УДК 517.936

©2002 р. **Б.О. Коваль**

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

АБСОЛЮТНА СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПФАФФА ІЗ ЗАГАЮВАННЯМИ ЗА ОДНІЄЮ ІЗ ЗМІННИХ

Знайдено умови абсолютної (за загаюваннями) асимптотичної стійкості розв'язків лінійних систем диференціальних рівнянь Пфаффа зі сталими загаюваннями за однією із змінних.

The conditions of absolute asymptotic behaviour of the solutions are obtained for the system of linear differential Pfaff equations with constant delay on the one of the variables.

1. Постановка задачі. Розглядається система диференціальних рівнянь Пфаффа з одним сталим загаюванням $\Delta > 0$

$$dx(t_1,t_2) = [a_1 x(t_1,t_2)+$$

$$+b_1 x(t_1-\Delta,t_2)]dt_1 + a_2 x(t_1,t_2)dt_2, \qquad (1)$$

де $(t_1,t_2) \in T \equiv R_+ \times R_+$, a_1, a_2, b_1 — сталі $n \times n$ матриці, $x \in R^n$, з початковою функцією

$$x(t_1,t_2) = e^{a_2 t_2}\psi(t_1),$$

$$t_1 \in [-\Delta, 0], \quad t_2 \in R_+, \qquad (2)$$

де $\psi(t_1) = 0$ при $t_1 \in [-\Delta, 0)$ і $\psi(0) = \varphi_0$, $\varphi_0 \in R^n$; та система з декількома сталими загаюваннями $\Delta_1 > \Delta_2 > ... > \Delta_m > 0$:

$$dx(t_1,t_2) = [a_1 x(t_1,t_2)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m} b_i x(t_1-\Delta_i,t_2)]dt_1 + a_2 x(t_1,t_2)dt_2, \quad (3)$$

$(t_1,t_2) \in T$, $a_1, a_2, b_1, ..., b_m$ — сталі матриці $n \times n$. Вважатимемо (2) початковою функцією для рівнянь (3).

Надалі вважатимемо, що початкові задачі (1), (2) і (3), (2) є цілком розв'язними, що має місце, коли матриці $a_1, b_1, ..., b_m$ є комутативними з матрицею a_2 і при початковій функції вигляду (2) [1].

Розв'язок систем рівнянь (1), (2) і (3), (2) у поточний момент (t_1,t_2) при початкових умовах $t_1 = t_2 = 0$, φ_0 позначимо через $x(t_1,t_2;\varphi_0)$ (для скорочення запису надалі використовуються й позначення $x(t_1,t_2)$ та x).

Означення 1. *Розв'язок $x = 0$ систем рівнянь (1), (2) і (3), (2) стійкий за Ляпуновим, якщо для довільного $\mu > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що з умови $|\varphi_0| < \delta$ випливає $|x(t_1,t_2;\varphi_0)| < \mu$.*

Означення 2. *Тривіальний розв'язок $x = 0$ систем рівнянь (1), (2) і (3), (2) асимптотично стійкий за Ляпуновим, якщо він є стійким за означенням 1 і для всіх початкових значень φ_0, що задовольняють нерівність $|\varphi_0| < \delta$, володіє властивістю*

$$\lim_{t_1+t_2\to\infty} |x(t_1,t_2;\varphi_0)| = 0.$$

Означення 3. *Розв'язок $x = 0$ системи рівнянь (1), (2) (або (3), (2)) абсолютно (за загаюванням) асимптотично стійкий, якщо він є асимптотично стійким за означенням 2 при довільних сталих загаюваннях $\Delta \geq 0$ (або $\Delta_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$).*

Вивчення стійкості проводитимемо за другим методом Ляпунова. Для цього узагальнимо на рівняння Пфаффа із загаюваннями за однією змінною теорему про асимптотичну стійкість тривіального розв'язку відповідних рівнянь Пфаффа без загаювань, яка наведена в праці [2].

Розглянемо рівняння

$$dx(t_1,t_2) = A_1(x(t_1,t_2), x(t_1-\Delta,t_2))dt_1+$$

$$+A_2(x(t_1,t_2))dt_2, \qquad (4)$$

де A_1 неперервна функція в деякій області $D \times D \to R^n$, $D \subset R^n$, A_2 неперервна функція в $D \to R^n$. Нехай D містить точку 0 разом з деяким її околом, причому $A_1(0,0) = 0$; $A_2(0) = 0$, $\Delta = \mathrm{const} > 0$. Нехай початкова функція набуває вигляду, подібного до (2):

$$x(t_1, t_2) =$$

$$= \begin{cases} \varphi_0(0, t_2), & t_1 = 0, t_2 \in R_+, \\ 0, & t_1 < 0, t_2 \in R_+. \end{cases} \tag{5}$$

Припустимо, що початкова задача (4), (5) цілком розв'язна, що матиме місце при виконанні умов [1]:

$$\frac{\partial A_1(x,0)}{\partial x} \cdot A_2(x) = \frac{dA_2(x)}{dx} \cdot A_1(x,0),$$

$$t_1 \in [0, \Delta), \quad t_2 \in R_+;$$

$$\frac{\partial A_1(x, \varphi_0(0,t_2))}{\partial x} \cdot A_2(x) +$$

$$+ \frac{\partial A_1(x, \varphi_0(0,t_2))}{\partial \varphi_0(0,t_2)} \cdot \frac{\partial \varphi_0(0,t_2)}{\partial t_2} =$$

$$= \frac{dA_2(x)}{dx} \cdot A_1(x, \varphi_0(0,t_2)),$$

$$t_1 = \Delta, t_2 \in R_+;$$

$$\frac{\partial A_1(x, x_\Delta)}{\partial x} \cdot A_2(x) + \frac{\partial A_1(x, x_\Delta)}{\partial x_\Delta} \cdot A_2(x_\Delta) =$$

$$= \frac{dA_2(x)}{dx} \cdot A_1(x, x_\Delta),$$

$$t_1 > \Delta, t_2 \in R_+.$$

Тут $x_\Delta \equiv x(t_1 - \Delta, t_2)$.

Розглянемо функціонал $V(x(t_1 + \theta, t_2))$, $\theta \in [-\Delta, 0]$, який неперервний в області D, $V(0) = 0$.

Означення 4. *Функціонал $V(x(t_1+\theta, t_2))$ назвемо додатно визначеним (позначатимемо $V > 0$), якщо існує неперервна функція $f(r)$ така, що $f(r) > 0$ при $r \neq 0$ і $V(x(t_1 + \theta, t_2)) \geq f(\|x(t_1 + \theta, t_2)\|)$, де $\|x(t_1 + \theta, t_2)\| \equiv \sup\limits_{-\Delta \leq \theta \leq 0} |x(t_1 + \theta, t_2)|$.*

Аналогічно визначається і від'ємно визначений функціонал.

Теорема 1. *Нехай існує додатно визначений функціонал $V > 0$, який задовольняє умови:*

1) перетворюється на нуль тільки на множині, що не містить від'ємних частин траєкторій;

2)

$$\frac{\overline{DV}}{Dt_1} = \lim_{h_1 \to +0} \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} (V(x(t_1 + \theta + h_1, t_2)) -$$

$$- V(x(t_1 + \theta, t_2))) \cdot h_1^{-1} \leq 0;$$

3)

$$\frac{\overline{DV}}{Dt_2} = \lim_{h_2 \to +0} \sup_{-\Delta \leq \theta \leq 0} (V(x(t_1 + \theta, t_2 + h_2)) -$$

$$- V(x(t_1 + \theta, t_2))) \cdot h_2^{-1} \leq 0;$$

4) цілі траєкторії, виключаючи $x = 0$, не задовольняють хоча б одне з рівнянь $\frac{\overline{DV}}{Dt_1} = 0, \frac{\overline{DV}}{Dt_2} = 0$.

Тоді розв'язок $x = 0$ задачі (4), (5) є асимптотично стійким.

Доведення теореми 1 аналогічне доведенню теореми 1 роботи [2] для відповідних рівнянь Пфаффа без загаювань і тому його тут не наводимо.

Зауваження 1 [2]. *Якщо функціонал V має неперервні частинні похідні, то замість $\frac{\overline{DV}}{Dt_i}$ можна розглядати $\dot{V}_i (i = 1, 2)$ — похідні за i-ою змінною вздовж інтегральних поверхонь системи (4). Якщо надалі позначити через M множину, на якій $V = 0$, а через $\bar{M}$ — множину, на якій $\dot{V}_i = 0 (i = 1, 2)$, то останню умову теореми 1 можна сформулювати так: 4) множина $\bar{M} \setminus M$ не містить цілих траєкторій, крім положення рівноваги.*

2. Стійкість розв'язків систем рівнянь Пфаффа з одним сталим загаюванням. Тут будемо розглядати початкову задачу (1), (2). Позначимо через $\lambda_i(a_1)$, $i = \overline{1, n}$, власні значення матриці a_1; $0_{2n \times 2n}$ — нульову матрицю розмірності $2n \times 2n$; $H > 0_{n \times n}$ — додатно визначену матрицю

H розмірності $n \times n$, а від'ємно визначену матрицю $H < 0_{n\times n}$; E — одиничну матрицю. Матрицю a_1 будемо вважати експоненціально стійкою з показником $\beta > 0$ експоненціальної стійкості, тобто такою, що $\max_i(\operatorname{Re}\lambda_i(a_1)) < -\beta$.

Теорема 2. *Тривіальний розв'язок початкової задачі (1), (2) абсолютно (за загаюваннями) асимптотично стійкий, якщо виконуються умови:*

1) матриця a_1 експоненціально стійка з деяким показником експоненти $\beta > 0$ і матриця $a_1 + b_1$ гурвіцева;

2) має місце матрична нерівність

$$\begin{bmatrix} -G & H_0 b_1 \\ b_1^T H_0 & -\gamma H_0 \end{bmatrix} \le 0_{2n\times 2n}, \tag{6}$$

де $H_0 > 0_{n\times n}$ — розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$\left(a_1 + \frac{1}{2}\gamma E\right)^T H_0 + +H_0\left(a_1 + \frac{1}{2}\gamma E\right) = -G, \tag{7}$$

в якому $\forall\, G = G^T > 0_{n\times n}$, $\gamma > 0$ — деяке число таке, що $0 < \gamma < 2\beta$, $(\gamma \to 2\beta)$;

3) матриця a_2 експоненціально стійка, а матриця $a_2^T H_0 + H_0 a_2 \le 0_{n\times n}$.

Доведення. Проведемо доведення за допомогою функціонала [3]

$$V(x(t_1+\theta, t_2)) = x^T(t_1,t_2)H_0x(t_1,t_2) + +\gamma\int\limits_{t_1-\Delta}^{t_1} x^T(\theta,t_2)H_0x(\theta,t_2)d\theta, \tag{8}$$

де поки невідомі $H_0 = H_0^T > 0_{n\times n}$ і коефіцієнт $\gamma > 0$ необхідно надалі визначити. Згідно з теоремою 1 і зауваженням 1, знайдемо похідні за t_1, t_2 функціонала (8) на розв'язках системи (1), тобто $\dot V_i = \dfrac{\partial V}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t_i}$, $i = 1, 2$.

$$\dot V_1(x(t_1+\theta,t_2))|_{(1)} = = [a_1x(t_1,t_2) + b_1x(t_1-\Delta,t_2)]^T H_0x(t_1,t_2) + +x^T(t_1,t_2)H_0[a_1x(t_1,t_2) + b_1x(t_1-\Delta,t_2)] + +\gamma[x^T(t_1,t_2)H_0x(t_1,t_2) - -x^T(t_1-\Delta,t_2)H_0x(t_1-\Delta,t_2)], \tag{9}$$

$$\dot V_2(x(t_1+\theta,t_2))|_{(1)} = = [a_2x(t_1,t_2)]^T H_0x(t_1,t_2) + +x^T(t_1,t_2)H_0[a_2x(t_1,t_2)] + +\gamma\int\limits_{t_1-\Delta}^{t_1}\{[a_2x(\theta,t_2)]^T H_0x(\theta,t_2)\times \times H_0[a_2x(\theta,t_2)]\}d\theta. \tag{10}$$

Праву частину рівності (9) можна розглядати як квадратичну форму змінних $x(t_1,t_2)$, $x(t_1-\Delta,t_2)$. Тоді (9) можна записати в такому матричному вигляді:

$$\dot V_1(x(t_1+\theta,t_2))|_{(1)} = \begin{bmatrix} x(t_1,t_2) \\ x(t_1-\Delta,t_2)\end{bmatrix}^T \times \times\begin{bmatrix} a_1^TH_0 + H_0a_1 + \gamma H_0 & H_0b_1 \\ b_1^TH_0 & -\gamma H_0\end{bmatrix} \times \times\begin{bmatrix} x(t_1,t_2) \\ x(t_1-\Delta,t_2)\end{bmatrix}, \tag{11}$$

а (10) матиме вигляд

$$\dot V_2(x(t_1+\theta,t_2))|_{(1)} = = x^T(t_1,t_2)[a_2^TH_0 + H_0a_2]x(t_1,t_2) + +\gamma\int\limits_{t_1-\Delta}^{t_1} x^T(\theta,t_2)[a_2^TH_0 + H_0a_2]x(\theta,t_2)d\theta. \tag{12}$$

$\dot V_1$ на розв'язках системи (1) від'ємна тільки в тому випадку, коли квадратична форма в (11) є від'ємно визначеною, тобто $a_1^TH_0 + H_0a_1 + \gamma H_0 < 0_{n\times n}$ та

$$\begin{bmatrix} a_1^TH_0 + H_0a_1 + \gamma H_0 & H_0b_1 \\ b_1^TH_0 & -\gamma H_0\end{bmatrix} \le 0_{2n\times 2n}. \tag{13}$$

Матриця $a_1^TH_0 + H_0a_1 + \gamma H_0$ від'ємно визначена тоді й тільки тоді, коли матриця H_0 знаходиться як розв'язок матричного рівняння $a_1^TH_0 + H_0a_1 + \gamma H_0 = -G$, де $\forall\, G = G^T > 0_{n\times n}$ (або з матричного рівняння Ляпунова (7)).

Очевидно, що коли матриця a_1 не є стійкою (гурвіцевою), тобто система без загаювання

$$dy(t_1,t_2) = a_1 y(t_1,t_2)dt_1 + a_2 y(t_1,t_2)dt_2,$$
$$y(0,0) = \varphi_0 \qquad (14)$$

асимптотично нестійка: $\lim\limits_{t_1\to\infty} |y(t_1,t_2)| \neq 0$ для кожного $t_2 \in R_+$, то не існує й такого числа $\gamma > 0$, при якому є розв'язок $H_0 = H_0^t > 0$ рівняння Ляпунова (7). Також очевидно, що для того, щоб існувало число $\gamma > 0$, при якому рівняння Ляпунова є розв'язним у класі додатно визначених матриць $H_0 > 0_{n\times n}$, необхідно і досить, щоб матриця a_1 була експоненціально стійкою з деяким показником $\beta > 0$. Тоді вибираємо γ з інтервалу $0 < \gamma < 2\beta$ таким чином, щоб γ було якомога ближчим до 2β ($\gamma \to 2\beta$).

Якщо припустити, що матриця a_2 нестійка, то нестійким буде розв'язок (1), (2), оскільки $\lim\limits_{t_2\to\infty} |x(t_1,t_2)| = +\infty$ для кожного $t_1 \in R_+$. Недодатна визначеність матриці $a_2^T H_0 + H_0 a_2$ приведе до $\dot{V}_2|_{(1)} \leq 0$, що завершує доведення теореми.

Поряд з системою (1) розглянемо систему без загаювання, яка одержується з (1) при $\Delta = 0$:

$$dz(t_1,t_2) = (a_1+b_1)z(t_1,t_2)dt_1 + a_2 z(t_1,t_2)dt_2,$$
$$z(0,0) = \varphi_0. \qquad (15)$$

Припустимо, що система (15) асимптотично стійка за Ляпуновим, тобто що матриці a_1+b_1 і a_2 є гурвіцевими. Тоді існує єдиний розв'язок $H_0 = H_0^T > 0_{n\times n}$ матричного рівняння Ляпунова

$$(a_1+b_1)^T H_0 + H_0(a_1+b_1) = -G, \qquad (16)$$

де $\forall\, G = G^T > 0_{n\times n}$.

Теорема 3. *Розв'язок $x = 0$ початкової задачі (1), (2) абсолютно (за загаюванням) асимптотично стійкий, якщо виконуються такі умови:*

1) матриці a_1+b_1 і a_2 гурвіцеві;

2) справджуються матричні нерівності

$$\begin{bmatrix} -G & H_0 b_1 \\ b_1^T H_0 & -H_0 \end{bmatrix} \leq 0_{2n\times 2n},$$

$$a_2^T H_0 + H_0 a_2 \leq 0_{n\times n}, \qquad (17)$$

де H_0 — розв'язок матричного рівняння Ляпунова (16).

Доведення теореми здійснюється за допомогою функціонала Ляпунова-Красовського вигляду

$$V(x(t_1+\theta,t_2)) = x^T(t_1,t_2)H_0 x(t_1,t_2) +$$
$$+ \int\limits_{t_1-\Delta}^{t_1} x^T(\theta,t_2)H_0 x(\theta,t_2)d\theta \qquad (18)$$

за стандартною для другого методу схемою, аналогічно доведенню теореми 2.

3. Системи рівнянь з декількома загаюваннями. Розглянемо тепер початкову задачу (3), (2) і встановимо для неї аналоги теорем 2 і 3.

Теорема 4. *Тривіальний розв'язок задачі (3), (2) абсолютно (за загаюваннями) асимптотично стійкий, якщо виконуються умови:*

1) матриця a_1 експоненціально стійка з деяким показником експоненти $\beta > 0$ і матриця $a_1 + \sum\limits_{i=1}^m b_i$ гурвіцева;

2) справджується матрична нерівність

$$\begin{bmatrix} -G & H_0 b_1 & H_0 b_2 & \dots & H_0 b_m \\ b_1^T H_0 & -\gamma_1 H_0 & 0_{n\times n} & \dots & 0_{n\times n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_m^T H_0 & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & \dots & -\gamma_m H_0 \end{bmatrix} \leq$$
$$\leq 0_{(m+1)\times n\times(m+1)\times n}, \qquad (19)$$

де $H_0 = H_0^T > 0_{n\times n}$ — розв'язок матричного рівняння Ляпунова

$$\left(a_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \gamma_i E\right)^T H_0 +$$
$$+ H_0\left(a_1 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \gamma_i E\right)^T = -G, \qquad (20)$$

в якому $\forall\, G = G^T > 0$ і $\gamma_i > 0$, $i = \overline{1,m}$ такі, що $0 < \sum\limits_{i=1}^m \gamma_i < 2\beta$, причому їх сума повинна бути якомога ближчою до 2β, тобто $\sum\limits_{i=1}^m \gamma_i \to 2\beta$;

3) матриця a_2 експоненціально стійка, а матриця $a_2^T H_0 + H_0 a_2 \leq 0$.

Доведення теореми проводиться за допомогою функціонала

$$V(x(t_1+\theta,t_2)) = x^T(t_1,t_2)H_0x(t_1,t_2)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\gamma_i\int\limits_{t_1-\Delta_i}^{t_1} x^T(\theta,t_2)H_0x(\theta,t_2)d\theta$$

за аналогією до доведення теореми 2 й тому тут не наводиться.

Поряд із системою (3) розглянемо систему рівнянь без загаювань, яка одержується з (3) при $\Delta_1 = \Delta_2 = ... = \Delta_m = 0$:

$$dy(t_1,t_2) = \left(a_1 + \sum_{i=1}^{m} b_i\right) y(t_1,t_2)dt_1 +$$

$$+a_2 y(t_1,t_2)dt_2, \quad y(0,0) = \varphi_0. \qquad (21)$$

Припустимо, що система без загаювань (21) асимптотично стійка за Ляпуновим, тобто що матриці $a_1 + \sum_{i=1}^{m} b_i$ та a_2 є гурвіцевими. Тоді існує єдиний розв'язок $H_0 = H_0^T > 0_{n\times n}$ матричного рівняння Ляпунова

$$\left(a_1 + \sum_{i=1}^{m} b_i\right)^T H_0 + H_0\left(a_1 + \sum_{i=1}^{m} b_i\right) = -G, \qquad (22)$$

де $\forall G = G^T > 0_{n\times n}$. Отже, для системи (3) можна розглянути квадратичний функціонал вигляду

$$V(x(t_1+\theta,t_2)) = x^T(t_1,t_2)H_0x(t_1,t_2)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{t_1-\Delta_i}^{t_1} x^T(\theta,t_2)H_0x(\theta,t_2)d\theta. \qquad (23)$$

Використовуючи функціонал (23), неважко одержати таке твердження.

Теорема 5. *Розв'язок $x = 0$ системи рівнянь (3) абсолютно (за загаюваннями) асимптотично стійкий, якщо виконуються умови:*

1) матриці $a_1 + \sum_{i=1}^{m} b_i$ та a_2 є гурвіцевими;

2) справджуються матричні нерівності

$$\begin{bmatrix} Q & H_0b_1 & H_0b_2 & ... & H_0b_m \\ b_1^T H_0 & -H_0 & 0_{n\times n} & ... & 0_{n\times n} \\ b_2^T H_0 & 0_{n\times n} & -H_0 & ... & 0_{n\times n} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ b_m^T H_0 & 0_{n\times n} & 0_{n\times n} & ... & -H_0 \end{bmatrix} \leq$$

$$\leq 0_{(m+1)\times n\times(m+1)\times n}, \quad a_2^T H_0 + H_0 a_2 \leq 0_{n\times n},$$

де $Q = a_1^T H_0 + H_0 a_1 + mH_0$ і $H_0 = H_0^T > 0$ — розв'язок матричного рівняння Ляпунова (22).

Модельна задача. Розглянемо скалярне рівняння $dx(t_1,t_2) = [-x(t_1,t_2) - x(t_1 - \Delta, t_2)]dt_1 - 0,1x(t_1,t_2)dt_2, (t_1,t_2) \in T$. Покажемо за допомогою теореми 2, що тривіальний розв'язок цього рівняння абсолютно асимптотично стійкий. Очевидно, що умова 1 теореми 2 справджується: $a_1 = -1$ і $a_1 + b_1 = -2$ — від'ємні числа, $\beta = 1$.

При $G = 1$ рівняння Ляпунова (7) набуває вигляду $2\left(-1+\frac{\gamma}{2}\right)H_0 = -1$, звідки $H_0 = \frac{1}{2-\gamma}$. При $\gamma < 2$ розв'язок $H_0 > 0$ рівняння Ляпунова існує. Виберемо $\gamma = 1$, тоді $H_0 = 1$. Матриця (6) в умові 2 теореми 2 набуває вигляду $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$. Легко бачити, що ця матриця недодатно визначена, як цього й вимагає умова 2 теореми 2.

Оскільки $a_2 = -0,1$ і $a_2^T H_0 + H_0 a_2 = -0,2$, то й остання умова теореми 2 виконується.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Коваль Б.О.* Цілком розв'язність початкової задачі для диференціальних рівнянь Пфаффа зі сталими загаюваннями однієї змінної // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр.— Чернівці: Прут, 2001.— Вип. 7.— С.81—86.

2. *Грудо Э.И., Янчук Л.Ф.* К асимптотической устойчивости положения равновесия систем Пфаффа // Дифференц. уравнения.— 1979.— **15**, N 10.— С.1891—1893.

3. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость решений детерминированных и стохастических дифференциально-разностных уравнений.— К.: Наук. думка, 1992.— 148 с.

Стаття надійшла до редколегії 17.06.2002