну метрику

$$\delta(t)=\max_{s\in[0,\tau]}\|x(s)-y(s)\|\,,$$

отримаємо

$$\varepsilon\int\limits_0^t\Big\|f(\tau,x(\tau),\max_{s\in I(\tau)}x(s))-$$

$$-f(\tau,y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))\Big\|\,d\tau\le$$

$$\le\varepsilon\lambda\int\limits_0^t\Big[\,\|x(\tau)-y(\tau)\|+\tag{8}$$

$$+\Big\|\max_{s\in I(\tau)}x(s)-\max_{s\in I(\tau)}y(s)\Big\|\Big]\,ds\le$$

$$\le 2\varepsilon\lambda\int\limits_0^t\delta(\tau)d\tau.$$

Розіб'ємо інтервал $[0,L\varepsilon^{-1}]$ на m рівних частин $[t_i,t_{i+1}]\,,\ \ i=0,1,...,m-1$. Припустимо, що $t\in[t_k,t_{k+1})$ для деякого k, тоді для другого доданка в (7) маємо

$$\left\|\varepsilon\int\limits_0^t\Big[f(\tau,y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))-\right.$$

$$\left.-f^0(y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))\Big]\,d\tau\right\|\le$$

$$\le\sum_{i=0}^{k-1}\varepsilon\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Big[f(\tau,y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))\ -\right.$$

$$\left.-\ f^0(y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))\Big]\,d\tau\right\|+\tag{9}$$

$$+\varepsilon\left\|\int\limits_{t_k}^{t}\Big[f(\tau,y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))-\right.$$

$$\left.-f^0(y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))\Big]\,d\tau\right\|.$$

Оцінимо окремо кожний доданок із (9).

$$\varepsilon\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Big[f(\tau,y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))-\right.$$

$$\left.-f^0(y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))\Big]\,d\tau\right\|\le$$

$$\le\varepsilon\left\|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Big[f(\tau,y(t_i),\max_{s\in I(t_i)}y(s))-\right.$$

$$\left.-f^0(y(t_i),\max_{s\in I(t_i)}y(s))\Big]\,d\tau\right\|+\tag{10}$$

$$+\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Big\|f(\tau,y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))-$$

$$-f(\tau,y(t_i),\max_{s\in I(t_i)}y(s))\Big\|\,d\tau+$$

$$+\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Big\|f^0(y(t_i),\max_{s\in I(t_i)}y(s))-$$

$$-f^0(y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))\Big\|\,d\tau.$$

Із (10), (2) та умов 1) і 2) теореми маємо

$$\varepsilon\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Big\|f(\tau,y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))-$$

$$-f(\tau,y(t_i),\max_{s\in I(t_i)}y(s))\Big\|\,d\tau\le$$

$$\le\varepsilon\lambda\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}[\|y(\tau)-y(t_i)\|+$$

$$+\Big\|\max_{s\in I(\tau)}y(s)-\max_{s\in I(t_i)}y(s)\Big\|\Big]\,d\tau\le\tag{11}$$

$$\le\varepsilon\lambda\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\Big[\varepsilon\int\limits_{t_i}^{\tau}\Big\|f^0(y(r),\max_{s\in I(r)}y(s))\Big\|\,dr+$$

$$+\varepsilon M \max\{\omega(\gamma,\Delta),\omega(g,\Delta)\}\Big] d\tau \le$$

$$\le \varepsilon^2 \lambda M \Delta \left(\frac{\Delta}{2} + \max\{\omega(\gamma,\Delta),\omega(g,\Delta)\}\right),$$

де $\omega(\alpha,\Delta)$ - модуль неперервності функції $\alpha(t)$ на проміжку $[0,\infty)$, причому $\omega(\alpha,\Delta) = \sup_{|t''-t'|\le\Delta} \mid \alpha(t'') - \alpha(t')|$, $\Delta = t_{i+1} - t_i = \frac{L}{\varepsilon m}$.

Використовуючи властивості модуля неперервності [5], отримаємо

$$\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big\| f(\tau, y(\tau), \max_{s\in I(\tau)} y(s)) -$$

$$-f(\tau, y(t_i), \max_{s\in I(t_i)} y(s)) \Big\| d\tau \le$$

$$\le \varepsilon\lambda M L \left(\frac{L}{2\varepsilon m} + \right.$$

$$\left. \max\left\{\omega\left(\gamma, \frac{L}{\varepsilon m}\right), \omega\left(g, \frac{L}{\varepsilon m}\right)\right\}\right) \le \qquad (12)$$

$$\le \frac{\lambda M L}{m}\left(\frac{L}{2} + \max\left\{\omega(\gamma, L), \omega(g, L)\right\}\right)$$

$$+\varepsilon\lambda M L \max\left\{\omega(\gamma, L), \omega(g, L)\right\}.$$

Аналогічно отримуємо оцінку

$$\sum_{i=0}^{k-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big\| f^0(y(\tau), \max_{s\in I(\tau)} y(s)) -$$

$$-f^0(y(t_i), \max_{s\in I(t_i)} y(s)) \Big\| d\tau \le \qquad (13)$$

$$\le \lambda M L \left(\frac{L}{2m} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{m} + \varepsilon\right) \max\left\{\omega(\gamma, L), \omega(g, L)\right\}\right).$$

На підставі умови 3) теореми, існує спадна функція $\theta(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$, така, що

$$\Big\| \varepsilon \int_0^{t_i} \Big[f(\tau, y(t_i), \max_{sI(t_i)} y(s)) -$$

$$-f^0(y(t_i), \max_{s\in I(t_i)} y(s)) \Big] d\tau \Big\| \le$$

$$\le \varepsilon t_i \theta(t_i) \le \tau_i \theta(\frac{\tau_i}{\varepsilon}).$$

Отже, для будь-якого η_1 існує $\varepsilon_0(\eta_1) > 0$ таке, що для довільного $\varepsilon \le \varepsilon_0(\eta_1)$ справедлива нерівність

$$\varepsilon \Big\| \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Big[f(\tau, y(t_i), \max_{s\in I(t_i)} y(s)) -$$

$$-f^0(y(t_i), \max_{s\in I(t_i)} y(s)) \Big] d\tau \Big\| \le$$

$$\le \varepsilon \Big\| \int_0^{t_{i+1}} f(\tau, y(t_i), \max_{s\in I(t_i)} y(s)) - \qquad (14)$$

$$-f^0(y(t_i), \max_{s\in I(t_i)} y(s)) d\tau \Big\| +$$

$$+\varepsilon \Big\| \int_0^{t_i} f(\tau, y(t_i), \max_{s\in I(t_i)} y(s)) -$$

$$-f^0(y(t_i), \max_{s\in I(t_i)} y(s)) d\tau \Big\| \le 2\eta_1.$$

Для останньої нерівності в (9) маємо

$$\varepsilon \Big\| \int_{t_k}^{t} \Big[f(\tau, y(\tau), \max_{s\in I(\tau)} y(s)) -$$

$$-f^0(y(\tau), \max_{s\in I(\tau)} y(s)) \Big] d\tau \Big\| \le \qquad (15)$$

$$\le \frac{2ML}{m}.$$

Із (11)-(15) для другого доданка в (7) маємо

$$\Big\| \varepsilon \int_0^{t} \Big[f(\tau, y(\tau), \max_{s\in I(\tau)} y(s)) -$$

$$-f^0(y(\tau), \max_{s\in I(\tau)} y(s)) \Big] d\tau \Big\| \le$$

$$\le \frac{2ML}{m}\left(\lambda \frac{L}{2} + \right. \qquad (16)$$

$$+\lambda \max\left\{\omega(\gamma, L), \omega(g, L)\right\} + 1) +$$

$$+2\varepsilon\lambda ML\max\left\{\omega\left(\gamma,L\right),\omega\left(g,L\right)\right\}+$$
$$+2m\eta_1(\varepsilon)=\nu(m,\varepsilon)$$

Таким чином, для $t\in[0,\tau]$ маємо

$$\|x(t)-y(t)\|\le 2\varepsilon\lambda\int\limits_0^t\delta(s)ds+$$

$$+\nu(m,\varepsilon)\le 2\varepsilon\lambda\int\limits_0^\tau\delta(s)ds+\nu(m,\varepsilon). \quad (17)$$

Оскільки нерівність (17) виконується для всіх $t\in[0,\tau]$, то

$$\delta(\tau)=\max_{0\le s\le\tau}\|x(s)-y(s)\|\le$$

$$\le 2\varepsilon\lambda\int\limits_0^\tau\delta(s)ds+\nu(m,\varepsilon). \quad (18)$$

На підставі леми Гронуола-Белмана з (18) маємо

$$\delta(t)\le\nu(m,\varepsilon)e^{2\varepsilon\lambda t}\le\nu(m,\varepsilon)e^{2\lambda L}<\eta$$

Зазначимо, що відповідним вибором достатньо великого m і достатньо малого ε величина $\nu(m,\varepsilon)$ може бути зроблена як завгодно малою. Таким чином, отримуємо твердження теореми.

Розглянемо тепер схему східчастого усереднення [7] системи (1).

Рівнянню (1) поставимо у відповідність наступне частково усереднене рівняння:

$$\dot y=\varepsilon F\left(t,y(t),\max_{s\in I(t)}y(s)\right), \quad (19)$$

де

$$F(t,y,z)=\left\{F^i(y,z)=\frac{1}{T}\int\limits_{iT}^{(i+1)T}f(t,y,z)dt,\right.$$

$$t\in[i\,T,(i+1)T),\ i=0,1,...\}, \quad (20)$$

T - деяка стала.

Теорема 2. *Нехай виконані умови 1), 2) теореми 1, а також:*

3) розв'язок рівняння (19), (20) при $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$, $t\ge 0$ і $y(0)\in D'\subset D$ разом із $\rho-$околом належить області D.

Тоді для будь-якого $L>0$ існують такі $C>0$ і $\varepsilon^0(L)\in(0,\varepsilon_1]$, що справджується оцінка

$$\|x(t)-y(t)\|\le C\ \varepsilon, \quad (21)$$

де $x(t)$, $y(t)$ - розв'язки систем (1) і (2) відповідно, $x(0)=y(0)=x_0\in D'$, $\|x\|=\max_i|\ x_i|$.

Доведення. Аналогічно доведенню теореми 1 розіб'ємо проміжок $[0,L\varepsilon^{-1}]$ на часткові, з постійним, не залежним від ε кроком $\Delta=t_{i+1}-t_i=T$.

Із (11) маємо

$$\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|f(\tau,y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))-\right.$$

$$\left.-f^0(y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))\right\|d\tau\le \quad (22)$$

$$\le\varepsilon\lambda M\left(\frac{\Delta}{2}+\max\{\omega(\gamma,\Delta),\omega(g,\Delta)\}\right),$$

Аналогічно маємо

$$\sum_{i=0}^{k-1}\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left\|f^0(y(\tau),\max_{s\in I(\tau)}y(s))-\right.$$

$$\left.-f^0(y(t_i),\max_{s\in I(t_i)}y(s))\right\|d\tau\le \quad (23)$$

$$\le\lambda ML\left(\frac{L}{2m}+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{m}+\varepsilon\right)\max\left\{\omega\left(\gamma,L\right),\omega\left(g,L\right)\right\}\right).$$

Враховуючи (20), маємо

$$\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}}\left[f(\tau,y(t_i),\max_{s\in I(t_i)}y(s))-\right.$$

$$\left.-f^0(y(t_i),\max_{s\in I(t_i)}y(s))\right]d\tau=0,$$

$$\varepsilon \left\| \int\limits_{t_k}^{t} \left[f(\tau, y(\tau), \max_{s\in I(\tau)} y(s)) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -f^0(y(\tau), \max_{s\in I(\tau)} y(s)) \right] d\tau \right\| \leq \qquad (24)$$

$$\leq \varepsilon 2MT.$$

Із (23), (24) отримуємо твердження теореми.

Зауваження 1. Теорема природним чином поширюється на випадок вимірних за t функцій $f(t, x, y)$.

Зауваження 2. Якщо в теоремах 1 і 2 розв'язок $y(t)$ існує на проміжку $[0, L_0\varepsilon^{-1}]$, то в твердженнях теорем величина L вибирається із $(0, L_0]$.

Зауваження 3. Якщо функція $f(t, y, z) - \omega-$періодична за t, то вибираючи $T = \omega$, отримуємо схему повного усереднення, оскільки $F^i(y, z) = F^0(y, z),\ i = 0, 1, \ldots$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Магомедов А.Р.* Некоторые задачи дифференциальных уравнений с "максимумом" // Изв. АН Азерб. ССР. Сер. физ., техн. и матем. наук.— 1977. — **108**, N 1.— С.104—108.

2. *Попов Е.П.* Автоматическое регулирование и управление.— М.: Наука, 1966.— 388 с.

3. *Bainov D.D., Voulov H.D.* Differntial Equation with Maximum // Stability of Solutions.— Sofia, 1992.— 100 p.

4. *Milusheva S., Bainov D.D.* Justification of the averaging method for multipoint boundary value problems for a class of functional differential equations with maximums // Collect. Math.— 1986.— **37**.— P.297—304.

5. *Філіпчук М.П.* Усереднення деяких крайових задач для систем диференціальних рівнянь із запізненням // Нелінійні коливання.— 1998.— N 2.— С.152—156.

6. *Сендов Б., Попов В.* Усредненные модули гладкости.— М.:Мир, 1988.— 328 с.

7. *Плотников В.А.* Метод усреднения в задачах управления.— Киев-Одесса: Лыбидь, 1992.— 188 с.

Стаття надійшла до редколегії 11.06.2002