УДК 517.926

©2002 р. Л.І. Каранджулов

Технічний університет, Софія, Болгарія

ДВОТОЧКОВА КРАЙОВА ЗАДАЧА З ІМПУЛЬСНИМ ВПЛИВОМ

Розглядається лінійна крайова задача із загальним імпульсним впливом. За допомогою псевдообернених матриць та узагальненої матриці Гріна побудовано розв'язок крайової задачі.

A linear boundary-value problem with a generalized impulse effect is considered. By uzing pseudo-inverse matrices and generalized Green's matrix, a solution is constructed.

1. Постановка задачі. Нехай $A(t)$ — $(n\times n)$-вимірна матриця з неперервними на інтервалі $[a,b]$ елементами; $f(t)$ – кусково-неперервна n-вимірна вектор-функція на інтервалі $[a,b]$, яка може мати розриви першого роду в точках $\tau_i\in[a,b],\ i=\overline{1,p}$.

У роботі [5] розглянуто задачу Коші

$$\dot{x}=A(t)x+f(t), t\in[a,b], t\neq\tau_i, i=\overline{1,p}, \quad (1)$$

$$a=\tau_0<\tau_1<\cdots<\tau_p<\tau_{p+1}=b,$$

$$x(a)=v, \quad (2)$$

з імпульсними умовами вигляду

$$\Delta x|_{t=\tau_i}=B_ix+a_i, \quad (3)$$

де E_n+B_i — невироджена $(n\times n)$-вимірна матриця зі сталими елементами, a_i — задані n-вимірні вектори.

У даній роботі дослідимо лінійну диференціальну задачу (1) із загальними імпульсними умовами в точках

$$M_ix(\tau_i-0)+N_ix(\tau_i+0)=h_i,\ i=\overline{1,p}, \quad (4)$$

і крайовими умовами вигляду

$$M_0x(a)+N_0x(b)=\alpha,\ \alpha\in R^s, \quad (5)$$

де M_i, N_i — сталі матриці розмірності $(k\times n)$, $h_i\in R^k$.

Із імпульсних умов (4) випливає, що фундаментальну матрицю, яка побудована в [5] для випадку $\det(E_n+B_i)\neq 0$, для задачі (1) – (3) використати не вдається. Тому об'єднаємо умови (4) і (5) в одну умову і застосуємо методи узагальнено-обернених операторів та узагальненої матриці Гріна [1]. Такий підхід вперше застосований в роботі [7], а відтак у [8].

2. Основний результат. Об'єднані імпульсні та крайові умови набувають вигляду

$$\sum_{i=1}^{p+1} l_ix_i(\cdot)=h,\ h\in R^m,\ m=s+pk, \quad (6)$$

де

$$l_1x_1(\cdot)=[M_0\ \Theta_k\ \cdots\ \Theta_k]^Tx_1(a)+$$
$$+[\Theta_s\ M_1\ \Theta_k\ \cdots\ \Theta_k]^Tx_1(\tau_1),$$
$$l_ix_i(\cdot)=[\Theta_s\ \Theta_k\cdots\ N_{i-1}\ \Theta_k]^Tx_i(\tau_{i-1})+$$
$$+[\Theta_s\ \Theta_k\cdots\ M_i\ \Theta_k]^Tx_i(\tau_i),$$
$$i=\overline{2,p},$$
$$l_{p+1}x_{p+1}(\cdot)=[\Theta_s\ \Theta_k\cdots\ \Theta_k\ \ N_p]^Tx_{p+1}(\tau_p)+$$
$$+[N_0\ \Theta_k\cdots\Theta_k]^Tx_{p+1}(b),$$

$h=[\alpha\ h_1\cdots h_p]^T$, Θ_s, Θ_k – ненульові матриці розмірності $s\times n$ та $k\times n$ відповідно.

Замість задачі (1), (4), (5) дослідимо еквівалентну задачу (1), (6).

Відносно вектора $c=(c_1,c_2,\cdots,c_{p+1})$ розглянемо алгебраїчну систему з $(m\times(p+1)n)$-вимірною матрицею Q:

$$Qc=\overline{h}, \quad (7)$$

де $Q=[Q_1\ Q_2\cdots Q_{p+1}]$, $Q_i=l_iX(\cdot)$ — $(m\times n)$-вимірні матриці та $\overline{h}=h-$

$\sum_{i=1}^{p+1} l_i\overline{x}_i(\cdot)$, $X(t)$ — нормальна фундаментальна матриця розв'язку системи $\dot{x} = Ax, X(a) = E_n$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $\operatorname{rank} Q = n_1 \le \min(m,(p+1)n)$, $P_{Q^*}\overline{h} = 0$. *Тоді задача (1), (6) має r-параметричний розв'язок*

$$x_i(t,\xi_r) = X(t)\left[P_{Q_r}\right]_{n_i}\xi_r + X(t)\left[Q^+\right]_{n_i} h +$$

$$+\int_a^b G_i(t,s)f(s)ds, \qquad (8)$$

де $G_i(t,s)$ — узагальнена матриця Гріна.

Доведення. Розв'язок системи (1) $x(t) \in C^1\left([a,b]\setminus\{\tau_1,\cdots,\tau_p\}\right)$ на кожному проміжку $[\tau_0,\tau_1],]\tau_{i-1},\tau_i]$, $i=\overline{2,p+1}$, набуває вигляду

$$x(t) =$$

$$=\left\{\begin{array}{l} x_1(t) = X(t)c_0 + \overline{x}_1(t), t\in[\tau_0,\tau_1], \\ x_i(t) = X(t)c_i + \overline{x}_i(t), t\in]\tau_{i-1},\tau_i]. \end{array}\right. \qquad (9)$$

де $\overline{x}_i(t)$, $i=\overline{1,p+1}$ – довільний частинний розв'язок неоднорідної системи (1), який вибирається таким чином [7]:

$$\overline{x}_i(t) = \int_a^b K_i(t,s)ds = \int_a^{\tau_1} K_i^1(t,s)f_1(s)ds+$$

$$+\cdots+\int_{\tau_{i-1}}^t K_i^{i1}(t,s)f_i(s)ds+$$

$$+\int_t^{\tau_i} K_i^{i2}(t,s)f_i(s)ds+$$

$$+\cdots+\int_{\tau_p}^b K_i^{p+1}(t,s)f_p(s)ds,$$

де

$$K(t,s) = \left\{\begin{array}{l} K^{(1)} = \frac{1}{2}X(t)X^{-1}(s), s\le t, \\ K^{(2)} = -\frac{1}{2}X(t)X^{-1}(s), s > t. \end{array}\right.$$

Використавши $K^{(1)}(t,s)$ і $K^{(2)}(t,s)$ в замкненій області $a\le t,\ s\le b$, введемо такі позначення:

$$K_i(t,s) = K_i^j(t,s) =$$

$$=\left\{\begin{array}{ll} K^{(1)}(t,s), & (t,s)\in D_1, \\ K^{(2)}(t,s), & (t,s)\in D_2, \end{array}\right.$$

$$D_1 = \{(t,s|t\in]\tau_{i-1},\tau_i],\ s\in[a,b],\ s<t,$$

$$i=\overline{1,p+1},\ j=\overline{1,i-1}\},$$

$$D_2 = \{t\in]\tau_{i-1},\tau_i],\ s\in[a,b],\ s>t,$$

$$i=\overline{1,p+1},\ j=\overline{i+1,p+1}\}.$$

При $i=j$ маємо

$$K_i^j(t,s) = \left\{\begin{array}{ll} K_i^{i1}(t,s) = K^{(1)}(t,s), & s\le t, \\ K_i^{i2}(t,s) = K^{(2)}(t,s), & t<s. \end{array}\right.$$

Підставивши розв'язок (9) до імпульсно-крайової умови (6), одержимо алгебраїчну систему рівнянь (7). З умови теореми випливає, що $rankP_Q = (p+1)n - n_1 = r$ та $rankP_{Q^*} = m - n_1 = d$, де P_Q і P_{Q^*} ортопроектори $P_Q:\ R^{(p+1)n}\to\ker(Q)$ та $P_{Q^*}: R^m\to\ker(Q^*)$, $Q^*=Q^T$.

Розв'язок системи (7) набуває вигляду

$$c_i = \left[P_{Q_r}\right]_{n_i}\xi_r + \left[Q^+\overline{h}\right]_{n_i},$$

$$\xi_r\in R^r,\ i=\overline{1,p+1}, \qquad (10)$$

тоді й тільки тоді, коли $P_{Q^*}\overline{h} = 0$, де $[Q^+\overline{h}]_{n_i}$ $i=\overline{1,p+1}$ задають послідовні n елементів у $n(p+1)$-вимірному векторі $Q^+\overline{h}$, $n_1+n_2+\cdots+n_{p+1} = n(p+1)$, а $[P_{Q_r}]_{n_i}$ — $(n_i\times r)$-матриці, одержані з P_{Q_r}. За допомогою (10) із (9) одержимо загальний розв'язок (8), де

$$G_i(t,s) = K_i(t,s) - X(t)\left[Q^+\right]_{n_i}\sum_{j=1}^{p+1} l_jK_j(t,s),$$

Q^+ — єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом матриця до матриці Q. Теорему доведено.

Наслідок 1. *Якщо $m=(p+1)n$, $s=n$, $k=n$, $\det M_i\ne 0$, $\det N_i\ne 0$ та $\det Q\ne 0$, тоді задача (1), (6) для довільної функції $f(t)\in(C[a,b]\setminus\{\tau_1,\cdots,\tau_p\})$ и $h\in R^m$ на кожному проміжку $[a,\tau_1],]\tau_{i-1},\tau_i]$, $i=\overline{2,p+1}$ має єдиний розв'язок вигляду*

$$x_i(t) = X(t)\left[Q^{-1}\right]_{n_i}h + \int_a^b G_i(t,s)f(s)ds. \qquad (11)$$

Відзначимо, що у випадку двоточкової крайової задачі з однією імпульсною дією в (11) $i=1,2$ і маємо

$$Q^{-1} = \left[\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & sb_{22} \end{array}\right],$$

де $b_{11} = D^{-1}$, $b_{12} = -D^{-1}N_0X(b)X^{-1}(\tau_1)N_1^{-1}$, $b_{21} = -X^{-1}(\tau_1)N_1^{-1}M_1X(\tau_1)D^{-1}$, $b_{22} = X^{-1}(\tau_0)N_1^{-1} + X^{-1}(\tau_1)N_1^{-1}M_1 \times \times X(\tau_1)D^{-1}N_0X(b)X^{-1}(\tau_1)N_1^{-1}$, $D = M_0X(a) - N_0X(b)X^{-1}(\tau_1)N_1^{-1}M_1X(\tau_1)$. Обернена матриця Q^{-1} одержана за формулою Фробеніуса. У цьому випадку зображення розв'язку (11) збігається із результатом, одержаним у [4].

3. Частинний випадок.

3.1. Розглянемо періодичну задачу

$$\dot{x} = A(t)x + f(t), t \in [0,T] \backslash \{\tau_1, \cdots, \tau_p\},$$

$$M_i x(\tau_i - 0) + N_i x(\tau_i + 0) = h_i,\ i = \overline{1,p},\ h_i \in R^k \tag{12}$$

$$M_0 x(0) = N_0 x(T),$$

де $A(t)$ — $(n \times n)$-вимірна матриця з неперервними і T-періодичними елементами; n-вимірна вектор-функція $f(t)$ — T-періодична і кусково-неперервна з розривами першого роду в точках τ_i. Сталі $(k \times n)$-вимірні матриці M_i, N_i та $(s \times n)$-вимірні матриці M_0, N_0, k-вимірні вектор-стовпці h_i та імпульсні моменти τ_i $(0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_p < T)$ такі, що $M_{0+p} = M_0$, $N_{0+p} = N_0$, $M_{i+p} = M_i$, $N_{i+p} = N_i$, $h_{i+p} = h_i$, $\tau_{i+p} = \tau_i$ для всіх $i = \overline{1,p}$.

У цьому випадку лінійні оператори l_i набувають вигляду (6), де $a = 0$, $b = T$, а $h = [0\ h_1 \cdots h_p]^T$. Розв'язок одержується з (8).

Нехай $k = s = n$, $M_0 = N_0 = E_n$. Тоді одержимо відому періодичну крайову задачу. Якщо $\det Q \neq 0$, то $Q^+ = Q^{-1}$, $P_Q = P_{Q^*} = 0$ і розв'язок системи (12) набуває вигляду (11).

3.2. Якщо в (1) і (6) $A(t) \equiv A$ — стала $(n \times n)$-вимірна матриця, то всюди потрібно підставити $X(t) = \exp(A(t - \tau_0))$, $\tau_0 = a$, $X^{-1}(t) = \exp(-A(t - \tau_0))$. Зробивши відповідні зміни в $K(t,s)$ і Q одержимо P_Q, P_{Q^*}, Q^+, $G_i(t,s)$, а отже, і загальний розв'язок.

4. Приклад. При дослідженні поширення хвиль у твердих тілах зустрічаються крайові задачі нетерового типу [1]. Розглянемо задачу про обертальні коливання стрижня, вкритого оболонкою з іншого матеріалу, при синусоїдальних збуреннях поверхні розмежування "ядро-оболонка". Коливний процес описується системою диференціальних рівнянь з частинними похідними, яка методом Фур'є зводиться до системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду [2,3]:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_1}{dr} + \left(\alpha_n^2 - \frac{1}{r^2}\right)\varphi_1 = f_1(r),$$

$$0 < r \le a, \tag{13}$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi_2}{dr} - \left(\gamma_n^2 + \frac{1}{r^2}\right)\varphi_2 = f_2(r),$$

$$a < r < b$$

за умов

$$|\varphi_1(0)| < \infty,\ \varphi_2(b) + \frac{\mu_3}{b}\varphi_2'(b) = 0,$$

$$\varphi_1(a) - \varphi_2(a) = \beta_1, \tag{14}$$

$$\varphi_2'(a) - \mu_1\varphi_1'(a) - \mu_2\varphi_1(a) = \beta_2,$$

де α_n^2, γ_n^2, μ_n, β_n, a, b — задані сталі.

Умова $|\varphi_1(0)| < \infty$ означає, що для першого з рівнянь (13) необхідно знайти обмежений розв'язок.

Подамо задачу (13), (14) у нормальній формі. Вона еквівалентна системі

$$\dot{x} = A(t)x + g(t),\ t \in [0,b] \backslash \{a\}$$

$$M_1x_1(a) + N_1x_2(a) = \beta, \tag{15}$$

$$Dx_2(b) = 0,\ |x_1(0)| < \infty,$$

де

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},\ A(t) = \begin{cases} A_1(t),\ t \in [0,a], \\ A_2(t),\ t \in (a,b], \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} g_1(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_1(t) \end{bmatrix}, & t \in [0,a], \\ g_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f_2(t) \end{bmatrix}, & t \in (a,b], \end{cases}$$

$$A_1(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\alpha_n^2 + \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{bmatrix},$$

$$A_2(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma_n^2 + \frac{1}{t^2} & -\frac{1}{t} \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\mu_2}{b} \end{bmatrix},$$

$$M_1(t) = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ -\mu_n^2 & -\mu 1 \end{array} \right], \; N_1(t) = \left[\begin{array}{cc} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right].$$

Задачу (15) розглянемо як двоточкову імпульсну задачу.

Нехай рівняння із системи (13) мають два лінійно незалежних розв'язки, побудову яких можна знайти, наприклад, у [5]. Для першого рівняння це функції Бесселя $J_1(\alpha_n r)$ і $Y_1(\alpha_n r)$. Лінійно незалежні розв'язки другого рівняння в (13) позначимо через $I_1(\gamma_n r)$, $K_1(\gamma_n r)$.

Через $\Phi_1(\alpha_n r)$ позначимо фундаментальну матрицю першого рівняння з (13). Оскільки $J_1(\alpha_n r)$ і $Y_1(\alpha_n r)$ лінійно незалежні, то

$$\Phi_1(\alpha_n r) = \left[\begin{array}{cc} J_1(\alpha_n r) & Y_1(\alpha_n r) \\ J_1'(\alpha_n r) & Y_1'(\alpha_n r) \end{array} \right].$$

Знайдемо обмежений розв'язок цього рівняння.

Загальний розв'язок першого рівняння Бесселя з (13) набуває вигляду

$$\varphi_1(r) = c_1 J_1(\alpha_n r) + c_2 Y_1(\alpha_n r) + \eta^*(r),$$

де c_1 і c_2 — довільні сталі, $\eta^*(r)$ — частинний розв'язок, який знаходимо методом Лагранжа. Одержимо, що

$$\eta^*(r) = u_1(r) J_1(\alpha_n r) + u_2(r) Y_1(\alpha_n r).$$

Після нескладних перетворень отримаємо

$$u_1(r) = c(a) - \int_a^r \frac{f_1(s) Y_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds,$$

$$u_2(r) = \overline{c}(a) + \int_a^r \frac{f_1(s) J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds.$$

Тоді

$$\eta^*(r) =$$
$$= \left[c(a) - \int_a^r \frac{f_1(s) Y_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds \right] J_1(\alpha_n r) +$$
$$+ \left[\overline{c}(a) + \int_a^r \frac{f_1(s) J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds \right] Y_1(\alpha_n r)$$

або

$$\frac{1}{Y_1(\alpha_n r)} \eta^*(r) = c(a) \frac{J_1(\alpha_n r)}{Y_1(\alpha_n r)} -$$
$$- \frac{J_1(\alpha_n r)}{Y_1(\alpha_n r)} \int_a^r \frac{f_1(s) Y_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds +$$
$$+ \overline{c}(a) + \int_a^r \frac{f_1(s) J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds.$$

Нехай $r \to 0$. Тоді $\frac{1}{Y_1(\alpha_n r)} \eta^*(r) \to 0$ і $\frac{J_1(\alpha_n r)}{Y_1(\alpha_n r)} \to 0$. Із останньої рівності одержимо

$$\overline{c}(a) = \frac{J_1(\alpha_n r)}{Y_1(\alpha_n r)} \int_a^0 \frac{f_1(s) Y_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds -$$
$$- \int_a^0 \frac{f_1(s) J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds.$$

Підставимо $\overline{c}(a)$ в $u_2(r)$:

$$u_2(r) = - \frac{J_1(\alpha_n r)}{Y_1(\alpha_n r)} \int_0^a \frac{f_1(s) Y_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds +$$
$$+ \int_o^r \frac{f_1(s) J_1(\alpha_n r)}{\alpha_n \det \Phi_1(\alpha_n s)} ds.$$

Тоді після перетворень $\eta^*(r)$ набуде вигляду

$$\eta^*(r) = J_1(\alpha_n r) c -$$
$$- \frac{1}{\alpha_n} \int_0^r \frac{\det \left[\begin{array}{cc} J_1(\alpha_n r) & Y_1(\alpha_n r) \\ J_1(\alpha_n s) & Y_1(\alpha_n s) \end{array} \right]}{\det \left[\begin{array}{cc} J_1(\alpha_n s) & Y_1(\alpha_n s) \\ J_1'(\alpha_n s) & Y_1'(\alpha_n s) \end{array} \right]} f_1(s) ds.$$

Якщо $c_2 = 0$, то для $\varphi_1(r)$ маємо

$$\varphi_1(r) = J_1(\alpha_n r) c_1 -$$
$$- \frac{1}{\alpha_n} \int_0^r \frac{\det \left[\begin{array}{cc} J_1(\alpha_n r) & Y_1(\alpha_n r) \\ J_1(\alpha_n s) & Y_1(\alpha_n s) \end{array} \right]}{\det \Phi(\alpha_n s)} f_1(s) ds.$$

Отже, ми одержали обмежений розв'язок рівняння Бесселя.

Із (15) маємо $x_1(t) = \left[\begin{array}{c} \varphi_1(t) \\ {\varphi_1}'(t) \end{array} \right]$. Тоді

$$x_1(t) = \overline{\Phi}_1(\alpha_n t) c_1 - \frac{1}{\alpha_n} \int_0^t L(\alpha_n t, \alpha_n s) f_1(s) ds, \tag{16}$$

де

$$\overline{\Phi}_1(\alpha_n t) = \left[\begin{array}{c} J_1(\alpha_n t) \\ \alpha_n J_1'(\alpha_n t) \end{array} \right],$$

$$L(\alpha_n t, \alpha_n s) = \frac{\det \left[\begin{array}{cc} J_1(\alpha_n t) & Y_1(\alpha_n t) \\ J_1(\alpha_n s) & Y_1(\alpha_n s) \end{array} \right]}{\det \Phi(\alpha_n s)}.$$

На півінтервалі $(a,b]$ фундаментальна матриця $\Phi_2(\gamma_n t)$ така:

$$\Phi_2(\gamma_n t) = \begin{bmatrix} I_1(\gamma_n t) & K_1(\gamma_n t) \\ I_1'(\gamma_n t) & K_1'(\gamma_n t) \end{bmatrix}.$$

Оскільки $rankD = 1$, то з умови $Dx_2(b) = 0$ знаходимо $x_2(b) = P_{D_1}\xi,\ \xi \in R$. Тоді на півінтервалі $(a,b]$ $x_2(t)$ набуває вигляду

$$x_2(t) = \Phi_2(\gamma_n t)\Phi_2^{-1}(\gamma_n b)P_{D_1}\xi +$$
$$+\int_t^b \Phi_2(\gamma_n t)\Phi_2^{-1}(s)g_2(s)ds. \qquad (17)$$

Підставимо (16) і (17) в імпульсні умови (15). Для двовимірного вектора $c = [c_1 \quad \xi]^T$ одержимо алгебраїчну систему

$$Qc = \overline{\beta}, \qquad (18)$$

де

$$Q = \left[M_1\overline{\Phi}(\gamma_n a) \quad N_1\Phi_2(\gamma_n a)\Phi_2^{-1}(\gamma_n b)P_{D_1}\right],$$
$$\overline{\beta} = \beta - \frac{1}{\alpha_n}M_1\int_0^a L(\alpha_n a, \alpha_n s)f_1(s)ds -$$
$$-N_1\int_a^b \Phi_2(\gamma_n a)\Phi_2^{-1}(s)g_2(s)ds.$$

Нехай $\operatorname{rank} Q = 2$. Тоді система (18) має єдиний розв'язок $c = Q^{-1}\overline{\beta}$, який записується у вигляді

$$c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \xi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[Q^{-1}\overline{\beta}\right]_1 \\ \left[Q^{-1}\overline{\beta}\right]_2 \end{bmatrix}.$$

Одержимо такий розв'язок задачі (15):

$$x_1(t) = \overline{\Phi}_1(\alpha_n t)[Q^{-1}\overline{\beta}]_1 +$$
$$+\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t L(\alpha_n t, \alpha_n s)f_1(s)ds,$$
$$x_2(t) = \Phi_2(\gamma_n t)\Phi_2^{-1}(\gamma_n b)P_{D_1}[Q^{-1}\overline{\beta}]_2 +$$
$$+\int_t^b \Phi_2(\gamma_n t)\Phi_2^{-1}(s)g_2(s)ds.$$

Якщо $rankQ = 1$, то (15) має однопараметричну сім'ю розв'язків вигляду

$$x_1(t) = \overline{\Phi}_1(\alpha_n t)[P_{Q_1}]_1\eta + \overline{\Phi}_1(\alpha_n t)[Q^+\overline{\beta}]_1 +$$
$$+\frac{1}{\alpha_n}\int_0^t L(\alpha_n t, \alpha_n s)f_1(s)ds,$$
$$x_2(t) = \Phi_2(\gamma_n t)\Phi_2^{-1}(\gamma_n b)P_{D_1}[P_{Q_1}]_2\eta +$$
$$+\Phi_2(\gamma_n t)\Phi_2^{-1}(\gamma_n b)P_{D_1}[Q^+\overline{\beta}]_2 +$$
$$+\int_t^b \Phi_2(\gamma_n t)\Phi_2^{-1}(s)g_2(s)ds.$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.— К.: Ін-т математики НАН України.— 1995.— 320 с.
2. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений.— М.: Мир, 1984.— 535 с.
3. *Пановко Я.Г.* Основы прикладной теории колебаний и удара.— Ленинград: Политехника, 1990.— 323 с.
4. *Самойленко А.М., Ронто Н.И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений.— К.: Наук. думка, 1992.— 280 с.
5. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— К.: Вища школа, 1987.— 287 с.
6. *Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.* Специальные функции.— М.: Наука, 1977.— 344 с.
7. *Karandjulov L.I.* Multipoint boundary-value problems with impulse effects // Укр. мат. журн.— 1995.— **47**, N 6.— С.770 — 774.
8. *Karandjulov L.I.* Generalized Cauchy problem for linear pulse differential systems // Mathematics and education in mathematics. Proceedings of Twenty First Spring Conference of the Union of Bulgarian Mathematicians.— Montana, 1999.— P.120—127.

Стаття надійшла до редколегії 10.07.2002