УДК 517.9

©2002 р. Р.І. Петришин, Л.М. Лакуста

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

АСИМПТОТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВНОЇ СИСТЕМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Встановлено асимптотичні наближення розв'язків коливних систем в залежності від властивостей повільно змінних частот та характеру збурень.

The asymptotic approximations of the solutions of oscillation systems are established depending on properties of slow frequencies and character of perturbations.

Розглядається задача Коші

$$\frac{d^2x}{dt^2} + A(\tau)x = \varepsilon f\Big(x, \frac{dx}{dt}, \tau\Big),$$

$$x(0) = x^0, \quad \frac{dx(0)}{dt} = \dot{x}^0, \qquad (1)$$

де $x \in R^n$, $(0, \varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, L — додатне число, $\tau = \varepsilon t$ — "повільний" час, $A : [0, L] \to R^{n,n}$, $A \in C^k_{[0,L]}$, $k \geq 2$, f — многочлен відносно x і $\dfrac{dx}{dt}$ з неперервно диференційовними за τ коефіцієнтами. Позначимо через $x(t, \varepsilon)$ розв'язок задачі Коші (1).

В [1] при $A(\tau) = A = \text{const}$ здійснено різноплановий аналіз задачі (1) і викладено алгоритми побудови рівнянь першого наближення та дослідження їх квазістатичних положень рівноваги. У монографії [2, с.244] у випадку змінної матриці $A(\tau)$ встановлено оцінку похибки методу усереднення для задачі (1) на асимптотично великому проміжку часу. У даній статті оцінка уточнюється в залежності від степеня многочлена f.

Припустимо, що всі власні значення $\lambda_\nu(\tau)$, $\nu = \overline{1, n}$, матриці $A(\tau)$ дійсні й

$$\lambda_\nu(\tau) > 0, \quad \lambda_\nu(\tau) \neq \lambda_\mu(\tau), \quad \nu \neq \mu,$$

$$\nu = \overline{1, n}, \quad \mu = \overline{1, n}, \quad \tau \in [0, L]. \qquad (2)$$

Відомо [3], що в цьому випадку існує така невироджена матриця $B = (b_{\nu,\mu})^n_{\nu,\mu=1} : [0, L] \to R^{n,n}$, $B \in C^k_{[0,L]}$, $B^{-1} \in C^k_{[0,L]}$, що

$$B^{-1}(\tau)A(\tau)B(\tau) =$$

$$= \text{diag}\,(\lambda_1(\tau), ..., \lambda_n(\tau)) \equiv J(\tau).$$

Тоді в змінних $y = B^{-1}(\tau)x$, $y = (y_1, ..., y_n)$, задача (1) набуде вигляду

$$\frac{d^2y_\nu}{dt^2} + \omega^2_\nu(\tau)y_\nu = \varepsilon g_\nu\Big(y, \frac{dy}{dt}, \tau, \varepsilon\Big),$$

$$y_\nu(0) = y^0_\nu, \quad \frac{dy_\nu(0)}{dt} = \dot{y}^0_\nu, \quad \nu = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

де

$$\omega_\nu = \sqrt{\lambda_\nu}, \quad y^0 = B^{-1}(0)x^0,$$

$$\dot{y}^0 = B^{-1}(0)\dot{x}^0 + \varepsilon(B^{-1}(0))'x^0,$$

$$B'(\tau) = \frac{d}{d\tau}B(\tau), \quad B''(\tau) = \frac{d^2}{d\tau^2}B(\tau),$$

$$g\Big(y, \frac{dy}{dt}, \tau, \varepsilon\Big) = B^{-1}(\tau)f(B(\tau)y, \varepsilon B'(\tau)y +$$

$$+ B(\tau)\frac{dy}{dt}, \tau) - \varepsilon B^{-1}(\tau)B''(\tau)y -$$

$$-2B^{-1}(\tau)B'(\tau)\frac{dy}{dt}, \quad g = (g_1, ..., g_n).$$

Перетворимо (3) до амплітудно-фазових змінних $r = (r_1, ..., r_n)$, $\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$ за формулами [1]:

$$y_\nu = r_\nu \sin\varphi_\nu, \quad \frac{dy_\nu}{dt} = r_\nu\omega_\nu(\tau)\cos\varphi_\nu,$$

$$r_\nu(0) = r^0_\nu(\varepsilon) = \sqrt{(y^0_\nu)^2 + (\omega^{-1}_\nu(0)\dot{y}^0_\nu)^2},$$

$$\varphi_\nu(0) = \varphi^0_\nu(\varepsilon),$$

$$\text{tg}\,\varphi^0_\nu(\varepsilon) = \frac{y^0_\nu}{\dot{y}^0_\nu\omega_\nu(0)}, \quad \nu = \overline{1, n},$$

внаслідок чого дістанемо

$$\frac{dr_\nu}{d\tau} = -r_\nu \cos^2\varphi_\nu \frac{d}{d\tau}\ln\omega_\nu(\tau) +$$

$$+\frac{1}{\omega_\nu(\tau)} g_\nu(r\sin\varphi, r\omega(\tau)\cos\varphi, \tau, \varepsilon)\cos\varphi_\nu,$$

$$\frac{d\varphi_\nu}{d\tau} = \frac{\omega_\nu(\tau)}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\sin 2\varphi_\nu \frac{d}{d\tau}\ln\omega_\nu(\tau) -$$

$$-\frac{1}{\omega_\nu(\tau)r_\nu} g_\nu(r\sin\varphi, r\omega(\tau)\cos\varphi, \tau, \varepsilon)\sin\varphi_\nu,$$

$$r_\nu(0) = r_\nu^0(\varepsilon), \varphi_\nu(0) = \varphi_\nu^0(\varepsilon), \nu = \overline{1,n}. \quad (4)$$

Тут

$$r\sin\varphi = (r_1\sin\varphi_1, ..., r_n\sin\varphi_\nu),$$

$$r\omega\cos\varphi = (r_1\omega_1\cos\varphi_1, ..., r_n\omega_n\cos\varphi_n).$$

I. Нехай $f\Big(x, \dfrac{dx}{d\tau}, \tau\Big) \equiv \underset{\sim}{f}(\tau)$ — многочлен нульового степеня. В цьому випадку усереднення за всіма фазовими змінними $\varphi_\nu, \nu = \overline{1,n}$, задача нульового наближення набуде вигляду

$$\frac{d\bar{r}_\nu}{d\tau} = -\Big(\frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\ln\omega_\nu(\tau) + \frac{h_{\nu\nu}(\tau)}{\omega_\nu(\tau)}\Big)\bar{r}_\nu,$$

$$\bar{r}_\nu(0) = r_\nu^0(0), \quad (5.1)$$

$$\frac{d\varphi_\nu}{d\tau} = \frac{\omega_\nu(\tau)}{\varepsilon}, \quad \bar{\varphi}_\nu(0) = \varphi_\nu^0(0), \quad (5.2)$$

де

$$(h_{\nu\mu}(\tau))_{\nu,\mu=1}^n = B^{-1}(\tau)B'(\tau),$$

і вона має розв'язок

$$\bar{r}_\nu(\tau) = \frac{\bar{r}_\nu^0 \exp\Big\{-\int\limits_0^\tau \frac{h_{\nu\nu}(\xi)}{\sqrt{\lambda_\nu(\xi)}}d\xi\Big\}}{\sqrt[4]{\lambda_\nu(\tau)}},$$

$$\bar{r}_\nu^0 = r_\nu^0(0)\sqrt[4]{\lambda_\nu(0)}, \quad (6.1)$$

$$\bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon) = \bar{\varphi}_\nu^0 + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \sqrt{\lambda_\nu(\xi)}d\xi,$$

$$\bar{\varphi}_\nu^0 = \varphi_\nu^0(0). \quad (6.2)$$

Праві частини рівнянь (4) є тригонометричними многочленами за φ степеня 2, тому їх комплексна форма ряду Фур'є містить лише гармоніки $e^{i(k,\varphi)}$, i — уявна одиниця, (k,φ) — скалярний добуток, з двовимірними векторами k, $\|k\| \le 2$, вигляду $(\pm 2, 0)$, $(\pm 1, \pm 1)$, $(0, \pm 2)$. Але для таких векторів, згідно з (2),

$$k_1\omega_\nu(\tau) + k_2\omega_\mu(\tau) \ne 0, \quad \tau \in [0, L],$$

$$\nu \ne \mu, \quad \nu = \overline{1,n}, \quad \mu = \overline{1,n}.$$

Отже, резонанси в системі (5) відсутні і, як показано в [2],

$$|r_\nu(\tau,\varepsilon) - \bar{r}_\nu(\tau)| + |\varphi_\nu(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon)| \le c_1\varepsilon,$$

$$\tau \in [0, L], \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0],$$

де $0 < \varepsilon_0$ — досить мале, а $r_1(\tau,\varepsilon), ..., r_n(\tau,\varepsilon)$, $\varphi_1(\tau,\varepsilon)$, ..., $\varphi_n(\tau,\varepsilon)$ — розв'язок задачі Коші (4). Таким чином, справедлива

Теорема 1. *Якщо* $f\Big(x, \dfrac{dx}{dt}, \tau\Big) \equiv \underset{\sim}{f}(\tau)$, $A \in C^2_{[0,L]}$, $\bar{r}_\nu^0 > 0$, $\nu = \overline{1,n}$, *і виконується умова (2), то існують такі сталі* $c_2 > 0$ *і* $\tilde{\varepsilon}_0 > 0$, *що для всіх* $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \le \tilde{\varepsilon}_0$, *справджуються нерівності*

$$|x_\nu(t,\varepsilon) - \sum_{s=1}^n b_{\nu s}(\tau)\bar{r}_s(\tau)\sin\bar{\varphi}_s(\tau,\varepsilon)| \le c_2\varepsilon,$$

$$\Bigg|\frac{dx_\nu(t,\varepsilon)}{dt} - \sum_{s=1}^n b_{\nu s}(\tau)\bar{r}_s(\tau)\sqrt{\lambda_s(\tau)}\times$$

$$\times\cos\bar{\varphi}_s(\tau,\varepsilon)\Bigg| \le c_2\varepsilon, \quad \nu = \overline{1,n}, \quad (7)$$

в яких $\bar{r}_\nu(\tau)$ *і* $\bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon)$ *визначені рівностями (6.1) і (6.2).*

Зауваження 1. Згідно зі зробленими в теоремі 1 припущеннями, праві частини рівнянь нульового наближення для (4) неперервно диференційовні за τ, що дало змогу використати той факт, що у випадку відсутності резонансів осциляційні інтеграли оцінюються величиною вигляду $c\varepsilon$ [2]. Якби відмовитись від неперервної диференційовності $\underset{\sim}{f}$ на $[0, L]$ і вважати, що вона задовольняє умову Гельдера за τ на $[0, L]$ з показником $\alpha \le 1$, то на підставі [4] у нерівностях (7) замість $c_2\varepsilon$ потрібно було б вважати $c_2\varepsilon^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$.

II. Нехай $f\left(x, \frac{dx}{dt}, \tau\right) \equiv \tilde{f}(x,\tau)$, тобто f не залежить від $\frac{dx}{dt}$. У цьому випадку усереднена за φ задача Коші нульового наближення для амплітуд збігається з (5.1) і тому $\bar{r}_\nu = \bar{r}_\nu(\tau)$ визначається формулою (6.1), а для фаз дістанемо

$$\frac{d\bar{\varphi}_\nu}{d\tau} = \frac{\omega_\nu(\tau)}{\varepsilon} + \Phi_\nu(\bar{r}_1^2, ..., \bar{r}_n^2, \tau), \quad \bar{\varphi}_\nu(0) = \bar{\varphi}_\nu^0.$$

Звідси

$$\bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon) = \bar{\varphi}_\nu^0 + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau (\sqrt{\lambda_\nu(\xi)} +$$

$$+\varepsilon\Phi_\nu(\bar{r}_1^2(\xi), ..., \bar{r}_n^2(\xi), \xi))d\xi. \qquad (8)$$

Постає питання: які умови потрібно накладати на частоти і яка кількісна залежність похибки методу усереднення від малого параметра?

1) Якщо $\tilde{f}(x,\tau)$ — лінійна відносно x, тобто $\tilde{f}(x,\tau) = C(\tau)x + d(\tau)$, то в правих частинах рівнянь (4) присутні тригонометричні многочлени другого степеня і досить накласти умову (2) для виконання оцінки вигляду

$$|r_\nu(\tau,\varepsilon) - \bar{r}_\nu(\tau)| + |\varphi_\nu(\tau,\varepsilon) - \bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon)| \le c\varepsilon.$$

Тут $\bar{r}_\nu(\tau)$ виражається формулою (6.1), а $\bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon)$ знаходимо з (8):

$$\bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon) = \bar{\varphi}_\nu^0 +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \left(\sqrt{\lambda_\nu(\xi)} - \varepsilon\frac{d_{\nu\nu}(\xi)}{2\sqrt{\lambda_\nu(\xi)}}\right)d\xi, \qquad (8.1)$$

де

$$B^{-1}(\tau)C(\tau)B(\tau) = (d_{\nu\mu}(\tau))_{\nu,\mu=1}^n.$$

Нехай далі в (1) $A(\tau)$ вже зведена до нормальної жорданової форми, тобто $A(\tau) = J(\tau)$, $B(\tau) = E$ — одинична матриця. Тоді можна частково послабити умову (2) на $\lambda_\nu(\tau)$, завдяки якій резонанси в цьому випадку відсутні. Зокрема, можна припустити, що $\lambda_\nu(\tau) = \lambda_\mu(\tau)$ при деяких $\tau \in [0, L]$ і $\nu \ne \mu$. У зв'язку з цим досить накласти обмеження, що $A \in C_{[0,L]}^{l-1}$ і

$$\det(W_{\nu_1\nu_2}^*(\tau)W_{\nu_1\nu_2}(\tau)) > 0, \quad \tau \in [0, L],$$

$$\nu_1 \ne \nu_2, \quad \nu_1 = \overline{1,n}, \quad \nu_2 = \overline{1,n}, \qquad (9)$$

де

$$W_{\nu_1\nu_2}(\tau) = \begin{pmatrix} \omega_{\nu_1}(\tau) & \omega_{\nu_2}(\tau) \\ \frac{d}{d\tau}\omega_{\nu_1}(\tau) & \frac{d}{d\tau}\omega_{\nu_2}(\tau) \\ ... & ... \\ \frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}\omega_{\nu_1}(\tau) & \frac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}\omega_{\nu_2}(\tau) \end{pmatrix},$$

$l \ge 2$, $W_{\nu_1\nu_2}^*(\tau)$ — транспонована матриця. Як випливає з [2],

$$|r_\nu(\tau,\varepsilon) - \bar{r}_\nu(\tau)| + |\varphi_\nu(\tau,\varepsilon) -$$

$$-\bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon)| \le c\varepsilon^{\frac{1}{l}}. \qquad (10)$$

Отже, можна сформулювати наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай $f(x, \frac{dx}{dt}, \tau) \equiv C(\tau)x + d(\tau)$, $\bar{r}_\nu^0 > 0$, $\nu = 1, n$. Тоді:*

а) якщо $A \in C_{[0,L]}^2$ і справджується умова (2), то при досить малому $\varepsilon_0 > 0$ для всіх $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ виконуються нерівності (7), в яких $\bar{r}_\nu(\tau)$ і $\bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon)$ визначаються відповідно співвідношеннями (6.1) і (8.1);

б) якщо $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in C_{[0,L]}^{l-1}$, $\lambda_\nu(\tau) > 0$ і виконуються умови (9) при деякому мінімальному $l \ge 2$, то

$$|x_\nu(t,\varepsilon) - \bar{r}_\nu(\tau)\sin\bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon)| +$$

$$+\left|\frac{dx_\nu(t,\varepsilon)}{dt} - \bar{r}_\nu(\tau)\sqrt{\lambda_\nu(\tau)}\cos\bar{\varphi}_\nu(\tau,\varepsilon)\right| \le$$

$$\le c_3\varepsilon^{\frac{1}{l}}$$

при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ і $t \in [0, L\varepsilon^{-1}]$, c_3 — стала.

2) Нехай $\tilde{f}(x,\tau)$ — многочлен відносно $x_1, ..., x_n$ степеня m, $2 \le m \le n-2$. У цьому випадку праві частини рівнянь системи (4) — многочлени степеня $m+1$, причому $3 \le m+1 \le n-1$, тому умову резонансу визначають одночасно не всі частоти $\omega_1, ..., \omega_n$,

а лише не більше ніж $m+1$ з них. Тоді, припустивши, що [2]

$$\det\left(W^*_{\nu_1\ldots\nu_{m+1}}(\tau)\,W_{\nu_1\ldots\nu_{m+1}}(\tau)\right)>0$$

$$\forall\,\tau\in[0,L],\ \nu_j=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m+1},$$
$$\nu_j\neq\nu_i\quad i\neq j, \tag{11}$$

де

$$W_{\nu_1\ldots\nu_{m+1}}(\tau)=$$
$$=\begin{pmatrix}\omega_{\nu_1}(\tau) & \ldots & \omega_{\nu_{m+1}}(\tau)\\ \dfrac{d}{d\tau}\omega_{\nu_1}(\tau) & \ldots & \dfrac{d}{d\tau}\omega_{\nu_{m+1}}(\tau)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}\omega_{\nu_1}(\tau) & \ldots & \dfrac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}\omega_{\nu_{m+1}}(\tau)\end{pmatrix},$$

$W^*_{\nu_1\ldots\nu_{m+1}}(\tau)$ — транспонована матриця, $l\geq m+1$, також дістанемо оцінку (10).

Якщо ж степінь m многочлена $\tilde f(x,\tau)$ задовольняє нерівність $m\geq n-1$, то у правих частинах рівнянь системи (4) будуть тригонометричні многочлени степеня $m+1\geq n$ і для обгрунтування методу усереднення в цьому випадку досить враховувати умову [2]:

$$\det\left(V^*(\tau)V(\tau)\right)>0\ \forall\,\tau\in[0,L], \tag{12}$$

з деяким $l\geq n$, де

$$V(\tau)=\begin{pmatrix}\omega_1(\tau) & \ldots & \omega_n(\tau)\\ \dfrac{d}{d\tau}\omega_1(\tau) & \ldots & \dfrac{d}{d\tau}\omega_n(\tau)\\ \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}\omega_1(\tau) & \ldots & \dfrac{d^{l-1}}{d\tau^{l-1}}\omega_n(\tau)\end{pmatrix}.$$

Тоді нерівність (10) виконується для $l\geq n$ [2].

Теорема 3. *Нехай $\tilde f(x,\tau)$ — многочлен відносно x степеня $m\geq 2$, $A\in C^{l-1}_{[0,L]}$, виконується умова (2) і $\bar r^0_\nu>0$, $\nu=\overline{1,n}$. Якщо:*

а) $m\leq n-2$ і справджується нерівність (11), то можна вибрати такі сталі c_4 і $\bar\varepsilon_0>0$, що при $\varepsilon_0\leq\bar\varepsilon_0$ для всіх $t\in[0,L\varepsilon^{-1}]$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ і $\nu=\overline{1,n}$ правильна оцінка

$$\left|x_\nu(t,\varepsilon)-\sum_{s=1}^n b_{\nu s}(\tau)\bar r_s(\tau)\sin\bar\varphi_s(\tau,\varepsilon)\right|+$$
$$+\left|\frac{dx_\nu(t,\varepsilon)}{dt}-\sum_{s=1}^n b_{\nu s}(\tau)\bar r_s(\tau)\sqrt{\lambda_s(\tau)}\times\right.$$
$$\left.\times\cos\bar\varphi_s(\tau,\varepsilon)\right|\leq c_4\varepsilon^{\frac1l} \tag{13}$$

із деяким $l\geq m+1$, в якій $\bar r_\nu(\tau)$ і $\bar\varphi_\nu(\tau,\varepsilon)$ визначається співвідношеннями (6.1) і (8);

б) $m\geq n-1$ і справедлива нерівність (12), то виконується оцінка (13) з $l\geq n$.

Зауваження 2. У зазначених вище частинних випадках для $1\leq m\leq n-2$ замість нерівностей (9) і (11) можна було би накласти обмеження (12), яке виражається через всі частоти $\omega_1,\ldots,\omega_n$ системи (4). На підставі формули Біне-Коші і теореми Лапласа [5] можна довести, що коли виконується нерівність (12) з деяким мінімальним $l=l_0\geq n$, то виконуються також нерівності (9) чи (11) з деякими $l=l_1\leq l_0$ чи $l=l_2\leq l_0$, тобто виконання (9) чи (11) може покращити оцінку похибки методу усереднення.

Приклад. Нехай $n=3$, $\omega_1(\tau)=\tau^3+10$, $\omega_2(\tau)=\tau^3+\tau+0,9$, $\omega_3(\tau)=\tau+1$, $\tau\in[0,\frac12]$. Всі мінори другого порядку матриці

$$\begin{pmatrix}\omega_1(\tau) & \omega_2(\tau) & \omega_3(\tau)\\ \dfrac{d}{d\tau}\omega_1(\tau) & \dfrac{d}{d\tau}\omega_2(\tau) & \dfrac{d}{d\tau}\omega_3(\tau)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}\tau^3+10 & \tau^3+\tau+0,9 & \tau+1\\ 3\tau^2 & 3\tau^2+1 & 1\end{pmatrix}$$

відмінні від нуля при $\tau\in[0,\frac12]$, тому при $m=1$ правильна точна [2] відносно порядку за ε оцінка вигляду

$$|r_\nu(\tau,\varepsilon)-\bar r_\nu(\tau)|+$$
$$+|\varphi_\nu(\tau,\varepsilon)-\bar\varphi_\nu(\tau,\varepsilon)|\leq c\varepsilon^{\frac12}. \tag{14}$$

Для цього набору частот нерівність (12) справджується при мінімальному $l=4$, тому її використання веде до оцінки (13) з $l=4$, яка є гіршою порівняно з (14).

III. Нехай $f\left(x,\dfrac{dx}{dt},\tau\right)$ — довільний многочлен степеня $m\geq 1$. Аналіз задачі Коші (4) показує [1], що усереднена задача нульового наближення набуває вигляду

$$\frac{d\bar r_\nu}{d\tau}=a_\nu(\bar r_1^2,\ldots,\bar r_n^2,\tau)\bar r_\nu,\ \ \bar r_\nu(0)=\bar r^0_\nu,$$

$$\frac{d\bar{\varphi}_\nu}{d\tau} = \frac{\omega_\nu \tau}{\varepsilon} + b_\nu(\bar{r}_1^2, ..., \bar{r}_n^2, \tau), \ \bar{\varphi}_\nu(0) = \bar{\varphi}_\nu^0, \qquad (15)$$

де a_ν, b_ν — многочлени відносно $\bar{r}_1^2, ..., \bar{r}_n^2$. Якщо позначити $\bar{\rho}_\nu = \bar{r}_\nu^2$, то із (15) дістанемо задачу

$$\frac{d\bar{\rho}_\nu}{d\tau} = 2a_\nu(\bar{\rho}_1, ..., \bar{\rho}_n, \tau)\bar{\rho}_\nu, \ \bar{\rho}_\nu(0) = (\bar{r}_\nu^0)^2, \qquad (16.1)$$

$$\frac{d\bar{\varphi}_\nu}{d\tau} = \frac{\omega_\nu \tau}{\varepsilon} + b_\nu(\bar{\rho}_1, ..., \bar{\rho}_n, \tau), \ \bar{\varphi}_\nu(0) = \bar{\varphi}_\nu^0. \qquad (16.2)$$

Припустимо, що розв'язок $\bar{\rho}(\tau) = (\bar{\rho}_1(\tau), ..., \bar{\rho}_n(\tau))$ задачі (16.1) задовольняє умову

$$\bar{\rho}_\nu(\tau) > 0 \ \forall \tau \in [0, L], \ \nu = \overline{1, n}.$$

Тоді шляхом інтегрування визначаємо розв'язок $\bar{\varphi}(\tau, \varepsilon) = (\bar{\varphi}_1(\tau, \varepsilon), ..., \bar{\varphi}_n(\tau, \varepsilon))$ задачі (16.2) і одержуємо оцінку вигляду

$$\left| x_\nu(t, \varepsilon) - \sum_{s=1}^{n} b_{\nu s}(\tau) \sqrt{\bar{\rho}_s(\tau)} \sin \bar{\varphi}_s(\tau, \varepsilon) \right| +$$

$$+ \left| \frac{dx_\nu(t, \varepsilon)}{dt} - \sum_{s=1}^{n} b_{\nu s}(\tau) \sqrt{\bar{\rho}_s(\tau) \lambda_s(\tau)} \times \right.$$

$$\left. \times \cos \bar{\varphi}_s(\tau, \varepsilon) \right| < c_5 \varepsilon^{\frac{1}{l}},$$

де число l залежить від степеня m многочлена f і визначається умовами (11) чи (12).

Зауваження 3. Якщо $f\left(x, \dfrac{dx}{dt}, \tau\right) \equiv \tilde{f}\left(\dfrac{dx}{dt}, \tau\right)$, то в цьому випадку [1] $b_\nu(\bar{\rho}_1, ..., \bar{\rho}_n, \tau) \equiv 0$. Тому

$$\bar{\varphi}_\nu(\tau, \varepsilon) = \bar{\varphi}_\nu^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \sqrt{\lambda_\nu(\xi)} d\xi, \ \nu = \overline{1, n},$$

тобто в нульовому наближенні усереднені фази не залежать від амплітуд.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Исследование колебательных систем второго порядка.— К., 1976.— 50 с.— (Препр./ АН УССР. Ин-т математики; 76.6).
2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340 с.
3. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями.— К.: Вища школа, 2000.— 294 с.
4. *Петришин Р.І., Сопронюк Т.М.* Оцінки похибки методу усереднення для багаточастотних коливних систем // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика — Чернівці: Рута, 2002.— С.92—96.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц.— М.: Наука, 1978.— 280 с.