УДК 517.53

©2002 р. Н.Є.Лінчук, С.С.Лінчук

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

УМОВИ БАЗИСНОСТІ СИСТЕМ ПІНКЕРЛЕ В ПРОСТОРАХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ

Одержано достатні умови базисності систем Пінкерле в просторах послідовностей, що наділені нормальною топологією Кете.

Sufficient conditions basis of Pincerle systems in space of sequences which to allotment topology of Kete is obtained.

Система функцій вигляду

$$\{z^n(1+\varphi_n(z)) : n = 0, 1, ...\}, \qquad (1)$$

де $\varphi_n(0) = 0, n = 0, 1, ...$ і функції $\varphi_n(z)$ є аналітичними в крузі $|z| < R$, називається системою Пінкерле. Відомо (див., наприклад, [1]) що, якщо $\varphi_n(z)$ мають спільну мажоранту $\varphi(z)$ в сенсі Пуанкаре (тобто $|\varphi_n^{(k)}(0)| \leq \varphi^{(k)}(0), k, n = 0, 1, ...$),яка належить простору A_R і для якої $\varphi(r) < 1$ для кожного $r, 0 < r < R$, то система (1) утворює базис (квазістепеневий !) у просторі A_R.

За аналогією систему послідовностей

$$\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}, (\psi_n)_i = \begin{cases} 0, i < n, \\ 1, i = n, \\ a_{i-n}^{(n)}, i > n, \end{cases} \qquad (2)$$

де $a_k^{(n)}, n = 0, 1, ..., k = 1, 2, ...$ – деякі комплексні числа, будемо називати системою Пінкерле.

Нехай E - векторний простір послідовностей комплексних чисел, що містить простір усіх фінітних послідовностей, а E^α – простір взаємний за Кете до простору E, тобто

$$E^\alpha = \{v : p_v(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |x_k v_k| < +\infty,$$
$$\forall x = (x_k) \in E\}.$$

Нормальна топологія ν на E визначається набором переднорм $\{p_v : v \in E^\alpha\}$. Простір E називається досконалим, якщо $(E^\alpha)^\alpha = E$. Простір (E, ν) – повний тоді і тільки тоді, коли E – досконалий. Система ортів $\{e_n; n \geq 0\}$, де $e_n = (\delta_{kn})_{k=0}^{\infty}$, а δ_{kn} – символ Кронекера, утворює абсолютний базис у просторі (E, ν). Базис $\{x_n\}$ простору (E, ν) називається еквівалентним до базису $\{e_n\}$, якщо існує ізоморфізм L простору (E, ν) такий, що $Le_n = y_n, n = 0, 1, ...$ Припустимо, що система Пінкерле (2) складається з послідовностей $\psi_n, n = 0, 1, ...$, які належать простору E. Нехай для послідовності $x = (x_n) \in E$ існує послідовність комплексних чисел c_n така, що

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n, \qquad (3)$$

причому ряд (3) збігається в E за топологією ν. З рівності (3) і того, що функціонали $\delta_i(x) = x_i, i = 0, 1, ...$ – неперервні в (E, ν) випливає, що

$$c_m + \sum_{n=0}^{m-1} c_n a_{m-n}^{(n)} = x_m, m \geq 0. \qquad (4)$$

Оскільки система лінійних рівнянь (4) відносно невідомих $c_m, m = 0, 1, ...$ має трикутний вигляд, то вона завжди має єдиний розв'язок. Тому, якщо для елемента $x = (x_n) \in E$ розклад (4) є правильним в (E, ν), то він єдиний.

Знайдемо умови, при яких розклад вигляду (3) буде правильним для довільного елемента $x \in E$. Для цього нам буде потрібна наступна лема.

Лема. *Нехай $a_i (i = 1, 2, ...)$ – такі не-*

від'ємні числа, що

$$|a_i^{(n)}| \le a_i, n = 0, 1, ..., i = 1, 2, ... \qquad (5)$$

Тоді, якщо $(\overline{c_m})$ *– розв'язок системи*

$$c_m - \sum_{n=0}^{m-1} c_n a_{m-n} = |x_m|, m \ge 0. \qquad (6)$$

і $(\overline{\overline{c_m}})$ *– розв'язок системи (4), то*

$$|\overline{\overline{c_m}}| \le \overline{c_m}, m = 0, 1, ...$$

Доведення. Маємо $|\overline{\overline{c_0}}| = \overline{c_0} = |x_0|$. Допустимо, що нерівності $|\overline{\overline{c_i}}| \le \overline{c_i}$ виконуються при $i = 0, 1, ...m-1$. Тоді

$$|\overline{\overline{c_m}}| \le |x_m| + \sum_{n=0}^{m-1} |\overline{\overline{c_n}}||a_{m-n}^{(n)}|$$

$$\le |x_m| + \sum_{n=0}^{m-1} \overline{c_n} a_{m-n} = \overline{c_m}.$$

Таким чином, справді $|\overline{\overline{c_m}}| \le \overline{c_m}$ при $m = 0, 1, ...$

Теорема. *Нехай E – досконалий векторний простір послідовностей комплексних чисел. Тоді якщо система*

$$\{\varphi_n\}_{n=0}^{\infty}, (\varphi_n)_i = \begin{cases} 0, i < n, \\ 1, i = n, \\ -a_{i-n}, i > n \end{cases} \qquad (7)$$

елементів з E утворює базис в просторі (E, ν), що еквівалентний до базису з ортів $\{e_n\}$, числа $a_m, m = 1, 2, ...$ – невід'ємні і виконуються нерівності (5), то система (2) утворює базис в просторі (E, ν).

Доведення. Оскільки простір E досконалий, то він нормальний. Тому з нерівностей (5) і умов теореми випливає, що елементи системи (2) належать до простору E

Зафіксуємо довільний елемент $x = (x_n) \in E$. Нехай $(\overline{\overline{c_m}})$ – розв'язок відповідної системи (4). Простір E нормальний, тому послідовність $|x| = (|x_n|) \in E$. Оскільки система (7) утворює базис в просторі (E, ν), то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\varphi_n$ (тут $(\overline{c_n})$ – розв'язок відповідної системи (6)) збігається в просторі (E, ν) до елемента $|x|$. З леми випливає, що $|\overline{\overline{c_m}}| \le \overline{c_m}$, при $m = 0, 1, ...$ Покажемо, що ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{\overline{c_n}}\psi_n$ збігається у просторі (E, ν). Із збіжності в (E, ν) ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\varphi_n$ випливає, що

$$p_v(\sum_{n=k}^{p} \overline{c_n}\varphi_n) \underset{k,p\to\infty}{\to} 0, \forall v \in E^{\alpha}.$$

Для кожного $v \in E^{\alpha}$ виконуються нерівності

$$p_v(\sum_{n=k}^{p} \overline{\overline{c_n}}\psi_n) \le \sum_{n=k}^{p} |\overline{\overline{c_n}}| p_v(\psi_n) \le$$

$$\le \sum_{n=k}^{p} \overline{c_n} p_v(\varphi_n) \le$$

$$\le p_v(\sum_{n=k}^{p} \overline{c_n}\varphi_n) + 2\sum_{n=k}^{p} \overline{c_n}|v_n|.$$

Із цих нерівностей і збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{c_n} e_n$ в (E, ν) випливає, що

$$p_v(\sum_{n=k}^{p} \overline{\overline{c_n}}\psi_n) \underset{k,p\to\infty}{\to} 0, \forall v \in E^{\alpha}.$$

Тому ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{\overline{c_n}}\psi_n$ збігається в (E, ν), оскільки простір (E, ν) – повний. Рівність $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{\overline{c_n}}\psi_n = x$ випливає із способу визначення чисел $\overline{\overline{c_n}}, n = 0, 1, ...$ і того, що нормальна топологія мажорує топологію покоординатної збіжності. Єдиність розкладу елемента x в ряд виду (3) відзначалася раніше.

Зауваження 1. *Із доведення теореми випливає, що якщо в просторі (E, ν) діє теорема Банаха про обернений оператор, тому система $\{\psi_n\}$ утворює в (E, ν) базис, еквівалентний до базису з ортів.*

Зауваження 2. *Теорема залишиться правильною, якщо умову того, що $\{\varphi_n\}$ утворює базис, еквівалентний до $\{e_n\}$, замінити наступною: із збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \overline{c_n}\varphi_n$ випливає, що $(\overline{c_n}) \in E$. Остання* *умова виконуеться, наприклад, якщо $\{\varphi_n\}$ – абсолютний базис в (E,ν).*

Зауваження 3. *Із збіжності ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\overline{c_n}\varphi_n$ в (E,ν) випливае, що*

$$\forall v=\{v_n\}\in E^{\alpha}:\overline{c_n}v_n\underset{n\to\infty}{\to}0,$$

звідки одержуемо, що

$$\forall v=\{v_n\}\in E^{\alpha}\exists M>0:$$
$$|\overline{c_n}||v_n|\le M, n\ge 0, \tag{8}$$

.

Для більшості конкретних просторів послідовностей з умови (8) випливає, що $\{\overline{c_n}\}\in E$. Нехай, наприклад, простір E такий, що

$$\forall\{v_n\}\in E^{\alpha}\exists\{w_n\}\in E^{\alpha}:$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|v_n|}{|w_n|}<+\infty. \tag{9}$$

З умов(8) і (9) і умови досконалості простору E випливає, що $(\overline{c_n})\in E$. Умова ж (9) виконується, наприклад, для всіх просторів, що входять до класифікації (див. [2]).

Тому для просторів E, взаємні до яких володіють властивістю (9), теорема буде правильною, якщо вимагати, щоб система $\{\varphi_n\}$ утворювала базис у просторі (E,ν).

Для застосування доведеної теореми до конкретних просторів послідовностей потрібно знати умови базисності системи Пінкерле вигляду (7).

Розглянемо довільну систему (7) і припустимо, що $a=\varphi_0$. Тоді $\varphi_n=e_n\times a$, де множення (згортка) $x\times y$ послідовностей $x=(x_n)$ та $y=(y_n)$ визначається за правилом

$$(x\times y)_n=\sum_{k=0}^{n}x_ky_{n-k}.$$

Таким чином, система (7) утворює в (E,ν) базис, еквівалентний до $\{e_n\}$, тоді і тільки тоді, коли оператор множення

$$Ax=a\times x, x\in E \tag{10}$$

(тут $a=\varphi_0$) є ізоморфізмом простору (E,ν). Умови (необхідні та достатні), при яких оператор множення (10) є ізоморфізмом в тих чи інших просторах послідовностей, вивчені досить добре у працях Ю.Ф.Коробейніка та його учнів (див., наприклад, [3]-[6]). Використовуючи ці твердження, легко одержати конкретизації теореми для різних просторів послідовностей (чи ізоморфних до них просторів аналітичних функцій).

Так, наприклад, якщо для системи (1) виконуються сформульовані у вступі умови, то оператор множення, який набуває у просторі A_R вигляду $(Af)(z)=(1-\varphi(z))f(z)$, є ізоморфізмом простору A_R, оскільки $1-\varphi(z)\ne 0$ при $|z|<R$. Таким чином, із доведеної теореми, як наслідок, ми одержуємо сформульовану раніше теорему Пінкерле.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Boas R.P.* General expansion theorems// Proc. Acad. sci.,USA.— 1940.— **26**.— C.139—149.

2. *Коробейник Ю.Ф.* О некоторых характеристических свойствах дифференциальных операторов бесконечного порядка// Изв.АН СССР. Сер. матем.— 1966.— **30**, N 5.— C.993—1016.

3. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы обобщенного дифференцирования в пространствах последовательностей // Изв. СКНЦВШ. Естественные науки.— 1976.— N. 3.— C.3—8.

4. *Коробейник Ю.Ф.* Операторные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэфициентами // Сиб. матем. журн.— 1976.— **17**, N 3.— C.571—583.

5. *Коробейник Ю.Ф.,Кирютенко Ю.А.* Операторы, коммутирующие с оператором обобщенного интегрирования // Дифференциальные и интегральные уравнения: Сб. научн. работ.— 1979.— C.101—107.

6. *Коробейник Ю.Ф.* Операторы сбвига на числовых семействах.— Ростов-на-Дону, 1983.— 154 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2002