УДК 514.76

©2002 р. **В.І. Мироник**

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ГІПЕРПОВЕРХНІ ЗАГАЛЬНОГО ТИПУ В АНТИКВАТЕРНІОННОМУ ПРОСТОРІ

Досліджуються диференціально-геометричні властивості гіперповерхонь загального типу в антикватерніонному просторі.

The differential-geometrical properties of hypersurfaces of generalized type are investigated in the antiquaternion space.

1. Нормалізована гіперповерхня $\mathfrak{M}_{2n-1}(N)$ антикватерніонного простору $A_{2n}(U,V)$ зі структурними автоморфізмами U і V називається гіперповерхнею загального типу, якщо в кожній точці гіперповерхні напрямний вектор $\underset{x}{\vec{N}}$ нормалі $\underset{x}{N}$ не належить до жодного з елементів фундаментальних розподілів антикватерніонного простору $A_{2n}(U,V)$ [1]. Структурні автоморфізми $I = id$, U, V визначають на дійсному точковому афінному просторі A_{2n} алгебру антикватерніонів, оскільки $U^2 = -I$, $V^2 = I$, $UV + VU = O$, де O — нульовий автоморфізм, а $W = UV$ — композиційний автоморфізм. Якщо $\left\{\underset{x}{\vec{e}_I}\right\}$ — деякий базис лінеалу простору A_{2n} у його точці x, а $\left\{\underset{\vec{x}}{e^I}\right\}$ — взаємний йому базис у спряженому просторі (тоді

$$< \underset{\vec{x}}{e^I} \Big| \underset{x}{\vec{e}_K} > = \delta^I_K =$$

$$= \begin{cases} 1, & I = K, \\ 0, & I \neq K, \end{cases}$$

$I, J, K, L, ... = \overline{1, 2n}$ і

$$U = U^I_K(x^1, ..., x^{2n}) \underset{x}{\vec{e}_I} \otimes \underset{\vec{x}}{e^K},$$

$$V = V^I_K(x^1, ..., x^{2n}) \underset{x}{\vec{e}_I} \otimes \underset{\vec{x}}{e^K},$$

$$W = UV =$$

$$= U^I_L(x^1, ..., x^{2n}) V^L_K(x^1, ..., x^{2n}) \underset{x}{\vec{e}_I} \otimes \underset{\vec{x}}{e^K} =$$

$$= W^I_K(x^1, ..., x^{2n}) \underset{x}{\vec{e}_I} \otimes \underset{\vec{x}}{e^K}.$$

Функції U^I_K, V^I_K і W^I_K є тензорами типу (1,1), оскільки при заміні карт на $A_{2n}(U,V)$ маємо

$$U^I_K(y^1, ..., y^{2n}) =$$

$$= U^L_J(x^1, ..., x^{2n}) \frac{\partial y^J}{\partial x^K} \cdot \frac{\partial x^I}{\partial y^L},$$

$$V^I_K(y^1, ..., y^{2n}) =$$

$$= V^L_J(x^1, ..., x^{2n}) \frac{\partial y^J}{\partial x^K} \cdot \frac{\partial x^I}{\partial y^L},$$

$$W^I_K(y^1, ..., y^{2n}) =$$

$$= W^L_J(x^1, ..., x^{2n}) \frac{\partial y^J}{\partial x^K} \cdot \frac{\partial x^I}{\partial y^L}, \quad (1)$$

де матриця $\frac{\partial x^I}{\partial y^L}$ є матрицею Якобі заміни карт.

Інваріантність структурних автоморфізмів U і V антикватерніонного простору $A_{2n}(U,V)$ еквівалентна умовам

$$dU^I_K - U^I_L\omega^L_K + U^L_K\omega^I_L = U^I_{KL}\omega^L,$$

$$dV^I_K - V^I_L\omega^L_K + V^L_K\omega^I_L = V^I_{KL}\omega^L, \quad (2)$$

де ω^L — головні форми простору $A_{2n}(U,V)$ з структурою $d\omega^L = \omega^K \wedge \omega^L_K$, $d\omega^I_K = \omega^L_K \wedge \omega^I_L$, d — символ зовнішнього диференціювання,

$\wedge$ — символ зовнішнього добутку диференціальних форм [2].

Якщо $T_x(A_{2n}(U,V))$ — лінійний простір дотичних векторів з початками у точці x антикватерніонного простору $A_{2n}(U,V)$, то його підпростори $V_x(\pm 1)$ і $W_x(\pm 1)$ називаються елементами фундаментальних розподілів $V(\pm 1)$ і $W(\pm 1)$. У праці [1] встановлено, що вектори $\left\{\frac{1}{2}\left(\delta_K^I \pm V_K^I\right) \underset{x}{\vec{e}_I}\right\}$ і $\left\{\frac{1}{2}\left(\delta_K^I \pm W_K^I\right) \underset{x}{\vec{e}_I}\right\}$ складають базиси підпросторів — елементів фундаментальних розподілів, якщо $\underset{x}{\vec{e}_I}$ — деякий базис лінеалу антикватерніонного простору $A_{2n}(U,V)$.

У формулах (2) коефіцієнти при ω^L називають додатковими функціями структурних автоморфізмів антикватерніонного простору [2]. Додаткові функції є лінійними однорідними геометричними об'єктами, приєднаними до диференціальної групи першого порядку простору $A_{2n}(U,V)$.

Теорема 1. *Рівність нулеві додаткових функцій структурних автоморфізмів антикватерніонного простору $A_{2n}(U,V)$ є ознакою існування в антикватерніонному просторі афінної антикватерніонної зв'язності.*

Доведення. Система диференціальних рівнянь (2) при $U_{KL}^I = 0$, $V_{KL}^I = 0$ стає системою умов для форм ω_K^L, відносно яких структурні автоморфізми U, V, а також $W = UV$, будуть коваріантно сталими. Отже, форми ω_K^L стають інваріантними формами деякої афінної зв'язності, яка є антикватерніонною [3]. Зауважимо, що в силу скінченних співвідношень, яким задовольняють додаткові функції структурних автоморфізмів антикватерніонного простору $A_{2n}(U,V)$, усі продовження нульові (картанівські коефіцієнти додаткових функцій рівні нулеві).

2. Диференціальні рівняння довільної регулярної гіперповерхні $\mathfrak{M}_{2n-1}$ в $A_{2n}(U,V)$ мають вигляд

$$\omega^I = \Lambda_i^I \theta^i,$$

$$\operatorname{rg} \Lambda_i^I = 2n-1,$$

$$i,j,k,l,\ldots = \overline{1,2n-1}, \tag{3}$$

θ^i — головні форми многовиду параметрів гіперповерхні $\mathfrak{M}_{2n-1}$. Функції $\{\Lambda_i^I\}$ утворюють фундаментальний об'єкт першого порядку гіперповерхні $\mathfrak{M}_{2n-1}$, приєднаний до прямого добутку диференціальних груп $D_{2n}^1 \times D_{2n-1}^1$. Позначимо антикватерніонну зв'язність в антикватерніонному просторі $A_{2n}(U,V)$ через γ. Афінна зв'язність γ індукує на гіперповерхні $\mathfrak{M}_{2n-1}$ тангенційну зв'язність γ_τ [4]. Інваріантними формами тангенційної зв'язності будуть форми θ_j^i, бо $d\theta^i = \theta^j \wedge \theta_j^i$, $d\theta_j^i = \theta_j^l \wedge \theta_l^i$. Відомо, що індукована зв'язністю γ вміщуючого простору тангенційна зв'язність γ_τ залежить від вибору нормального оснащуючого поля N на гіперповерхні [4]. Поле нормалей N на $\mathfrak{M}_{2n-1}$ — це векторне поле $\underset{x}{\vec{N}} = N^I \underset{x}{\vec{e}_I}$, $x \in \mathfrak{M}_{2n-1}$. Інваріантність векторного поля $\underset{x}{\vec{N}}$ на гіперповерхні еквівалентна умовам

$$dN^I + N^K \omega_K^I - N^I \Omega = N_i^I \theta^i,$$

де Ω — інваріантна форма означеної групи гомотетій підпростору N_x простору $T_x(A_{2n}(U,V))$, $x \in \mathfrak{M}_{2n-1}$. Антикватерніонна зв'язність γ індукує в нормальному розшаруванні $N(\mathfrak{M}_{2n-1})$ нормальну зв'язність, позначимо її γ_ν.

Нехай Γ_{KL}^I — об'єкт антикватерніонної зв'язності γ у просторі $A_{2n}(U,V)$, а

$$\left\{\underset{x}{\vec{\Lambda}_i} = \Lambda_i^I \underset{x}{\vec{e}_I},\ \underset{x}{\vec{N}} = N^I \underset{x}{\vec{e}_I}\right\}$$

— базис лінійного простору $T_x(A_{2n}(U,V))$, $x \in \mathfrak{M}_{2n-1}^{(N)}$, адаптований нормалізованій гіперповерхні полем нормалей N. Тоді розклад $\underset{x}{\vec{e}_I} = \widetilde{\Lambda}_I^i \underset{x}{\vec{\Lambda}_i} + \widetilde{N}_I \underset{x}{\vec{N}}$ визначається функціями $\left\{\widetilde{\Lambda}_I^i, \widetilde{N}_I\right\}$ такими, що

$$\Lambda_i^I \widetilde{N}_I = 0, \quad N^I \widetilde{\Lambda}_I^i = 0,$$

$$\Lambda_i^I \widetilde{\Lambda}_I^j = \delta_i^j, \quad N^I \widetilde{N}_I = 1,$$

$$\Lambda^I_j \overset{\sim}{\Lambda}{}^j_K + N^I \tilde{N}_K = \delta^I_K,$$

де δ^j_i та δ^I_K — символи Кронекера.

Теорема 2 [4]. *Функції*

$$\underset{\tau}{\Gamma}{}^i_{jk} := \Lambda^L_j \overset{\sim}{\Lambda}{}^i_K \Gamma^K_{Lk} - \overset{\sim}{\Lambda}{}^i_K \Lambda^K_{jk}, \tag{4}$$

$$\underset{\nu}{\Gamma}_k := N^L \tilde{N}_K \Gamma^K_{Lk} - \tilde{N}_K N^K_k \tag{5}$$

є об'єктами, відповідно, тангенційної та нормальної зв'язностей, індукованих антикватерніонною зв'язністю γ на нормалізованій гіперповерхні $\mathfrak{M}_{2n-1}(N)$ ($\Gamma^K_{Lk} := \Gamma^K_{LI}\Lambda^I_k$).

У формулах (4) і (5) об'єкт

$$\left\{\Gamma^K_{Lk} = \Gamma^K_{LI}\Lambda^I_k\right\},$$

а Λ^K_{jk} — коефіцієнти Картана, які отримуються внаслідок замикання системи (3). Отже, $\Lambda^K_{jk} = \Lambda^K_{kj}$.

Наслідок. *Якщо антикватерніонна зв'язність γ симетрична, то індукована на гіперповерхні нею тангенційна зв'язність γ_τ теж симетрична.*

Доведення. Справді, у симетричної антикватерніонної зв'язності γ об'єкт зв'язності володіє симетрією $\Gamma^I_{KL} = \Gamma^I_{LK}$. Тому об'єкт тангенційної зв'язності

$$\underset{\tau}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Lambda^L_j \overset{\sim}{\Lambda}{}^i_K \Gamma^K_{LI}\Lambda^I_k - \overset{\sim}{\Lambda}{}^i_K \Lambda^K_{jk} =$$

$$= \Lambda^L_j \overset{\sim}{\Lambda}{}^i_K \Gamma^K_{IL}\Lambda^I_k - \overset{\sim}{\Lambda}{}^i_K \Lambda^K_{kj} = \underset{\tau}{\Gamma}{}^i_{kj}$$

теж володіє симетрією.

3. Для нормалізованої гіперповерхні загального типу в $A_{2n}(U,V)$ у кожній точці x гіперповерхні $\mathfrak{M}_{2n-1}(N)$ вектор $\underset{x}{\vec{N}}$ не належить фундаментальним розподілам $V(\pm 1)$ і $W(\pm 1)$. Оскільки гіперповерхня загального типу в $A_{2n}(U,V)$ відноситься до гіперповерхонь третього класу [1], то на ній існує дві $(f\,\xi\,\eta\,\rho)$-структури: $(\underset{1}{f}\ \underset{1}{\xi}\ \underset{1}{\eta}\ \underset{1}{\rho})$ і $(\underset{2}{f}\ \underset{2}{\xi}\ \underset{2}{\eta}\ \underset{2}{\rho})$, де $\underset{1}{\rho} \neq 0$, $\underset{2}{\rho} = 0$. Структурні об'єкти індукованих $(f\,\xi\,\eta\,\rho)$-структур задовольняють тотожностям

$$\underset{1}{f}{}^j_i \underset{1}{f}{}^k_j = -\delta^k_i + \underset{1}{\eta}_i \underset{1}{\xi}{}^k,$$

$$\underset{1}{\eta}_i = -\frac{1}{\underset{1}{\rho}} \underset{1}{f}{}^j_i \underset{1}{\eta}_j,$$

$$\underset{1}{f}{}^j_i \underset{1}{\xi}{}^i = -\underset{1}{\rho} \underset{1}{\xi}{}^j,$$

$$\underset{1}{\xi}{}^i \underset{1}{\eta}_i = 1 + \underset{1}{\rho}{}^2$$

$$\underset{2}{f}{}^j_i \underset{2}{f}{}^k_j = \delta^k_i + \underset{2}{\eta}_i \underset{2}{\xi}{}^k,$$

$$\underset{2}{f}{}^j_i \underset{2}{\eta}_j = 0,$$

$$\underset{2}{f}{}^j_i \underset{2}{\xi}{}^i = 0,$$

$$\underset{2}{\xi}{}^i \underset{2}{\eta}_i = -1,$$

$$\underset{1}{f}{}^j_i \underset{2}{f}{}^k_j + \underset{2}{f}{}^j_i \underset{1}{f}{}^k_j = \underset{1}{\eta}_i \underset{2}{\xi}{}^k + \underset{2}{\eta}_i \underset{1}{\xi}{}^k,$$

$$\underset{1}{f}{}^j_i \underset{2}{\eta}_j + \underset{2}{f}{}^j_i \underset{1}{\eta}_j = -\underset{1}{\rho} \underset{2}{\eta}_i,$$

$$\underset{1}{\xi}{}^j \underset{2}{f}{}^k_j + \underset{1}{\rho} \underset{2}{\xi}{}^k = -\underset{2}{\xi}{}^j \underset{1}{f}{}^k_j,$$

$$\underset{1}{\xi}{}^i \underset{2}{\eta}_i = -\underset{2}{\xi}{}^i \underset{1}{\eta}_i\,. \tag{6}$$

За означенням структурних об'єктів індукованих $(f\,\xi\,\eta\,\rho)$-структур для гіперповерхні загального типу маємо

$$U(\underset{x}{\vec{\Lambda}}_i) = \underset{1}{f}{}^j_i \underset{x}{\vec{\Lambda}}_j + \underset{1}{\eta}_i \underset{x}{\vec{N}},$$

$$U(\underset{x}{\vec{N}}) = -\underset{1}{\xi}{}^j \underset{x}{\vec{\Lambda}}_j + \underset{1}{\rho} \underset{x}{\vec{N}},$$

$$V(\underset{x}{\vec{\Lambda}}_i) = \underset{2}{f}{}^j_i \underset{x}{\vec{\Lambda}}_j + \underset{2}{\eta}_i \underset{x}{\vec{N}},$$

$$V(\underset{x}{\vec{N}}) = -\underset{2}{\xi}{}^j \underset{x}{\vec{\Lambda}}_j, \quad \underset{1}{\rho} \neq 0,$$

$$W(\underset{x}{\vec{N}}) = U(V(\underset{x}{\vec{N}})) = U(\underset{x}{\vec{N}}) =$$

$$= -\underset{1}{\xi}{}^i \underset{x}{\vec{\Lambda}}_i + \underset{1}{\rho} \underset{x}{\vec{N}}, \quad \operatorname{rg} \underset{1}{\xi}{}^i = 1.$$

Таким чином доведена наступна теорема.

Теорема 3. *Регулярна нормалізована гіперповерхня загального типу в антикватерніонному просторі $A_{2n}(U,V)$ є гіперповерхнею $(f\,\xi\,\eta\,\rho)$-структури корангу 1 з тією властивістю, що ненульове векторне поле ξ є полем власних векторів лінійного оператора f, що відносяться до власного значення $\rho \neq 0$.*

Нетривіальність векторного поля ξ на гіперповерхні еквівалентна умові $\operatorname{rg} \underset{1}{\xi^i} = 1$, оскільки $\operatorname{rg} \underset{1}{\xi^i} = 0$ означає належність векторів $\underset{x}{\vec{N}}$ фундаментальному розподілу $W(\pm 1)$ ($W(+1)$, якщо $\underset{1}{\rho} > 0$ і $W(-1)$, якщо $\underset{1}{\rho} < 0$).

Зауважимо, що нормалізована гіперповерхня загального типу в антикватерніонному просторі є також поверхнею майже контактної структури еліптичного типу [1]. Сформульовані теореми дають можливість побудови, інваріантно приєднаних до кожної звичайної точки гіперповерхні загального типу в антикватерніонному просторі афінних базисів таких, які є частково канонізованими відносно гіперповерхні. Подальше дослідження гіперповерхонь загального типу зручно вести саме в таких базисах. Серед цих базисів для окремих класів гіперповерхонь загального типу можна знайти аналоги базисів Дарбу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Домбровський Р.Ф., Мироник В.І.* Класифікація гіперповерхонь антикватерніонного простору // Науковий вісник Чернівецького університету: Зб. наук. пр. Вип. 76. Математика — Чернівці: Рута, 2000.— С.23—31.

2. *Домбровский Р.Ф.* О геометрии тензорных полей на многообразиях почти кватернионной структуры // Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. — М.: ВИНИТИ РАН.— Геометрия-3.— 1995.— **30**.— С.195—209.

3. *Мироник В.І.* Антикватерніонні зв'язності та їх деформація на многовидах майже антикватерніонної структури // Матеріали 4-ої міжнародної конференції з геометрії і топології. Черкаси: ЧІТІ.— 2001.— С.65—67.

4. *Остиану Н.М., Домбровский Р.Ф., Поляков Н.Д.* Подмногообразия в дифференцируемых многообразиях, наделенных дифференциально-геометрическими структурами. II. Подмногообразия коразмерности 2 в контактном и почти контактном многообразиях // Проблемы геометрии. Итоги науки и техники.— М: ВИНИТИ АН СССР, 1981.— **13**.— С.27—76.

Стаття надійшла до редколегії 5.07.2002