УДК 517.929

©2002 р. І.І. Клевчук

Київський національний університет ім. Тараса Шевченка, Київ

ЗАСТОСУВАННЯ АСИМПТОТИЧНИХ МЕТОДІВ ДО РЕГУЛЯРНО І СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ

Розглядається система сингулярно збурених диференціально-різницевих рівнянь. Одержано зображення інтегрального многовиду цієї системи. Друге наближення в методі усереднення застосовується до вивчення стійкості системи слабко зв'язаних осциляторів із запізненням.

We consider a singularly perturbed system of difference-differential equations. We obtain a representation of an integral manifold of this system. A second approximation of averaging method is applied for studying of stability of a system of weakly coupled oscillators with time delay.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta))+$$

$$+\varepsilon h(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)),$$

$$\varepsilon\frac{dy}{dt} = G(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta))+$$

$$+\varepsilon P(t, x(t), y(t), y(t-\varepsilon\Delta)), \qquad (1)$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbf{R^m}$, $y \in \mathbf{R^n}$.

Припустимо, що виконуються умови

1) Для всіх $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R^m}$ рівняння $G(t, x, y, y) = 0$ має ізольований розв'язок $y = \varphi(t, x)$, причому функція $\varphi(t, x)$ та її похідні за t і x до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені.

2) Функції $f(t, x, y, z)$, $h(t, x, y, z)$, $G(t, x, y, z)$, $P(t, x, y, z)$ та їх частинні похідні за t, x, y, z до другого порядку включно рівномірно неперервні й обмежені при $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R^m}$, $|y - \varphi(t, x)| \le \rho$, $|z - \varphi(t, x)| \le \rho$.

Лінеаризуючи функцію $G(t, x, y, z)$ в точці $y = \varphi(t, x)$, $z = \varphi(t, x)$ відносно y, z, одержимо

$$G(t, x, \varphi(t, x) + y, \varphi(t, x) + z) = B_1(t, x)y+$$

$$+B_2(t, x)z + G_1(t, x, y, z),$$

причому при досить малому ρ для $|y| \le \rho$, $|z| \le \rho$ правильна нерівність

$$|G_1(t, x, y, z)| \le K(|y|^2 + |z|^2), \quad K > 0.$$

Нехай виконується умова:

3) всі корені характеристичного рівняння

$$det(B_1(t, x) + B_2(t, x)\exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$$

лежать у півплощині $Re\lambda \le -2\alpha < 0$.

Для регулярно збурених диференціально-функціональних рівнянь існування інтегральних многовидів доведено в [1], а для сингулярно збурених – в [2] та ін. Згідно з [2], при деякому $\varepsilon_0 > 0$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ існує інтегральний многовид системи (1), що може бути поданий у вигляді $y_t = \varphi(t, x) + \xi(t, x, \varepsilon)$, де $\xi(t, x, 0) = 0$. У праці [3] одержано зображення інтегрального многовиду лінійної системи. У цій статті одержано наближене зображення інтегрального многовиду нелінійної сингулярно збуреної системи більш загального вигляду, ніж в [3, 4].

Теорема 1. *Нехай для системи (1) виконуються умови 1 – 3. Тоді інтегральний многовид системи (1) можна зобразити у вигляді* $y_t = \varphi(t, x) + g(t, x, \varepsilon) + O(\varepsilon^2)$, *де*

$$g(t, x, \varepsilon) = \varepsilon[B_1(t, x) + B_2(t, x)]^{-1}[(E + \Delta\times$$

$$\times B_2(t, x))(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t, x, \varphi(t, x), \varphi(t, x)))-$$

$$-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))]+\theta[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+$$
$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))],\quad -\varepsilon\Delta\le\theta\le 0.$$

Доведення. Інтегральний многовид системи (1) будемо шукати у вигляді $y(t)=\varphi(t,x(t))+\varepsilon\psi(t,x(t))+O(\varepsilon^2)$, де $\psi(t,x)$ – функція, яку ми визначимо пізніше. Тоді

$$y(t+\theta)=\varphi(t+\theta,x(t+\theta))+\varepsilon\psi(t,x)+O(\varepsilon^2)=$$
$$=\varphi(t+\theta,x+\theta\frac{dx}{dt})+\varepsilon\psi(t,x)+O(\varepsilon^2)=$$
$$=\varphi(t,x)+\theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}+\theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\varepsilon\psi(t,x)+$$
$$+O(\varepsilon^2)=\varphi(t,x)+\theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial t}+\theta\frac{\partial\varphi(t,x)}{\partial x}\times$$
$$\times f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))+\varepsilon\psi(t,x)+O(\varepsilon^2).$$

Звідси

$$y(t-\varepsilon\Delta)=\varphi(t,x)-\varepsilon\Delta\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\right.$$
$$\left.\times f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right]+\varepsilon\psi(t,x)+O(\varepsilon^2).$$

Тому

$$G(t,x,y(t),y(t-\varepsilon\Delta))=G(t,\varphi(t,x)+\varepsilon\psi(t,x),$$
$$\varphi(t,x)-\varepsilon\Delta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)+\varepsilon\psi(t,x))+O(\varepsilon^2)=\varepsilon B_1(t,x)\psi(t,x)+$$
$$+\varepsilon B_2(t,x)\psi(t,x)-\varepsilon\Delta B_2(t,x)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times\right.$$
$$\left.\times f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right)+O(\varepsilon^2).$$

Крім того

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d\varphi(t,x)}{dt}+O(\varepsilon)=\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times$$
$$\times f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))+O(\varepsilon).$$

Підставляючи знайдені вирази в систему (1) і зберігаючи тільки члени порядку ε, одержимо

$$\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))=\varepsilon B_1(t,x)\times$$
$$\times\psi(t,x)+\varepsilon B_2(t,x)\psi(t,x)-\varepsilon\Delta B_2(t,x)\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right)+$$
$$+\varepsilon P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)),$$

звідки

$$[B_1(t,x)+B_2(t,x)]\psi(t,x)=(E+\Delta B_2(t,x))\times$$
$$\times\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right)-$$
$$-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)),$$

або

$$\psi(t,x)=(B_1(t,x)+B_2(t,x))^{-1}\left[(E+\Delta\times\right.$$
$$\times B_2(t,x))\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right)-$$
$$\left.-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))\right].$$

Звідси знаходимо шуканий вираз

$$g(t,x,\varepsilon)=\varepsilon[B_1(t,x)+B_2(t,x)]^{-1}[(E+\Delta\times$$
$$\times B_2(t,x))(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)))-$$
$$-P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))]+\theta[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times$$
$$\times f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))],\quad -\varepsilon\Delta\le\theta\le 0.$$

Тому інтегральний многовид системи (1) можна зобразити у вигляді

$$y_t=\varphi(t,x)+g(t,x,\varepsilon)+O(\varepsilon^2).$$

Теорема доведена.

Позначимо

$$\eta(t,x)=\frac{1}{\varepsilon}g(t,x,\varepsilon)|_{\theta=-\varepsilon\Delta}=[B_1(t,x)+$$
$$+B_2(t,x)]^{-1}[(E-\Delta B_1(t,x))(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\times$$
$$\times f(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x)))-$$
$$P(t,x,\varphi(t,x),\varphi(t,x))].$$

Тоді рівняння на многовиді системи (1) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, \varphi(t,x) + \varepsilon\psi(t,x), \varphi(t,x) +$$

$$+\varepsilon\eta(t,x)) + \varepsilon h(t, x, \varphi(t,x), \varphi(t,x)) + O(\varepsilon^2).$$

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X(t, x, x(t-\Delta)), \tag{2}$$

де ε – малий додатний параметр, $x \in \mathbf{R^n}$, функція $X(t,x,y)$ тричі неперервно диференційовна за всіма змінними.

Нехай

$$X(t,x,x) = \sum_{\nu} e^{i\nu t} X_\nu(x).$$

Тоді усереднена система для (2) набуде вигляду

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon X_0(x),$$

де $X_0(x)$ – середнє значення функції $X(t,x,x)$, $X_0(x) = M\{X(t,x,x)\}$. У статті Хейла [5] доведено узагальнення другої теореми Боголюбова про усереднення для системи вигляду (2). У цій статті побудуємо друге наближення в методі усереднення для системи (2) і застосуємо його для дослідження стійкості розв'язків лінійної системи.

У системі (2) зробимо заміну $x = \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi)$, де

$$\tilde{X}(t,\xi) = \sum_{\nu \neq 0} \frac{e^{i\nu t}}{i\nu} X_\nu(\xi).$$

Враховуючи, що

$$\frac{\partial \tilde{X}(t,x)}{\partial t} = X(t,x,x) - X_0(x),$$

одержимо систему

$$\frac{d\xi}{dt} + \varepsilon X(t,\xi,\xi) - \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} =$$

$$= \varepsilon X(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi), \xi(t-\Delta) +$$

$$+\varepsilon\tilde{X}(t-\Delta, \xi(t-\Delta))). \tag{3}$$

Оскільки згідно з [5]

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + O(\varepsilon^2),$$

то

$$\xi(t-\Delta) = \xi(t) - \Delta\frac{d\xi}{dt} + O(\varepsilon^2) =$$

$$= \xi(t) - \varepsilon\Delta X_0(\xi) + O(\varepsilon^2).$$

Тому

$$X(t, \xi + \varepsilon\tilde{X}(t,\xi), \xi(t-\Delta) + \varepsilon\tilde{X}(t-\Delta, \xi(t-$$

$$-\Delta))) = X(t,\xi,\xi) + \varepsilon\frac{\partial X(t,x,\xi)}{\partial x}|_{x=\xi}\tilde{X}(t,\xi) +$$

$$+\varepsilon\frac{\partial X(t,\xi,y)}{\partial y}|_{y=\xi}[\tilde{X}(t-\Delta,\xi) - \Delta X_0(\xi)] + O(\varepsilon^2).$$

Отже, система (3) набуде вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) - \varepsilon^2\frac{\partial \tilde{X}(t,\xi)}{\partial \xi}X_0(\xi) + \varepsilon^2 \times$$

$$\times\frac{\partial X(t,x,\xi)}{\partial x}|_{x=\xi}\tilde{X}(t,\xi) + \varepsilon^2\frac{\partial X(t,\xi,y)}{\partial y}|_{y=\xi}\times$$

$$\times[\tilde{X}(t-\Delta,\xi) - \Delta X_0(\xi)] + O(\varepsilon^3). \tag{4}$$

Ми одержали систему звичайних диференціальних рівнянь, яка апроксимує систему (3) із точністю до $O(\varepsilon^3)$. Тому згідно з [6, 7], рівняння другого наближення в методі усереднення для системи (4) набудуть вигляду

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon X_0(\xi) + \varepsilon^2 M\{\frac{\partial X(t,x,\xi)}{\partial x}|_{x=\xi}\tilde{X}(t,\xi) +$$

$$+\frac{\partial X(t,\xi,y)}{\partial y}|_{y=\xi}[\tilde{X}(t-\Delta,\xi) - \Delta X_0(\xi)]\}.$$

Розглянемо систему слабко зв'язаних осциляторів із запізненням

$$y'' + L^2 y + \varepsilon P(t) y(t-h) = 0, \tag{5}$$

де ε – малий додатний параметр, $y = (y_1, ..., y_q)^T$, $L^2 = diag\{\lambda_1^2, ..., \lambda_q^2\}$, $\lambda_s > 0$, $\lambda_k \neq \lambda_s$, $k \neq s$, $h > 0$, $P(t)$ – матриця з елементами

$$P_{js}(t) = \sum_{m=1}^{n}(b_{jsm}e^{ia_m t} + \bar{b}_{jsm}e^{-ia_m t}),$$

$$b_{jsm} \in \mathbb{C}, \quad a_m \geq 0. \tag{6}$$

Стійкість розв'язків диференціально-функціональних рівнянь у критичному випадку вивчалася у [8, 9] та ін. Далі використаємо методику цих робіт і знайдемо умови стійкості системи (5) в термінах її коефіцієнтів.

Систему (5) перепишемо у вигляді

$$y_j'' = -\lambda_j^2 y_j - \varepsilon \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h).$$

Позначимо $z_j = y'/\lambda_j$, тоді одержимо систему

$$y_j' = \lambda_j z_j, \quad z_j' = -\lambda_j y_j - \frac{\varepsilon}{\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t) y_s(t-h).$$

Перейдемо до комплексних змінних $u_j = y_j + iz_j$, тоді

$$u_j' = -i\lambda_j u_j - \frac{\varepsilon i}{2\lambda_j} \sum_{s=1}^{q} P_{js}(t)(u_s(t-h)+$$

$$+\bar{u}_s(t-h)).$$

Зробивши заміну $u_j = x_j exp(-i\lambda_j t)$, одержимо систему в стандартній формі

$$x' = \varepsilon F(t) x(t-h) + \varepsilon G(t) \bar{x}(t-h), \tag{7}$$

де $x = (x_1, ..., x_q)^T$, $F(t)$ та $G(t)$ – матриці з елементами

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j - \lambda_s)t} e^{i\lambda_s h},$$

$$G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} P_{js}(t) e^{i(\lambda_j + \lambda_s)t} e^{-i\lambda_s h} \tag{8}$$

відповідно.

Підставляючи (6) у (8), одержимо

$$F_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} (b_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t} +$$

$$+\bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t}), \quad G_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{-i\lambda_s h} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{n} (b_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t} + \bar{b}_{jsm} e^{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)t}).$$

Позначимо $c_j = b_{jj1} + \bar{b}_{jj1}$.

Теорема 2. *Нехай $a_1 = 0$, $a_m > 0$ при $m \geq 2$ і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$ при $|j-s|+|m-1| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$ для всіх j, s, m. Тоді нульовий розв'язок системи (5) асимптотично стійкий, якщо $c_j sin(\lambda_j h) < 0$ при $j = 1, ..., q$, і нестійкий, якщо $c_j sin(\lambda_j h) \neq 0$ для всіх j, та існує k, для якого $c_k sin(\lambda_k h) > 0$.*

Доведення. Стійкість розв'язків системи (5) рівносильна стійкості розв'язків системи (7). При виконанні умов теореми усереднена система для системи (7) матиме вигляд $x' = \varepsilon Ax$, де $A = diag\{\gamma_1, ..., \gamma_q\}$, $\gamma_j = -iexp(i\lambda_j h)c_j/(2\lambda_j) = (c_j sin(\lambda_j h) - ic_j cos(\lambda_j h))/(2\lambda_j)$. Із теореми Хейла [5] випливає, що якщо нульовий розв'язок усередненої системи асимптотично стійкий (нестійкий), то і нульовий розв'язок системи (7) буде відповідно асимптотично стійким (нестійким). Теорема доведена.

Нехай тепер $a_m > 0$ для всіх m. Тоді перше наближення в методі усереднення не дає відповіді на питання про стійкість.

Позначимо $d_s = Re\{\delta_s\}$,

$$\delta_s = \sum_{k=1}^{q} \sum_{m=1}^{n} (\frac{b_{skm} \bar{b}_{ksm} exp(i(2\lambda_s + a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} +$$

$$+\frac{\bar{b}_{skm} b_{ksm} exp(i(2\lambda_s - a_m)h)}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}).$$

У випадку симетричної матриці $P(t)$ маємо $b_{ksm} = b_{skm}$, отже,

$$d_s = \sum_{k=1}^{q} \sum_{m=1}^{n} |b_{skm}|^2 \times$$

$$\times (\frac{sin((2\lambda_s + a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} +$$

$$+\frac{sin((2\lambda_s - a_m)h)}{(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(\lambda_s + \lambda_k - a_m)}).$$

Теорема 3. *Нехай $a_m > 0$ для всіх m і відсутній резонанс, тобто $\lambda_j - \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$ при $|j-s| + |m-k| > 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s + a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j + \lambda_s - a_m - a_k \neq 0$, $\lambda_j - \lambda_s + a_m + a_k \neq 0$ для всіх j, s, m, k. Тоді нульовий розв'язок* *системи (5) асимптотично стійкий, якщо $d_s > 0$ при $s = 1, ..., q$ і нестійкий, якщо $d_s \neq 0$ для всіх s та існує k, для якого $d_k < 0$.*

Доведення. У системі (7) зробимо заміну $x(t) = \xi(t) + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t)\bar{\xi}(t)$, де $\tilde{F}(t)$ та $\tilde{G}(t)$ – матриці з елементами

$$\tilde{F}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)} \times$$

$$\times e^{i(\lambda_j - \lambda_s + a_m)t} + \frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)} e^{i(\lambda_j - \lambda_s - a_m)t} \Big),$$

$$\tilde{G}_{js}(t) = -\frac{i}{2\lambda_j} e^{-i\lambda_s h} \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{b_{jsm}}{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)} \times$$

$$\times e^{i(\lambda_j + \lambda_s + a_m)t} + \frac{\bar{b}_{jsm}}{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)} e^{i(\lambda_j + \lambda_s - a_m)t} \Big).$$

Тоді $x(t-h) = \xi - h\xi' + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}(t) + O(\varepsilon^2) = \xi + \varepsilon\tilde{F}(t-h)\xi(t) + \varepsilon\tilde{G}(t-h)\bar{\xi}(t) + O(\varepsilon^2)$, оскільки $\xi' = O(\varepsilon^2)$.

Підставляючи в систему (7), одержимо

$$\xi' + \varepsilon F(t)\xi + \varepsilon\tilde{F}(t)\xi' + \varepsilon G(t)\bar{\xi} + \varepsilon\tilde{G}(t)\bar{\xi}' = \varepsilon F(t)\times$$

$$\times\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{G}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon G(t)\times$$

$$\times\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3),$$

або

$$\xi' = \varepsilon^2 F(t)\tilde{F}(t-h)\xi + \varepsilon^2 F(t)\tilde{G}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\times$$

$$\times\bar{\tilde{F}}(t-h)\bar{\xi} + \varepsilon^2 G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\xi + O(\varepsilon^3). \quad (9)$$

У системі (9) можна ще раз застосувати метод усереднення [5, 6] і одержати усереднену систему

$$\xi' = \varepsilon^2 M\{F(t)\tilde{F}(t-h)\}\xi + \varepsilon^2 M\{F(t)\tilde{G}(t-h)\}\times$$

$$\times\bar{\xi} + \varepsilon^2 M\{G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)\}\bar{\xi} +$$

$$+\varepsilon^2 M\{G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)\}\xi.$$

Позначимо через $f_{ss}(t)$ та $g_{ss}(t)$ діагональні елементи матриць $F(t)\tilde{F}(t-h)$ та $G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)$ відповідно і знайдемо їх середні значення

$$M\{f_{ss}(t)\} = M\{\sum_{k=1}^{q} F_{sk}(t)\tilde{F}_{ks}(t-h)\} =$$

$$= M\{\frac{i}{2\lambda_s} \sum_{k=1}^{q} e^{i\lambda_k h} \sum_{m=1}^{n} (b_{skm} e^{i(\lambda_s - \lambda_k + a_m)t} +$$

$$+\bar{b}_{skm} e^{i(\lambda_s - \lambda_k - a_m)t}) \frac{i}{2\lambda_k} e^{i\lambda_s h} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)} e^{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)(t-h)} +$$

$$+\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)} e^{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)(t-h)} \Big)\} =$$

$$= M\{-\frac{1}{2\lambda_s} e^{i\lambda_s h} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2\lambda_k} e^{i\lambda_k h} \sum_{m=1}^{n} (b_{skm} e^{ia_m t} +$$

$$+\bar{b}_{skm} e^{-ia_m t}) \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)} e^{ia_m t} \times$$

$$\times e^{i(\lambda_s - \lambda_k - a_m)h} + \frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)} e^{-ia_m t} \times$$

$$\times e^{i(\lambda_s - \lambda_k + a_m)h} \Big)\} = -\frac{1}{2\lambda_s} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2\lambda_k} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_k - \lambda_s - a_m)} e^{i(2\lambda_s + a_m)h} +$$

$$+\frac{\bar{b}_{skm} b_{ksm}}{i(\lambda_k - \lambda_s + a_m)} e^{i(2\lambda_s - a_m)h} \Big),$$

$$M\{g_{ss}(t)\} = M\{\sum_{k=1}^{q} G_{sk}(t)\bar{\tilde{G}}_{ks}(t-h)\} =$$

$$= M\{\frac{i}{2\lambda_s} \sum_{k=1}^{q} e^{-i\lambda_k h} \sum_{m=1}^{n} (b_{skm} e^{i(\lambda_s + \lambda_k + a_m)t} +$$

$$+\bar{b}_{skm} e^{i(\lambda_s + \lambda_k - a_m)t}) \frac{i}{2\lambda_k} e^{i\lambda_s h} \times$$

$$\times \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} e^{-i(\lambda_s + \lambda_k + a_m)(t-h)} +$$

$$+\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_s + \lambda_k - a_m)} e^{-i(\lambda_s + \lambda_k - a_m)(t-h)} \Big)\} =$$

$$= M\{-\frac{1}{2\lambda_s} e^{i\lambda_s h} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2\lambda_k} e^{-i\lambda_k h} \sum_{m=1}^{n} (b_{skm} e^{ia_m t} +$$

$$\bar{b}_{skm} e^{-ia_m t}) \sum_{m=1}^{n} \Big(\frac{\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s + \lambda_k + a_m)} e^{-ia_m t} \times$$

$$\times e^{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)h}+\frac{b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{ia_m t}\times$$
$$\times e^{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)h})\}=-\frac{1}{2\lambda_s}\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{2\lambda_k}\times$$
$$\times\sum_{m=1}^{n}(\frac{b_{skm}\bar{b}_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k+a_m)}e^{i(2\lambda_s+a_m)h}+$$
$$+\frac{\bar{b}_{skm}b_{ksm}}{i(\lambda_s+\lambda_k-a_m)}e^{i(2\lambda_s-a_m)h}).$$

Отже,

$$M\{f_{ss}(t)\}+M\{g_{ss}(t)\}=-\frac{\delta_s}{2\lambda_s}.$$

Якщо відсутній резонанс, то середні значення всіх елементів матриць $F(t)\tilde{G}(t-h)$, $G(t)\bar{\tilde{F}}(t-h)$, а також всіх позадіагональних елементів матриць $F(t)\tilde{F}(t-h)$ та $G(t)\bar{\tilde{G}}(t-h)$ дорівнюють нулеві, отже за допомогою лінійної заміни систему (9) можна звести до системи $\xi'=\varepsilon^2 D\xi+O(\varepsilon^3)$, де $D=diag\{-\delta_1/(2\lambda_1),...,-\delta_q/(2\lambda_q)\}$. Якщо $d_s=Re\{\delta_s\}>0$ при $s=1,...,q$, то, згідно з [5], нульовий розв'язок системи (5) асимптотично стійкий, а якщо $d_s\neq 0$ при $s=1,...,q$, але існує k, для якого $d_k<0$, то нульовий розв'язок системи (5) нестійкий. Теорема доведена.

Зауваження. *Твердження теорем 2 і 3 про нестійкість правильні й без припущення про відмінність від нуля величин $c_j sin(\lambda_j h)$ та d_s. Це можна показати, виконавши в системі (9) лінійну заміну і використавши схему доведення теореми про стійкість за першим наближенням [10].*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений.— М.: Мир, 1984.— 421 с.
2. *Митропольский Ю.А., Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные многообразия, устойчивость и бифуркация решений сингулярно возмущенных дифференциально-функциональных уравнений // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, N 3.— С. 335—340.
3. *Клевчук І.І.* Біфуркація стану рівноваги сингулярно збуреної системи із загаюванням // Укр. мат. журн.— 1995.— **47**, N 8.— С.1022—1028.
4. *Клевчук І.І.* Гомоклінічні точки для сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь із запізненням // Укр. мат. журн.— 2002.— **54**, N 4.— С.563—567.
5. *Hale J.K.* Averaging methods for differential equations with retarded arguments and a small parameter // J. Different. Equat.— 1966.— **2**, N 1.— P.57—73.
6. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 502 с.
7. *Самойленко А.М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М.: Наука, 1987.— 304 с.
8. *Фодчук В.І., Клевчук І.І.* Розщеплення лінійних диференціально-функціональних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А.— 1986.— N 8.— С.23—25.
9. *Клевчук И.И.* О принципе сведения для дифференциально-функциональных уравнений нейтрального типа // Дифференц. уравнения.— 1999.— **35**, N 4.— С.464—472.
10. *Гермаидзе В.Е.* Об асимптотической устойчивости систем с запаздывающим аргументом // Успехи мат. наук.— 1959.— **14**, вып. 4.— С.149—156.

Стаття надійшла до редколегії 1.07.2002