УДК 517.926

©2002 р. Д.О. Мігуца

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ ГІРОСТАТА ВІДНОСНО НЕГОЛОВНИХ ОСЕЙ ІНЕРЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ ЗМІННИХ КОЛОСОВА

Досліджується рух гіростата, як прототип твердого тіла, в потенціальному полі сил відносно неголовних осей інерції з використанням змінних Колосова.

The motion of gyrostat is investigated, as solid prototype, in the potential field of the forces relative to nonprincipal axes of inertia with using of Kolosov variables.

Динаміка твердого тіла представляє собою не тільки виключно важливу галузь класичної динаміки, але й служить фундаментом прикладної теорії гіроскопів. Наука про динаміку твердого тіла швидко розвивалась і розвивається як у прикладному, так і в теоретичному напрямках. Розробка і вдосконалення гіроскопічних навігаційних приладів для корабельної техніки і космічних літальних апаратів стимулювали прогрес аналітичної динаміки твердого тіла і якісних методів даної теорії.

Розглянемо рух гіростата, як прототип твердого тіла, в потенціальному полі сил. Для визначення положення гіростата у просторі введемо дві системи координат, одна з яких $OXYZ$ є нерухомою, а інша $Oxyz$ незмінно зв'язана з гіростатом, причому її осі не направлені по головних осях інерції тіла. У цьому випадку положення гіростата в кожний момент часу будемо задавати трьома кутами Ейлера: φ — кут власного обертання, ψ — кут прецесії, θ — кут нутації.

Рух гіростата в заданому силовому полі описується динамічними рівняннями, які представляють собою узагальнення динамічних рівнянь Ейлера [1,2,4]:

$$A\dot{p} - F\dot{q} - E\dot{r} + \dot{\Gamma}_1 + (C-B)qr +$$
$$+D(r^2-q^2) - Epq + Fpr + q\Gamma_3 - r\Gamma_2 =$$
$$= \gamma_3\frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - \gamma_2\frac{\partial U}{\partial \gamma_3},$$
$$-F\dot{p} + B\dot{q} - D\dot{r} + \dot{\Gamma}_2 + (A-C)pr +$$
$$+E(p^2-r^2) - Fqr + Dpq + r\Gamma_1 - p\Gamma_3 =$$
$$= \gamma_1\frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3\frac{\partial U}{\partial \gamma_1},$$
$$-E\dot{p} - D\dot{q} + C\dot{r} + \dot{\Gamma}_3 + (B-A)pq +$$
$$+F(q^2-p^2) - Dpr + Eqr + p\Gamma_2 - q\Gamma_1 =$$
$$= \gamma_2\frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1\frac{\partial U}{\partial \gamma_2}, \qquad (1)$$

де: A, B, C — центральні моменти інерції, F, E, D — відцентрові моменти інерції гіростата відносно нерухомої точки O; p, q, r — проекції вектора кутової швидкості $\bar{\omega}$ тіла S_1 на рухомі осі; U — силова функція, залежна тільки від кутів φ і θ; $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ — проекції гіростатичного моменту на осі рухомої системи координат $Oxyz$.

Для визначеності одержаної системи рівнянь (1) необхідно ще скористатись кінематичними рівняннями Ейлера і Пуассона [1,2], які набувають вигляду

$$p = \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi,$$
$$q = \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi,$$
$$r = \dot{\psi}\cos\theta + \dot{\varphi}. \qquad (2)$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1,$$
$$\dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \qquad (3)$$

Компоненти вектора кутової швидкості p, q, r визначаються за допомогою кінематичних рівнянь Ейлера (2), в яких

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi,$$

$$\gamma_3 = \cos\theta, \tag{4}$$

причому напрямні косинуси $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ задовольняють систему диференціальних рівнянь (3).

У даному випадку вважаємо, що гіростат — це механічна система S, яка складається з твердого тіла $S1$ і пов'язаних із ним незмінних інших тіл $S2$, які залежать від вигляду тіла $S1$, характеру накладених зв'язків і діючих сил. Якщо тіло $S2$ є симетричним ротором з нерухомою віссю по відношенню до тіла $S1$, то рівняння відносного руху визначають обертальний рух тіла $S2$ по відношенню до тіла $S1$. Дані рівняння такі:

$$I_1(\dot{\omega}_1 + \dot{p}) = u_1, \quad I_2(\dot{\omega}_2 + \dot{q}) = u_2,$$

$$I_3(\dot{\omega}_3 + \dot{r}) = u_3, \tag{5}$$

де I_1, I_2, I_3 — моменти інерції тіла $S2$, які вважаються малими величинами; u_1, u_2, u_3 — керуючі моменти, що прикладені до системи, а вектор кутової швидкості обертального руху тіла $S2$ набуває вигляду

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_3. \tag{6}$$

Вектори $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$ визначаються так:

$$\bar{\omega}_1 = \alpha_1 \bar{\omega}_r, \quad \bar{\omega}_2 = \alpha_2 \bar{\omega}_r,$$

$$\bar{\omega}_3 = \alpha_3 \bar{\omega}_r. \tag{7}$$

Величини $\alpha_i (i = 1, 2, 3)$, що входять до рівняння (7), задовольняють наступну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\alpha}_1 = r\alpha_2 - q\alpha_3, \quad \dot{\alpha}_2 = p\alpha_3 - r\alpha_1,$$

$$\dot{\alpha}_3 = q\alpha_1 - p\alpha_2, \tag{8}$$

причому

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1. \tag{9}$$

Проекції гіростатичного моменту на осі рухомої системи координат визначаються формулами:

$$\Gamma_1 = I_1 \alpha_1 \omega_r, \quad \Gamma_2 = I_2 \alpha_2 \omega_r,$$

$$\Gamma_3 = I_3 \alpha_3 \omega_r, \tag{10}$$

де ω_r — модуль вектора відносної кутової швидкості $\bar{\omega}_r$, причому $\omega_r = \mathrm{const}$.

Підставляючи (10) до системи рівнянь (1), одержимо

$$A\dot{p} - F\dot{q} - E\dot{r} + I_1\dot{\alpha}_1\omega_r + (C - B)qr +$$

$$+D(r^2 - q^2) - Epq + Fpr + I_3\alpha_3 q\omega_r - I_2\alpha_2 r\omega_r =$$

$$= \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3},$$

$$-F\dot{p} + B\dot{q} - D\dot{r} + I_2\dot{\alpha}_2\omega_r + (A - C)pr +$$

$$+E(p^2 - r^2) - Fqr + Dpq + I_1\alpha_1 r\omega_r - I_3\alpha_3\omega_r p =$$

$$= \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1},$$

$$-E\dot{p} - D\dot{q} + C\dot{r} + I_3\dot{\alpha}_3\omega_r + (B - A)pq +$$

$$+F(q^2 - p^2) - Dpr + Eqr + I_2\alpha_2 p\omega_r - I_1\alpha_1 q\omega_r =$$

$$= \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2}. \tag{11}$$

Таким чином, рух гіростата по відношенню до осей рухомої системи координат $Oxyz$ описується системами диференціальних рівнянь (11), (8), (5) і (3). Інтегрування цих систем дає можливість визначити невідомі функції $p, q, r, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

Оскільки гіростат вважається симетричним, то в цьому випадку будемо вважати

$$I_1 = I_2 = I_3 = I. \tag{12}$$

Сукупність систем, що описують рух гіростата, допускають три перших інтеграли:

— інтеграл живих сил:

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fpq - Epr -$$

$$-Dqr + I\omega_r(p\alpha_1 + q\alpha_2 + r\alpha_3) = U + h; \tag{13}$$

— інтеграл площ:

$$Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3 - Fq\gamma_1 - Er\gamma_1 -$$

$$-Fp\gamma_2 - Dr\gamma_2 - Ep\gamma_3 - Dq\gamma_3 +$$

$$+I\omega_r(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3) = G, \tag{14}$$

де h і G — сталі величини;

— тривіальні інтеграли

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1. \tag{15}$$

Знаючи живу силу T (кінетичну енергію) і силову функцію U, складемо вираз для функції Лагранжа згідно з формулою

$$L = T + U = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) - Fpq-$$
$$-Epr - Dqr + I\omega_r(p\alpha_1 + q\alpha_2 + r\alpha_3)+$$
$$+\frac{1}{2}I(\omega_r)^2 + U. \qquad (16)$$

Підставляючи (2) в (16) і враховуючи (4), одержимо

$$L = \frac{1}{2}\Big\{(A\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2 - 2F\gamma_1\gamma_2-$$
$$-2E\gamma_1\gamma_3 - 2D\gamma_2\gamma_3)\dot{\psi}^2 + (A\cos^2\varphi+$$
$$+B\sin^2\varphi + 2F\cos\varphi\sin\varphi)\dot{\theta}^2 + C\dot{\varphi}^2+$$
$$+2[A\gamma_1\cos\varphi - B\gamma_2\sin\varphi - F(\gamma_2\cos\varphi-$$
$$-\gamma_1\sin\varphi) - E\gamma_3\cos\varphi + D\gamma_3\sin\varphi]\dot{\psi}\dot{\theta}+$$
$$+2\dot{\psi}\dot{\varphi}(C\gamma_3 - E\gamma_1 - D\gamma_2)+$$
$$+2\dot{\theta}\dot{\varphi}(D\sin\varphi - E\cos\varphi)\Big\} + I\omega_r[(\alpha_1\gamma_1+$$
$$+\alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)\dot{\psi} + (\alpha_1\cos\varphi - \alpha_1\sin\varphi)\dot{\theta}+$$
$$+\alpha_3\dot{\varphi}] + \frac{1}{2}\omega_r^2 + U. \qquad (17)$$

Функція Лагранжа, що визначається співвідношенням (17), не залежить від координати ψ, тому цю координату вважаємо циклічною.

Користуючись методом ігнорування циклічною координатою, можна перейти від лагранжіана до функції Рауса [2]. У даному випадку функція Рауса набуває вигляду

$$R = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2\Big[A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi+$$
$$+2F\cos\varphi\sin\varphi - K(A\gamma_1\cos\varphi-$$
$$-B\gamma_2\sin\varphi + F\gamma_1\sin\varphi - F\gamma_2\cos\varphi-$$
$$-E\gamma_3\cos\varphi + D\gamma_3\sin\varphi)^2\Big]+$$
$$+\frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\Big[C - K(C\gamma_3 - E\gamma_1 - D\gamma_2)\Big]+$$
$$+\dot{\varphi}\dot{\theta}\Big[D\sin\varphi - E\cos\varphi - K(A\gamma_1\cos\varphi-$$
$$-B\gamma_2\sin\varphi + F\gamma_1\sin\varphi - F\gamma_2\cos\varphi-$$
$$-E\gamma_3\cos\varphi + D\gamma_3\sin\varphi)(C\gamma_3 - E\gamma_1-$$
$$-D\gamma_2)\Big] + \Big\{K(A\gamma_1\cos\varphi - B\gamma_2\sin\varphi+$$
$$+F\gamma_1\sin\varphi - F\gamma_2\cos\varphi - E\gamma_3\cos\varphi+$$
$$+D\gamma_3\sin\varphi)[f - I\omega_r(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2+$$
$$+\alpha_3\gamma_3)] + I\omega_r(\alpha_1\cos\varphi - \alpha_2\sin\varphi)\Big\}\dot{\theta}+$$
$$+\Big\{K(C\gamma_3 - E\gamma_1 - D\gamma_2)[f - I\omega_r(\alpha_1\gamma_1+$$
$$+\alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)] + I\omega_r\alpha_3\Big\}\dot{\varphi}-$$
$$-\frac{1}{2}K\Big[f - I\omega_r(\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \alpha_3\gamma_3)\Big]^2+$$
$$+\frac{1}{2}I\omega_r^2 + U, \qquad (18)$$

де

$$K = \Big(\gamma_1^2 + B\gamma_2^2 + C\gamma_3^2 - 2(F\gamma_1\gamma_2+$$
$$+E\gamma_1\gamma_3 + D\gamma_2\gamma_3)\Big)^{-1}. \qquad (19)$$

З формули (18) видно, що функцію Рауса можна подати у вигляді суми трьох доданків R_2, R_1, R_0 — тобто однорідних функцій другого і першого порядку відносно нециклічних швидкостей $\dot{\varphi}$, $\dot{\theta}$ і функції, незалежної від узагальнених швидкостей.

Введемо, згідно з Г. Колосовим [2], нові змінні

$$\xi = \frac{\gamma_1}{\sqrt{A}}, \quad \eta = \frac{\gamma_2}{\sqrt{B}}, \quad \zeta = \frac{\gamma_3}{\sqrt{C}}. \qquad (20)$$

Враховуючи (20), функції R_2, R_1, R_0 набудуть вигляду

$$R_2 = \frac{1}{2}\Big\{\frac{(A\dot{\xi}\xi + B\dot{\eta}\eta)^2}{C\zeta^2(1 - C\zeta^2)^2}\Big[AB(\xi^2 + \eta^2+$$

$$+2F\sqrt{AB}\xi\eta) - K\Bigg((A-B)\sqrt{AB}\xi\eta+$$

$$+FA\xi^2 - FB\eta^2 - E\sqrt{BC}\eta\zeta + D\sqrt{AC}\xi\zeta\Bigg)^2\Bigg]+$$

$$+\frac{AB(\dot{\xi}\eta-\dot{\eta}\xi)^2}{(1-C\zeta^2)^2}\Big[C - K(C\sqrt{C}\zeta - E\sqrt{A}\xi-$$

$$-D\sqrt{B}\eta)^2\Big] + 2\frac{\sqrt{AB}(A\xi\dot{\xi}+B\eta\dot{\eta})(\dot{\xi}\eta-\dot{\eta}\xi)}{\sqrt{C}\zeta(1-C\zeta^2)^2}\cdot$$

$$\cdot\Bigg[D\sqrt{A}\xi - E\sqrt{B}\eta - K\Bigg((A-B)\sqrt{AB}\xi\eta+$$

$$+FA\xi^2 - FB\eta^2 - E\sqrt{BC}\eta\zeta + D\sqrt{AC}\xi\zeta\Bigg)\Bigg]\cdot$$

$$\cdot(C\sqrt{C}\zeta - E\sqrt{A}\xi - D\sqrt{B}\eta)\Bigg\}. \qquad (21)$$

$$R_1 = \frac{1}{1-C\zeta^2}\Bigg\{\frac{A\dot{\xi}\xi + B\dot{\eta}\eta}{\sqrt{C}\zeta}\Bigg[K\Bigg(\sqrt{AB}(A-$$

$$-B)\xi\eta + FA\xi^2 - FB\eta^2 - E\sqrt{BC}\eta\zeta+$$

$$+D\sqrt{AC}\xi\zeta\Bigg)\Bigg(f - I\omega_r(\alpha_1\sqrt{A}\xi + \alpha_2\sqrt{B}\eta+$$

$$+\alpha_3\sqrt{C}\zeta)\Bigg) + I\omega_r(\alpha_1\sqrt{B}\eta - \alpha_2\sqrt{A}\xi)\Bigg]+$$

$$+\sqrt{AB}(\dot{\xi}\eta - \dot{\eta}\xi)\Bigg[K(C\sqrt{C}\zeta - E\sqrt{A}\xi-$$

$$-D\sqrt{B}\eta)\Bigg(f - I\omega_r(\alpha_1\sqrt{A}\xi + \alpha_2\sqrt{B}\eta+$$

$$+\alpha_3\sqrt{C}\zeta)\Bigg) + I\omega_r\alpha_3\Bigg]\Bigg\}. \qquad (22)$$

$$R_0 = -\frac{1}{2}K\Bigg\{f - I\omega_r(\alpha_1\sqrt{A}\xi + \alpha_2\sqrt{B}\eta+$$

$$+\alpha_3\sqrt{C}\zeta)\Bigg\}^2 + \frac{1}{2}I\omega_r^2 + U(\xi,\eta,\zeta). \qquad (23)$$

Для спрощення досліджень надалі вважатимемо, що $E = D = 0$, а $F \neq 0$, причому ця величина є малою, тобто величинами, починаючи з другого порядку, можна нехтувати.

За допомогою змінних Колосова [2] і з використанням перших інтегралів (13)—(15) система диференціальних рівнянь руху гіростата зводиться до системи четвертого порядку, яка описує рух фіксованої матеріальної точки на площині під дією потенціальних і гіроскопічних сил.

Інтегрування одержаної системи рівнянь проведено для двох випадків:

1) $A = B = C$ (гіростат типу сфери);

2) $C > B > A$.

Використано метод Рунге-Кутта [3] четвертого порядку для числового моделювання одержаних задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бухгольц Н.Н.* Основной курс теоретической механики.— М.: Наука, 1969.— Ч.2.— 332 с.

2. *Демин В.Г., Конкина Л.И.* Новые методы в динамике твердого тела.— Фрунзе: Илим, 1989.— 183 с.

3. *Копченова Н.В., Марон И.А.* Вычислительная математика в примерах и задачах.— М.: Наука, 1972.— 368 с.

4. *Мігуца Д.О.* Дослідження руху твердого тіла в неголовних осях інерції методом малого параметру // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 2000.— Вип. 5.— С.225—234.

Стаття надійшла до редколегії 9.07.2002