УДК 517.925

©2002 р. О.В. Матвій, І.М. Черевко

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

АПРОКСИМАЦІЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ ТА РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ІЗ БАГАТЬМА ЗАПІЗНЕННЯМИ

Досліджується система диференціально-різницевих та різницевих рівнянь. Побудована і обгрунтована схема апроксимації такої системи системою звичайних диференціальних рівнянь.

The system of differential-difference and difference equations is researched. The scheme of the aproximation of given system by system for ordinary differential equations is constructed and established.

Вступ. Наближена заміна лінійних диференціально-різницевих рівнянь системою звичайних диференціальних рівнянь вивчалась вперше М.М. Красовським [1] при розв'язуванні задачі про побудову оптимального регулятора в системах із запізненням. Обгрунтування наближеної заміни нелінійних диференціальних рівнянь із запізненням у просторах диференційовних та ліпшицевих функцій досліджено Ю.М. Рєпіним [2]. Тому називатимемо алгоритм апроксимації рівнянь із запізненням, запропонований у працях [1, 2], схемою апроксимації Красовського-Рєпіна.

Поширення схеми Красовського-Рєпіна на лінійні диференціальні рівняння із змінним запізненням розглянуто в праці [3], а на диференціально-різницеві рівняння нейтрального типу — в праці [4]. Точність наближення на скінченному інтервалі забезпечується за рахунок підвищення розмірності m апроксимуючої системи звичайних диференціальних рівнянь. Варто відзначити, що при великих m апроксимуюча система стає жорсткою і для її чисельного аналізу необхідно використовувати жорстко стійкі методи.

У працях [5,6] вивчались схеми наближення лінійних диференціально-функціональних рівнянь, що базуються на апроксимації інфінітизимального оператора півгрупи лінійних операторів послідовністю скінченновимірних операторів. Дослідження алгоритмів наближення лінійних нестаціонарних рівнянь із запізненням за допомогою апроксимації Паде для функції e^z розглянуто в працях [7, 8]. При цьому збіжність таких схем встановлена тільки в просторах достатньо гладких функцій.

Обгрунтування схеми апроксимації Красовського-Рєпіна в просторах неперервних та кусково-неперервних функцій і поширення її на нові класи диференціально-різницевих рівнянь розглядалось у працях [9—12]. За допомогою цієї схеми були побудовані й обгрунтовані алгоритми апроксимації неасимптотичних коренів квазіполіномів запізнюючого й нейтрального типів [13, 14].

1. Постановка задачі. Схема апроксимації. Розглянемо систему, що складається з диференціально-різницевого та різницевого рівнянь вигляду

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p), \quad y(t-\tau_{p+1}), \ldots, y(t-\tau_{p+q})), \tag{1}$$

$$y(t) = g(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p), \quad y(t-\tau_{p+1}), \ldots, y(t-\tau_{p+q})), \tag{2}$$

$$t \in [a, T], \quad p \geq 1, q \geq 1,$$

з початковими умовами

$$x(t) = \varphi_1(t), y(t) = \varphi_2(t), t \in [a-\tau, a], \tag{3}$$

де $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{p+q} = \tau$; $f(t, u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q)$, $g(t, u_1, \ldots, u_p, w_1, \ldots, w_q)$ — неперервні за t функції, що задовольняють глобальну умову Ліпшица по $u_1, \ldots, u_p$, $w_1, \ldots, w_q$; $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — задані неперервні при $t \in [a-T, a]$ функції, що задовольняють умову "склейки"

$$\varphi_2(a) = g(a, \varphi_1(a), \varphi_1(a-\tau_1), \ldots, \varphi_1(a-\tau_p), \varphi_2(a-\tau_{p+1}), \ldots, \varphi_2(a-\tau_{p+q})). \quad (4)$$

При виконанні цих припущень розв'язок задачі (1)-(3) існує, єдиний і може бути знайдений методом кроків, крім того $x(t) \in C[a-\tau, T] \bigcap C^1[a, T]$, $y(t) \in C[a-\tau, T]$ [15].

Система (1)-(2) — це новий для дослідження клас диференціально-різницевих рівнянь. Якщо функція g не залежить від y, то система (1)-(2) еквівалентна диференціальному рівнянню із запізненням. Якщо перше рівняння системи (1)-(2) можна розв'язати відносно y, то одержуємо диференціальне рівняння нейтрального типу.

Відзначимо, що частинний випадок системи (1)-(2), коли змінна $x(t)$ не містить відхилення аргументу, досліджувався в праці [9].

Визначимо функції $z_j(t)$, $j = \overline{0, m}$, $w_j(t)$, $j = \overline{1, m}$ як розв'язки системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} z_0'(t) &= f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t), \\ &\qquad w_{l_{p+1}}(t), \ldots, w_{l_{p+q}}(t)), \\ z_j'(t) &= \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)),\ j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} w_1'(t) &= \mu[g(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t), \\ &\qquad w_{l_{p+1}}(t), w_{l_{p+q}}(t)) - w_1], \\ w_j'(t) &= \mu(w_{j-1}(t) - w_j(t)),\ j = \overline{2, m} \end{aligned} \quad (6)$$

з початковими умовами

$$\begin{aligned} z_j(a) &= \varphi_1\left(a - \tfrac{\tau j}{m}\right),\ j = \overline{0, m}, \\ w_j(a) &= \varphi_2\left(a - \tfrac{\tau j}{m}\right),\ j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (7)$$

де $m \in N$, $\mu = \dfrac{m}{\tau}$, а індекси l_j однозначно визначаються нерівностями

$$a - \frac{\tau(l_j - 1)}{m} < a - \tau_j \le a - \frac{\tau l_j}{m}.$$

Важатимемо, що розв'язок системи (5)-(7) апроксимує розв'язок системи (1)-(3) на $[a, T]$, якщо

$$\left| x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t) \right| \to 0 \text{ при } m \to \infty,\ j = \overline{0, m},$$

$$\left| y(t - \frac{\tau j}{m}) - w_j(t) \right| \to 0 \text{ при } m \to \infty,\ j = \overline{1, m}.$$

2. Обгрунтування схеми апроксимації. Наведемо спочатку одне допоміжне твердження, яке буде потрібне в подальшому.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\begin{aligned} z_1'(t) &= \mu(F(t) - z_1(t)), \\ z_j'(t) &= \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)),\ j = \overline{2, m}, \\ z_j(a) &= 0,\ j = \overline{1, m}, \end{aligned} \quad (8)$$

де $F(t)$ — задана неперервна функція, $\mu > 0$.

Лема. *Для розв'язків системи (8) справджуються рівності*

$$z_j(t) = \frac{\mu^j}{(j-1)!} \int_a^t e^{-\mu(t-s)} (t-s)^{j-1} F(s) ds,$$

$$j = \overline{1, m}. \quad (9)$$

Доведення. Методом математичної індукції переконаємось, що рівності (9) правильні. Для $n = 1$, застосовуючи формулу варіації сталих, дістаємо $z_1(t) = \mu \int_a^t e^{-\mu(t-s)} F(s) ds$. Нехай співвідношення (9) справджується для $n = j$. Покажемо, що воно тоді буде правильним при $n = j+1$. із системи (8), застосовуючи формулу варіації сталих і міняючи порядок інтегрування, маємо рівність

$$z_{j+1}(t) = \mu \int_a^t e^{-\mu(t-s)} z_j(s) ds = \mu \int_a^t e^{-\mu(t-s)} \times$$

$$\times \frac{\mu^j}{(j-1)!} \int_a^s e^{-\mu(s-s_1)} (s-s_1)^{j-1} F(s_1) ds_1 ds =$$

$$= \frac{\mu^{j+1}}{(j-1)!} \int\limits_a^t \int\limits_a^s e^{-\mu(t-s_1)} (s-s_1)^{j-1} \times$$

$$\times F(s_1) ds_1 ds = \frac{\mu^{j+1}}{(j-1)!} \int\limits_a^t e^{-\mu(t-s_1)} F(s_1) \times$$

$$\times \int\limits_{s_1}^t (s-s_1)^{j-1} d(s-s_1) ds_1 =$$

$$= \frac{\mu^{j+1}}{j!} \int\limits_a^t e^{-\mu(t-s_1)} (t-s_1)^j F(s_1) ds_1.$$

Лема доведена.

Теорема. *Нехай* ($z_j(t)$, $j = \overline{0,m}$; $w_j(t)$, $j = \overline{1,m}$) *— розв'язок задачі Коші (5)-(7), а* $(x(t), y(t))$ *— розв'язок початкової задачі (1)-(3). Припустимо, що справджуються нерівності*

$$|f(t,u,u_1,\ldots,u_{p+q}) - f(t,v,v_1,\ldots,v_{p+q})| \le$$

$$\le L|u-v| + \sum_{i=1}^{p+q} L_i |u_i - v_i|,$$

$$|g(t,u,u_1,\ldots,u_{p+q}) - g(t,v,v_1,\ldots,v_{p+q})| \le$$

$$\le R|u-v| + \sum_{i=1}^{p+q} R_i |u_i - v_i|,$$

$$L > 0,\ R > 0,\ L_i > 0,\ R_i > 0,\ i = \overline{1,p+q},$$

$$\sum_{i=1}^{q} R_{p+i} < 1$$

і виконується умова склейки (4). Тоді мають місце співвідношення

$$|x(t) - z_0(t)| \le Q\omega(x(t), \frac{\tau}{m}),$$

$$\left| x(t - \frac{\tau j}{m}) - z_j(t) \right| \le Q_j \omega(x(t), \frac{\tau}{m}),\ j = \overline{1,m}, \tag{10}$$

$$\left| y(t - \frac{\tau j}{m}) - w_j(t) \right| \le P_j \omega(y(t), \frac{\tau}{m}),\ j = \overline{1,m},$$

де Q, Q_j, P_j, $j = \overline{1,m}$ *— додатні сталі, а* $\omega(x(t), \frac{\tau}{m})$ *та* $\omega(y(t), \frac{\tau}{m})$ *— модулі неперервності функцій* $x(t)$ *та* $y(t)$ *на відрізку* $[a-\tau, T]$.

Доведення. Перепишемо систему (5)-(7) у вигляді

$$z_0'(t) = f(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t), w_{l_{p+1}}(t), \ldots,$$

$$w_{l_{p+q}}(t)),\ z_j'(t) = \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)),\ j = \overline{1,m},$$

$$w_1'(t) = \mu(y(t) + g(t, z_0(t), z_{l_1}(t), \ldots,$$

$$z_{l_p}(t), w_{l_{p+1}}(t), w_{l_{p+q}}(t)) - g(t, x(t),$$

$$x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p), y(t-\tau_{p+1}),$$

$$\ldots, y(t-\tau_{p+q}) - w_1(t)),$$

$$w_j'(t) = \mu(w_{j-1} - w_j),\ j = \overline{2,m},$$

$$z_j(a) = \varphi_1\left(a - \frac{\tau j}{m}\right),\ j = \overline{0,m},$$

$$w_j(a) = \varphi_2\left(a - \frac{\tau j}{m}\right),\ j = \overline{1,m}.$$

Визначимо функції $u_j(t)$, $j = \overline{1,m}$ як розв'язки такої системи диференціальних рівнянь

$$u_1'(t) = \mu(y(t) - u_1),$$

$$u_j'(t) = \mu(u_{j-1} - u_j),\ j = \overline{2,m}, \tag{11}$$

$$u_j(a) = y_j(a) = \varphi_2\left(a - \frac{\tau j}{m}\right),\ j = \overline{1,m}. \tag{12}$$

Для системи (11)-(12) справедливі оцінки [11]

$$\left| u_j(t) - y(t - j\frac{\tau}{m}) \right| \le K_u \omega(y(t), \frac{\tau}{m}), \tag{13}$$

$$j = \overline{1,m}, K_u = 2(e^\tau + 1), \quad t \in [a,T].$$

Нехай

$$N_j(t) = \max_{a \le s \le t} |x(s - \frac{\tau j}{m}) - z_j(s)|,\ j = \overline{0,m},$$

$$M_j(t) = \max_{a \le s \le t} |y(s - \frac{\tau j}{m}) - u_j(s)|,\ j = \overline{1,m}, \tag{14}$$

$$\omega = \max(\omega(x(t), \frac{\tau}{m}), \omega(y(t), \frac{\tau}{m})).$$

Тоді, аналогічно як в [9, 11], легко показати, що справджуються оцінки

$$N_j(t) \le K_u \omega + N_0(t), \quad j = \overline{1,m},$$

$$M_j(t) \le K_u \omega,\ j = \overline{1,m}. \tag{15}$$

Визначимо функції $v_j(t) = u_j(t) - w_j(t), \quad j = \overline{1,m}$, як розв'язки системи рівнянь

$$v_1'(t) = \mu(g(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p),$$
$$y(t-\tau_{p+1}), \ldots, y(t-\tau_{p+q})) - g(t, z_0(t),$$
$$z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t), w_{l_{p+1}}(t), w_{l_{p+q}}(t)) - v_1(t)), \tag{16}$$
$$v_j'(t) = \mu(v_{j-1}(t) - v_j(t)), \quad j = \overline{2,m},$$
$$v_j(0) = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{17}$$

Враховуючи позначення (14) та оцінки (15), маємо нерівності

$$|x(t-\tau_j) - z_{l_j}(t)| \le |x(t-\tau_j) - x(t - \frac{\tau l_j}{m}) +$$
$$+ x(t - \frac{\tau l_j}{m}) - z_{l_j}(t)| \le N_{l_j}(t) + \omega \le N_0(t) +$$
$$+ \omega(K_u + 1) = N_0(t) + K\omega,$$
$$|y(t-\tau_j) - u_{l_j}(t)| \le |y(t-\tau_j) - y(t - \frac{\tau l_j}{m}) +$$
$$+ y(t - \frac{\tau l_j}{m}) - u_{l_j}(t)| \le M_{l_j}(t) + \omega \le K\omega,$$

де $K = K_u + 1$.

Надалі будемо використовувати таку оцінку $\mu \int\limits_a^t \frac{1}{(j-1)!}[\mu(t-s)]^{j-1} e^{-\mu(t-s)} ds \le \int\limits_a^\infty \frac{1}{(j-1)!} \lambda^{j-1} e^{-\lambda} d\lambda = 1$. Одержимо оцінки для функцій $v_j(t)$, $j = \overline{1,m}$. Використовуючи властивості функції g та лему, маємо

$$|v_j(t)| \le \mu \int\limits_a^t \frac{1}{(j-1)!} (\mu(t-s)^{j-1} e^{-\mu(t-s)} \times$$
$$\times |g(t, x(t), x(t-\tau_1), \ldots, x(t-\tau_p),$$
$$y(t-\tau_{p+1}), \ldots, y(t-\tau_{p+q})) - g(t, z_0(t),$$
$$z_{l_1}(t), \ldots, z_{l_p}(t), w_{l_{p+1}}(t), \ldots, w_{l_{p+q}}(t)))| \le$$
$$\le \mu \int\limits_a^t \frac{1}{(j-1)!} \times (\mu(t-s))^{j-1} e^{-\mu(t-s)} (R \times$$
$$\times |x(s) - z_0(s)| + \sum_{i=1}^p R_i |x(s-\tau_i) - z_{l_i}(s)| +$$
$$+ \sum_{i=1}^q R_{p+i} |y(s-\tau_{p+i}) - w_{l_{p+i}}(s)|) ds \le \mu \times$$
$$\times \int\limits_a^t \frac{1}{(j-1)!} (\mu(t-s))^{j-1} e^{-\mu(t-s)} (R\, N_0(s) \times$$
$$\times \sum_{i=1}^p R_i (N_0(s) + K\omega) + \sum_{i=1}^q R_{p+i} |y(s-\tau_{p+i}) -$$
$$- u_{l_{p+i}}(s)| + \sum_{i=1}^q R_{p+i} |v_{l_{p+i}}(s)|) ds \le ((R +$$
$$+ \sum_{i=1}^p R_i) N_0(t) + K\omega \sum_{i=1}^p R_i + K\omega \sum_{i=1}^q R_{p+i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^q R_{p+i} \sup_{a \le s \le t} |v_{l_{p+i}}(s)|)\, \mu \int\limits_a^t \frac{1}{(j-1)!} \times$$
$$\times (\mu(t-s))^{j-1} e^{-\mu(t-s)} ds \le A\, N_0(t) +$$
$$+ B\,\omega + C\, v, \ j = \overline{1,m}, \tag{18}$$

де $A = R + \sum\limits_{i=1}^p R_i$, $B = K \sum\limits_{i=1}^{p+q} R_i$, $C = \sum\limits_{i=1}^q R_{p+i}$, $v = \max\limits_{1 \le j \le m} (\sup\limits_{a \le s \le T} |v_i(t)|)$. Оскільки нерівність (18) справедлива для $t \in [a, T]$ і всіх $j = \overline{1,m}$, тоді має місце нерівність $v \le A\ N_0(t) + B\ \omega + C\ v$. Враховуючи, що згідно з умовами теореми $C < 1$, дістаємо нерівність $v \le \dfrac{A\, N_0(t) + B\,\omega}{1 - C}$.

Оцінимо тепер різницю $|x(t) - z_0(t)|$. Переходячи у рівняннях (1) і (5) до інтегральної форми, знаходимо

$$|x(t) - z_0(t)| \le L \int\limits_a^t N_0(s) ds + \sum_{i=1}^p L_i \times$$
$$\times \int\limits_a^t (N_0(s) + K\omega) ds + \sum_{i=1}^q L_{p+i} \int\limits_a^t K\omega ds +$$

$$+\sum_{i=1}^{q} L_{p+i} \int_a^t |v_{l_{p+i}}| ds \le (L + \sum_{i=1}^{p} L_i) \times$$

$$\times \int_a^t N_0(s) ds + K\omega(T-a) \sum_{i=1}^{p+q} L_{p+i} +$$

$$+\sum_{i=1}^{q} L_{p+i} \int_a^t \frac{A\, N_0(s) + B\, \omega}{1-C} ds \le$$

$$\le D \int_a^t N_0(s) ds + K\omega(T-a) \sum_{i=1}^{q} L_{p+i} +$$

$$+\frac{B\omega\,(T-a)}{1-C} \sum_{i=1}^{q} L_{p+i} = D \int_a^t N_0(s) ds + E\omega, \tag{19}$$

де $D = L + \sum_{i=1}^{p} L_i + \frac{A}{1-C} \sum_{i=1}^{q} L_{p+i}$, $E = (K + \frac{B}{1-C})(T-a) \sum_{i=1}^{q} L_{p+i}$. Нерівність (19) справедлива для всіх $t \in [a,T]$, тому, враховуючи позначення (14), маємо

$$N_0(t) \le D \int_a^t N_0(s) ds + E\omega. \tag{20}$$

Застосовуючи нерівність Гронуолла-Беллмана, дістаємо, що $N_0(t) \le E\omega e^{D(T-a)}$. Тепер із нерівностей (14) маємо

$$N_j(t) \le (K_u + Ee^{D(T-a)})\omega, \quad j = \overline{1,m}. \tag{21}$$

із нерівностей (15), (20), (21) випливає, що співвідношення (10) справджуються. Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красовский Н.Н.* Об апроксимации одной задачи аналитического конструирования регулятора в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика.— 1964.— **28**, N 4.— С.716—725.

2. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // Прикл. математика и механика.— 1965.— **29**, N 2.— С.226—245.

3. *Куржанский А.Б.* К апроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения.— 1967.— **3**, N 12.— С.2094—2107.

4. *Szczepaniak P., Burmister H.* On the approximate solution of neutral differential-difference equation // Postepy cubernetyki.— 1984.— **7**, N 2.— P.69—82.

5. *Banks H.T., Burns I.A.* An abstract framework for approximate solutions to optimal control problems governed by hereditary systems // Proceedings of International conference on differential equations.— New York: Academic Press, 1975.— P.10—25.

6. *Banks H.T., Burns I.A.* Hereditary control problems: numerical methods based on averaging approximation // SIAM J. Control Optim.— 1978.— **16**, N 2.— P.169—208.

7. *Опарин Н.П.* Аппроксимация систем линейных нестационарных уравнений запаздывающего типа системами обыкновенных уравнений // Дифференциальные уравнения и функциональный анализ.— М.: Наука, 1984.— С.66—75.

8. *Оболенский А.Ю., Чернецкая Л.Н.* Об одном способе исследования функционально-дифференциальных моделей в задачах электродинамики // Электр. моделирование.— 1993.— **15**, N 4.— С.8—13.

9. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання.— 1999.— N 1.— С.42—50.

10. *Cherevko I.M., Piddubna L.A.* Approximations of differential-difference equations and calculations of nonassymptotic roots of quasipolinomials // Revue d'analyse numerique et de theorie de l'approximations.— 1999.— **28**, N 1.— P.15—21.

11. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.85—89.

12. *Черевко І.М.* Про наближену заміну різницевих і диференціально-різницевих рівнянь звичайними диференціальними рівняннями // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 134. Математика.— Чернівці: Рута, 2002.— С.107—111.

13. *Черевко І.М.* Апроксимація диференціально-різницевих рівнянь і наближення неасимптотичних коренів квазіполіномів // Нелінійні диференціальні рівняння та їх застосування.— К.: Ін-т математики АН України, 1992.— С.74—84.

14. *Піддубна Л.А., Черевко І.М. Берник В.О.* Алгоритм знаходження неасимптотичних коренів квазіполіномів // Дослідження математичних моделей.— К.: Ін-т математики НАН України, 1996.— С.30—35.

15. *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М.: Наука, 1971.— 296 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.09.2002