УДК 519.21

©2002 р. Г.М. Перун

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ПРО ОЦІНКУ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКУ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ

Доведено теорему про оцінку в середньому квадратичному розв'язку задачі Коші для лінійної стохастичної інтегро-диференціальної системи параболічного типу з неперервними випадковими збуреннями.

The theorem on estimation in the mean square of the solution of the Cauchy problem for linear stochastic integral-differential system of parabolic type with continuous syochastic perturbations is proved.

В імовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з потоком σ-алгебр $\{\mathcal{F}_t, t \geq t_0\}$, розглядається випадкова функція $u(t,x,\omega) = (u_1, u_2, ..., u_N)$, $t \geq t_0$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\omega \in \Omega$, яка є розв'язком лінійної стохастичної інтегро-диференціальної системи рівнянь параболічного типу

$$d_t u(t,x,\omega) = \Bigg[A(D_x)u(t,x,\omega) + \tilde{A}(D_x)\int_{t_0}^{t} u(\tau,x,\omega)d\tau\Bigg]dt + \Bigg[B(D_x)u(t,x,\omega) + \tilde{B}(D_x)\int_{t_0}^{t} u(\tau,x,\omega)d\tau\Bigg]dw(t,\omega) \qquad (1)$$

із детермінованими початковими умовами

$$u(t,x,\omega)|_{t=t_0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (2)$$

Тут $A(D_x), \tilde{A}(D_x), B(D_x), \tilde{B}(D_x)$ — диференціальні многочлени вигляду

$$A(D_x) \equiv \sum_{|k|\leq 2b} A_k D_x^k, \quad \tilde{A}(D_x) \equiv \sum_{|k|\leq p_1} \tilde{A}_k D_x^k,$$

$$B(D_x) \equiv \sum_{|k|\leq p_2} B_k D_x^k, \quad \tilde{B}(D_x) \equiv \sum_{|k|\leq p_3} \tilde{B}_k D_x^k,$$

$$D_x^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}...\partial x_n^{k_n}},$$

$$|k| = k_1 + k_2 + ... + k_n.$$

Під розв'язком задачі (1), (2) будемо розуміти випадкову функцію $\{u(t,x,\omega)\} \subset R^N$, яка узгоджена з потоком σ-алгебр $\{F_t, t \geq t_0\}$ і задовольняє з імовірністю 1 для будь-яких $t \geq t_0$ систему рівнянь [5], [6]

$$u(t,x,\omega) = \varphi(x) + \int_{t_0}^{t}\Bigg[A(D_x)u(s,x,\omega) + \tilde{A}(D_x)\int_{t_0}^{t} u(\tau,x,\omega)d\tau\Bigg]ds + \int_{t_0}^{t}\Bigg[B(D_x)u(s,x,\omega) + \tilde{B}(D_x)\int_{t_0}^{t} u(\tau,x,\omega)d\tau\Bigg]dw(s,\omega),$$

де $w(t,\omega)$, $t \geq t_0$, $\omega \in \Omega$ — скалярний вінерівський процес.

Означення 1. *Нульовий розв'язок $u(t,x,\omega) \equiv 0$ системи (1) називається стійким за Ляпуновим у середньому квадратичному, якщо для довільного $\mu > 0$*

існує таке $\delta > 0$, що з умови $\|\varphi(x)\|_2^2 < \delta$ випливає нерівність $M\{\|u(t,x,\omega)\|^2\} < \mu$, де M — операція математичного сподівання, $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^n)$.

Вектор-функція $u(t,x,\omega)$ вимірна при майже всіх ω за t і x відносно σ-алгебри борелевих множин на $[t_0,T]\times\mathbb{R}^n$ і має скінченну норму

$$\|u(t,x,\omega)\|^2 \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} M\{|u(t,z,\omega)|^2\}dz, \qquad (3)$$

де $|u| = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2 + ... + |u_N|^2}$.

Теорема. *Нехай:*

1) при певних умовах на коефіцієнти задачі (1), (2) існує розв'язок $\{u(t,x,\omega)\} \subset R^N$ з точністю до стохастичної еквівалентності [5], вимірний за сукупністю змінних;

2) виконується умова параболічності системи (1), тобто рівняння

$$\det\left\{\sum_{|k|=2b} A_k(i\sigma)^k - \lambda E\right\} = 0$$

має корені, які задовольняють нерівність $\operatorname{Re}\lambda_j(\sigma) \le -\delta|\sigma|^{2b}$, δ — стала параболічності, $\sigma \in \mathbb{R}^n$ — дійснозначний вектор [1];

3) степені многочленів $\tilde{A}(\sigma)$, $\tilde{B}(\sigma)$ не перевищують b, тобто $p_1 \le b$, $p_3 \le b$, а норма матриці $B(\sigma)$ задовольняє нерівність

$$\|B(\sigma)\|^2 \le \delta_1|\sigma|^{2b} + C_1, \quad C_1 > 0, 0 < \delta_1 < \delta.$$

Тоді для норми розв'язку вихідної задачі виконується нерівність

$$M|u|^2 \le e^{C_0 t}\|\varphi\|_2^2,$$

де

$$\|\varphi\|_2^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi|^2 dx.$$

Доведення. Застосуємо до задачі (1), (2) перетворення Фур'є [5]. Дістанемо відповідну задачу в образах Фур'є

$$dv(t,\sigma,\omega) = \Bigg[A(\sigma)v(t,\sigma,\omega) + \tilde{A}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau,\sigma,\omega)d\tau\Bigg]dt + \Bigg[B(\sigma)v(t,\sigma,\omega) + \tilde{B}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{t} v(\tau,\sigma,\omega)d\tau\Bigg]dw(t,\omega), \quad t \ge t_0, \quad (4)$$

$$v(t,\sigma,\omega)|_{t=t_0} = \tilde{\varphi}(\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{R}^n. \qquad (5)$$

Стохастична інтегро-диференціальна система (4) еквівалентна інтегральній системі рівнянь Іто [2]

$$v(t,\sigma,\omega) = \tilde{\varphi}(\sigma) + \int\limits_{t_0}^{t}\Bigg[A(\sigma)v(\tau,\sigma,\omega) + \tilde{A}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s,\sigma,\omega)ds\Bigg]d\tau + \int\limits_{t_0}^{t}\Bigg[B(\sigma)v(\tau,\sigma,\omega) + \tilde{B}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s,\sigma,\omega)ds\Bigg]dw(\tau,\omega). \qquad (6)$$

Припустимо, що з імовірністю 1 існує розв'язок $v(t,\sigma,\omega)$ системи (6), який є $\mathcal{F}_t$-узгодженим на $[t_0,T]\times\mathbb{R}^n$ із значеннями в $\mathbb{R}^N$ для фіксованих $(t,\sigma) \in [t_0,T]\times\mathbb{R}^N$ [6].

За допомогою матриці Коші

$$H(t) = e^{A(\sigma)t},$$

$$\left(e^{At} = E + \frac{A}{1!}t + ... + \frac{A^m}{m!}t^m + ...\right)$$

запишемо розв'язок задачі (4), (5) у вигляді [2]

$$v(t,\sigma,\omega) = e^{A(\sigma)t}\tilde{\varphi}(\sigma) + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(\sigma)(t-\tau)}\cdot\tilde{A}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s,\sigma,\omega)ds d\tau + \int\limits_{t_0}^{t} e^{A(\sigma)(t-\tau)}\Bigg[B(\sigma)v(\tau,\sigma,\omega) + \tilde{B}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s,\sigma,\omega)ds\Bigg]dw(\tau,\omega).$$

Розглянемо квадрат від модуля і використаємо нерівність

$$|a+b+c|^2 \le 3(|a|^2+|b|^2+|c|^2)$$

для останньої рівності. Одержимо

$$\frac{1}{3}|v(t,\sigma,\omega)|^2 \le |e^{At}\tilde{\varphi}(\sigma)|^2+$$

$$+\left|\int\limits_{t_0}^{t} e^{A(\sigma)(t-\tau)}\cdot\tilde{A}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s,\sigma,\omega)dsd\tau\right|^2+$$

$$+\left|\int\limits_{t_0}^{t} e^{A(\sigma)(t-\tau)}\left[B(\sigma)v(t,\sigma,\omega)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\tilde{B}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s,\sigma,\omega)ds\right]dw(\tau,\omega)\right|^2. \quad (7)$$

Подіємо на (7) математичним сподіванням, враховуючи його дію на квадрат інтеграла Вінера-Іто [3]. Дістанемо

$$\frac{1}{3}M\left\{|v(t,\sigma,\omega)|^2\right\} \le \|e^{At}\|^2\cdot|\tilde{\varphi}(\sigma)|^2+$$

$$+\left\{\left|\int\limits_{t_0}^{t_1} M\left|e^{A(\sigma)(t-\tau)}\cdot\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\tilde{A}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s,\sigma,\omega)ds\right|^2 d\tau\right|^2\right\}+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1} M|e^{A(\sigma)(t-\tau)}B(\sigma)v(\tau,\sigma,\omega)|^2d\tau+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t} M\left|e^{A(\sigma)(t-\tau)}\cdot\tilde{B}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s,\sigma,\omega)ds\right|^2 d\tau \equiv$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{4} I_i. \quad (8)$$

Оцінимо доданки формули (8). За умови параболічності 1) для нормальної матриці випливає оцінка [1]

$$\|e^{At}\| \le C_0 e^{-\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)t}. \quad (9)$$

Тому для I_1 оцінка очевидна. У другому і четвертому інтегралах I_2, I_4 поміняємо порядок інтегрування на основі формули Діріхле:

$$\int\limits_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}\cdot\tilde{A}(\sigma)\int\limits_{t_0}^{\tau} v(s,\sigma,\omega)dsd\tau =$$

$$=\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{s}^{t} e^{A(t-\tau)}\cdot\tilde{A}(\sigma)d\tau\right)v(s,\sigma,\omega)ds. \quad (10)$$

Використовуючи нерівність (9), знаходимо, що

$$|I_2(t,\sigma,\omega)|^2 \le \int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{s}^{t}\|e^{A(t-\tau)}\|^2\cdot\|\tilde{A}(\sigma)\|^2d\tau\right)\times$$

$$\times M|v^2(s,\sigma,\omega)|^2ds \le$$

$$\le C_0\int\limits_{t_0}^{t}\left(\int\limits_{s}^{t} e^{-2\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)(t-\tau)}d\tau\right)\times$$

$$\times\|\tilde{A}(\sigma)\|^2M|v|^2ds \le$$

$$\le \frac{C_0\|\tilde{A}(\sigma)\|^2}{2\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)}\int\limits_{t_0}^{t} M|v|^2ds. \quad (11)$$

Аналогічно оцінюється інтеграл I_4:

$$|I_4| \le \frac{C_0\|\tilde{A}(\sigma)\|^2}{2\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)}\int\limits_{t_0}^{t} M|v|^2ds. \quad (12)$$

Підсумовуючи нерівність для I_1, I_2, I_4 та I_3, дістаємо співвідношення

$$M|v|^2 \le \mathcal{F}_V(t,\sigma)+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t}\|B(\sigma)\|^2\|e^{A(t-\tau)}\|^2M|v(\sigma,\tau,\omega)|^2d\tau, \quad (13)$$

де позначимо

$$\mathcal{F}_V(t,\sigma) \equiv C_0e^{-2\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)t}\|\tilde{\varphi}\|_2^2+$$

$$+P(\sigma)\int\limits_{t_0}^{t} M|v|^2ds, \quad (14)$$

$$P(\sigma) \equiv C_0 2^{-1}(\|\tilde{A}(\sigma)\|^2 +$$
$$+\|\tilde{B}(\sigma)\|^2)(\delta_1(|\sigma|^{2b}+1))^{-1}.$$

Згідно з лемою [4, С. 74], для розв'язку інтегральної нерівності (13) справджується оцінка

$$M|v(t,\sigma,\omega)|^2 \le \mathcal{F}_V(t,\sigma) +$$
$$+\int_{t_0}^{t} R(t,\tau,\sigma)\mathcal{F}_V(t,\sigma)d\tau. \tag{15}$$

Резольвента $R(t,\tau,\sigma)$, побудована за неперервним ядром

$$K(t,\tau,\sigma) = \|B(\sigma)\|^2\|e^{A(\sigma)(t-\tau)}\|^2 \le$$
$$\le c_1\|B(\sigma)\|^2 e^{-2\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)(t-\tau)}, \tag{16}$$

допускає нерівність

$$R(t,\tau,\sigma) \le C_1 e^{-2\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)(t-\tau)}\times$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}(\|B(\sigma)\|^2)^n\frac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!} =$$
$$= C_1 e^{(-2\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)+\|B(\sigma)\|^2)(t-\tau)}\|B(\sigma)\|^2. \tag{17}$$

Враховуючи вигляд неоднорідності інтегральної нерівності (13), змінивши порядок інтегрування та використовуючи оцінку (17) для резольвенти, одержимо, що

$$M|v(t,\sigma,\omega)|^2 \le \|\tilde{\varphi}(\sigma)\|_2^2 +$$
$$+\Bigg[C_0\|\tilde{A}(\sigma)\|^2 + \|\tilde{B}(\sigma)\|^2 P(\sigma) + \|\tilde{\varphi}\|_2^2 +$$
$$+\frac{P(\sigma)}{2\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)-\|B(\sigma)\|^2}\Bigg]\times$$
$$\times\int_{t_0}^{t} M|v(\tau,\sigma,\omega)|^2 d\tau. \tag{18}$$

Остання нерівність є нерівністю вигляду

$$M|v(\tau,\sigma,\omega)|^2 \le K + L\int_{t_0}^{t} M|v(\tau,\sigma,\omega)|^2 d\tau,$$

K, L — сталі. За лемою Гронуола [1]

$$M|v(\tau,\sigma,\omega)|^2 \le Ke^{Lt},$$

тобто

$$M|v(t,\sigma,\omega)|^2 \le$$
$$\le \|\tilde{\varphi}(\sigma)\|_2^2 \exp\Bigg\{\Bigg(C_0 P(\sigma) + \|\tilde{\varphi}(\sigma)\|_2^2 +$$
$$+\frac{P(\sigma)}{2\delta_1(|\sigma|^{2b}+1)-\|B(\sigma)\|^2}\Bigg)\cdot t\Bigg\}. \tag{19}$$

Тут

$$K = \|\tilde{\varphi}(\sigma)\|^2, L = C_0 P(\sigma) + \|\tilde{\varphi}(\sigma)\|_2^2 +$$
$$+\frac{P(\sigma)}{2(\delta_1|\sigma|^{2b}+1)-\|B(\sigma)\|^2}.$$

З останньої нерівності отримуємо обмеження на порядки многочленів для степенів σ. З урахуванням формули Парсеваля

$$\int_{\mathbb{R}^n}|v(\tau,\sigma,\omega)|^2 d\tau = (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_{\mathbb{R}^n}|u(t,x,\omega)|^2 dx$$

одержуємо твердження теореми.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 444 с.

2. *Царьков Е.Ф., Ясинский В.К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 321 с.

3. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— К.: Наук. думка, 1968.— 354 с.

4. *Перун Г.М.* Про експоненціальну стійкість розв'язку стохастичної мішаної задачі для рівняння коливань // Нелінійні крайові задачі математичної фізики та їхз застосування: Зб. наук. пр. Ч.2.— К.: Ін-т математики НАН України, 1996.— С.72—76.

5. *Гихман И.И.* Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными // Качественные методы исследования нелинейных дифференциальных уравнений и нелинейных колебаний: Сб. науч. тр.— К.: Ин-т математики АН УССР, 1981.— С.25—59.

6. *Mizel V.I., Trutzer V.* Stochastic Hereditary Equations: Existence and Asymptotic Stability // J. Integral Equations.— 1984.— Vol.7.— P.1—72.

Стаття надійшла до редколегії 19.09.2002