УДК 517.911

©2002 р. О.Є. Зернов, Ю.В. Кузіна

Південноукраїнський державний педагогічний університет ім. К.Д. Ушинського, Одеса

ПРО ІСНУВАННЯ, ЄДИНІСТЬ Й АСИМПТОТИКУ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ $F(t,x,x')=0$, $x(0)=0$

Доводиться існування та єдиність розв'язку неявної задачі Коші з потрібним асимптотичним поводженням.

The existence and the uniqueness of initial value problem's solution with a needed asymptotic behaviour is being proved.

Для диференціальних рівнянь першого порядку, не розв'язаних відносно похідної невідомої функції, досліджувалися питання про існування, кількість розв'язків, про збіжність до розв'язку послідовностей наближень (див. [1], [6], [7], [8]). Водночас питання про асимптотичне поводження розв'язків таких рівнянь практично не вивчені. У даній статті доводиться існування єдиного неперервно диференційовного розв'язку з необхідними асимптотичними властивостями. Використовуються методи якісної теорії диференціальних рівнянь (див. [2], [3], [5], а також [4]). Запропонована схема міркувань (див. [4]) дає можливість проводити локальний аналіз як регулярних, так і сингулярних задач Коші вигляду $F(t,x,x')=0$, $x(0)=0$ в околі початкової точки $t=0$.

У першій частині роботи розглядається *регулярна* задача Коші

$$F(t,x,x')=0, \tag{1}$$

$$x(0)=0, \tag{2}$$

де t — дійсна змінна, $t\in(0,\tau)$, $x:(0,\tau)\to\mathbb{R}$ — невідома дійсна функція змінної t, $F:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ — неперервна функція,

$$\mathcal{D}=\{(t,x,y): t\in(0,\tau), |x|<r_1t^2,\ |y|<r_2t\}.$$

Передбачається, що

$$F(t,x,x')=a_1t+a_2x+a_3x'+f(t,x,x')$$

та виконані наступні умови:

1) a_i, $i\in\{1,2,3\}$ — сталі, $a_3\neq 0$,
$$\left|\frac{a_1}{a_3}\right|<\min\{2r_1,r_2\};$$
2) для будь-яких точок $(t,x_i,y)\in\mathcal{D}$, $(t,x,y_i)\in\mathcal{D}$, $i\in\{1,2\}$
$$|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)|\leqslant l_1(t)|x_1-x_2|,$$
$$|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)|\leqslant l_2(t)|y_1-y_2|,$$
де $l_i:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ — неперервні функції,
$$\lim_{t\to+0}l_i(t)=0,\quad i\in\{1,2\};$$
3) якщо стала c визначена рівністю
$$c=-\frac{a_1}{2a_3}, \tag{3}$$
то
$$|f(t,ct^2,2ct)|\leqslant t\xi(t),\ t\in(0,\tau),$$
де $\xi:(0,\tau)\to(0,+\infty)$ – неперервно диференційовна функція,
$$\xi'(t)\geqslant 0,\quad t\in(0,\tau),$$
$$\lim_{t\to+0}\xi(t)=0,\quad \lim_{t\to+0}\frac{t}{\xi(t)}=\xi_0,$$
$$0\leqslant\xi_0<+\infty.$$

Означення. *Для будь-якого $\rho\in(0,\tau)$ будемо називати ρ-розв'язком задачі (1), (2) неперервно диференційовну функцію $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$, що задовольняє умови:*

1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}$ при всіх $t \in (0, \rho]$;

2) функція x при всіх $t \in (0, \rho]$ тотожно задовольняє рівняння (1).

Позначимо через $\mathcal{U}_1(\rho, M)$ множину всіх неперервно диференційовних функцій $u : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, що

$$|u(t) - ct^2| \le Mt^2\xi(t),$$

$$|u'(t) - 2ct| \le Mt\xi(t), \quad t \in (0, \rho]. \qquad (4)$$

Тут ρ, M — сталі, $\rho \in (0, \tau)$, стала c визначається рівністю (3).

Теорема 1. *Існують такі сталі ρ, M, що задача (1), (2) має один і тільки один ρ-розв'язок, що належить множині $\mathcal{U}_1(\rho, M)$.*

Доведення. Спочатку вибираємо ρ, M. Нехай M задовольняє умову

$$M > \frac{|a_1 a_2|}{a_3^2}\xi_0 + \frac{2}{|a_3|}.$$

Умови, що визначають вибір ρ, тут не наводимо; відзначимо лише, що ρ достатньо мале. Нехай $\mathcal{B}$ – простір неперервно диференційовних функцій $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ із нормою

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t \in [0, \rho]} \Big(|x(t)| + |x'(t)| \Big) \qquad (5)$$

та нехай $\mathcal{U}$ – підмножина $\mathcal{B}$, кожний елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ якої задовольняє нерівності (4), причому $u(0) = 0$, $u'(0) = 0$. Множина $\mathcal{U}$ замкнута й обмежена. Розглянемо диференціальне рівняння

$$x' = -\frac{a_1}{a_3}t - \frac{a_2}{a_3}x - \frac{1}{a_3}f(t, u(t), u'(t)) \qquad (6)$$

з початковою умовою (2), де $u \in \mathcal{U}$ – довільна фіксована функція. Далі проводяться міркування, аналогічні доведенню теореми 1 із [4] у випадку $b < 2\sigma$ (див. [4], стор. 302-305); якщо зберегти термінологію та позначення з [4], то спочатку встановлюється, що кожна інтегральна крива рівняння (6), що перетнула множину

$$\Phi_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - ct^2| = Mt^2\xi(t)\},$$

поблизу точки перетинання $(t_0, x_0) \in \Phi_1$ розташована так: вона лежить в області

$$\mathcal{D}_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - ct^2| < Mt^2\xi(t)\}$$

при $t > t_0$ і лежить поза $\overline{\mathcal{D}_1}$ при $t < t_0$. Звідси випливає, що серед інтегральних кривих рівняння (6), що перетинають множину

$$\mathrm{H} = \{(t, x) : t = \rho,\ |x - c\rho^2| < M\rho^2\xi(\rho)\},$$

знайдеться хоча б одна (позначимо її через $J_u : (t, x_u(t))$), що визначена при $t \in (0, \rho]$ і лежить у $\mathcal{D}_1$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Потім доводимо, що така інтегральна крива єдина; для цього розглядається однопараметричне сімейство кривих

$$\Phi_3(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t^2\},$$

де ν – параметр, $\nu \in (0, 1]$. Неважко переконатися в тому, що $x_u \in \mathcal{U}$ (якщо взяти, за означенням, $x_u(0) = 0, x_u'(0) = 0$). Визначаємо оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, вважаючи $\mathrm{T}u = x_u$ і доводимо, що цей оператор є оператором стиску. Для цього потрібно взяти будь-які $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$, $\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}} = h$, $h > 0$ і вважати

$$\Phi_2 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| = ht\},$$

де $x_2 = \mathrm{T}u_2$. Розглядаємо рівняння (6), де $u = u_1$, і доводимо, що кожна інтегральна крива цього рівняння, яка перетнула Φ_2 в будь-якій точці $(t_0, x_0) \in \Phi_2$, розташована поблизу точки перетинання так: вона лежить в області

$$\mathcal{D}_2 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| < ht\}$$

при $t > t_0$ і лежить поза $\overline{\mathcal{D}_2}$ при $t < t_0$. Звідси випливає, що інтегральна крива $(t, x_1(t))$, де $x_1 = \mathrm{T}u_1$, лежить у $\mathcal{D}_2$ при всіх $t \in (0, \rho]$. Тому

$$\begin{aligned} |x_1(t) - x_2(t)| &< ht, \\ |x_1'(t) - x_2'(t)| &< \frac{1}{3}h, \quad t \in (0, \rho]. \end{aligned}$$

Отже,

$$\|x_1 - x_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{1}{2}h,$$

або

$$\|\mathrm{T}u_1 - \mathrm{T}u_2\|_{\mathcal{B}} \leqslant \frac{1}{2}\|u_1 - u_2\|_{\mathcal{B}}.$$

Проведені міркування не залежать від вибору $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$. Доведення теореми 1 завершується застосуванням до оператора $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ принципу нерухомої точки Банаха.

У другій частині роботи розглядається *сингулярна* задача Коші (1), (2), де t — дійсна змінна, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — невідома дійсна функція змінної t, $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — неперервна функція,

$$\mathcal{D} = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau),\ |x| < r_1 t,\ |y| < r_2\}.$$

Передбачається, що

$$F(t, x, x') = a_1 t + a_2 x + a_3 t (x')^\gamma + f(t, x, x')$$

та виконані наступні умови:

1) a_i, $i \in \{1, 2, 3\}$ – сталі, $a_3 \neq 0$, γ – натуральне, $\gamma \geqslant 2$;

2) $|f(t, x, y)| \leqslant t\xi(t)$, $(t, x, y) \in \mathcal{D}$, де $\xi : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ – неперервно диференційовна функція,

$$\lim_{t\to+0} \xi(t) = 0,\ \ \lim_{t\to+0} t\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \xi_0,$$

$$0 \leqslant \xi_0 < +\infty;$$

3) рівняння $a_1 + a_2 c + a_3 c^\gamma = 0$ має дійсний корінь $c \neq 0$, який задовольняє умови

$$|c| < \min\{r_1, r_2\},\quad (1 + \xi_0)\gamma c^{\gamma-1} \neq -\frac{a_2}{a_3};$$

4) якщо $-\dfrac{a_2}{a_3\gamma c^{\gamma-1}} < 1$, або якщо $-\dfrac{a_2}{a_3\gamma c^{\gamma-1}} > 1 + \xi_0$, то для будь-яких точок $(t, x_i, y) \in \mathcal{D}$, $(t, x, y_i) \in \mathcal{D}$, $i \in \{1, 2\}$

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| &\leqslant l_2 t|x_1 - x_2|,\\ |f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| &\leqslant l_3 t|y_1 - y_2|, \end{aligned}$$

де l_2, l_3 – сталі,

$$\left(\left|\frac{a_2}{a_3}\right| + \left|\frac{a_2}{a_3} + \gamma c^{\gamma-1}\right|\right)\frac{l_2 + l_3}{|a_3|} < \\ < \left|\frac{a_2}{a_3} + \gamma c^{\gamma-1}\right|\gamma|c|^{\gamma-1};$$

якщо ж $1 \leqslant -\dfrac{a_2}{a_3\gamma c^{\gamma-1}} < 1 + \xi_0$, то для будь-яких точок $(t, x_i, y) \in \mathcal{D}$, $(t, x, y_i) \in \mathcal{D}$, $i \in \{1, 2\}$

$$|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \leqslant \\ \leqslant l_2 t(\xi(t))^\sigma |x_1 - x_2|,$$

$$|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \leqslant \\ \leqslant l_3 t(\xi(t))^\sigma |y_1 - y_2|,$$

де l_2, l_3, σ – сталі,

$$-\frac{1}{\xi_0}\left(\frac{a_2}{a_3\gamma c^{\gamma-1}} + 1\right) < \sigma < 1.$$

Як і в першій частині роботи, вводимо означення ρ-розв'язка задачі (1), (2).

Позначимо через $\mathcal{U}_2(\rho, M, q)$ множину всіх неперервно диференційовних функцій $u : (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, що

$$|u(t) - ct| \leqslant Mt\xi(t),$$

$$|u'(t) - c| \leqslant qM\xi(t),\quad t \in (0, \rho]. \tag{7}$$

Тут ρ, M, q — сталі, $\rho \in (0, \tau)$, стала c визначена умовою 3).

Теорема 2. *Якщо* $-\dfrac{a_2}{a_3\gamma c^{\gamma-1}} > 1 + \xi_0$, *то існують сталі* ρ, M, q *такі, що задача (1), (2) має нескінченну множину* ρ*-розв'язків, які належать множині* $\mathcal{U}_2(\rho, M, q)$. *При цьому якщо стала* α *задовольняє умову* $|\alpha - c\rho| < M\rho\xi(\rho)$, *то існує єдиний* ρ*-розв'язок* $x_\alpha \in \mathcal{U}_2(\rho, M, q)$ *задачі (1), (2) такий, що* $x_\alpha(\rho) = \alpha$.

Якщо ж $-\dfrac{a_2}{a_3\gamma c^{\gamma-1}} < 1 + \xi_0$, *то існують сталі* ρ, M, q *такі, що задача (1), (2) має єдиний* ρ*-розв'язок, який належить множині* $\mathcal{U}_2(\rho, M, q)$.

Доведення. Спочатку вибираємо сталі ρ, M, q. Нехай

$$M > \left|\frac{a_2}{a_3} + (1 + \xi_0)\gamma c^{\gamma-1}\right|^{-1},$$

$$q > (\gamma|c|^{\gamma-1})^{-1}\left(\left|\frac{a_2}{a_3}\right| + \left|\frac{a_2}{a_3} + \gamma c^{\gamma-1}(1+\xi_0)\right|\right).$$

Умови, що визначають вибір ρ, тут не наводяться; відзначимо лише, що ρ достатньо мале. Нехай $\mathcal{B}$ – простір неперервно диференційовних функцій $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ із нормою (5). Позначимо через $\mathcal{U}$ підмножину $\mathcal{B}$, кожний елемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ якої задовольняє умовам (7), причому $u(0) = 0$, $u'(0) = c$. Множина $\mathcal{U}$ замкнута й обмежена. Перетворимо рівняння (1) до вигляду

$$\gamma c^{\gamma-1}t(x'-c) = -\frac{a_2}{a_3}(x-ct) - $$
$$-t\sum_{r=2}^{\gamma} C_\gamma^r c^{\gamma-r}(x'-c)^r - \frac{1}{a_3} f(t,x,x')$$

та будемо далі розглядати диференціальне рівняння

$$x' = c + (\gamma c^{\gamma-1}t)^{-1}\left(-\frac{a_2}{a_3}(x-ct) - t\sum_{r=2}^{\gamma} C_\gamma^r \times\right.$$
$$\left.\times c^{\gamma-r}(u'(t)-c)^r - \frac{1}{a_3} f(t,u(t),u'(t))\right), \quad (8)$$

де $u \in \mathcal{U}$ — довільна фіксована функція. Далі проводимо міркування, цілком аналогічні доведенню теореми 1 із [4] (див. [4], стор. 302-305). При цьому позначаємо

$$\Phi_1 = \{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - ct| = Mt\xi(t)\},$$

$$\Phi_2 = \{(t,x) : t \in (0,\rho], |x - x_2(t)| = \eta t(\xi(t))^\lambda h\},$$

$$\Phi_3(\nu) = \{(t,x) : t \in (0,\rho],$$
$$|x - x_u(t)| = \nu t\xi(t)(-\ln t)\},$$

де ν – параметр, $\nu \in (0,1]$, λ, η – сталі, що задовольняють умови: якщо $-\dfrac{a_2}{a_3\gamma c^{\gamma-1}} < 1$, або якщо $-\dfrac{a_2}{a_3\gamma c^{\gamma-1}} > 1+\xi_0$, то $\lambda = 0$,

$$\frac{l_2+l_3}{|a_3|}\left|\frac{a_2}{a_3} + \gamma c^{\gamma-1}\right|^{-1} < \eta <$$
$$< \left(\gamma|c|^{\gamma-1} - \frac{l_2+l_3}{|a_3|}\right)\left|\frac{a_2}{a_3}\right|^{-1};$$

якщо ж $1 \leqslant -\dfrac{a_2}{a_3\gamma c^{\gamma-1}} < 1+\xi_0$, то $\lambda = \sigma$,

$$\eta > \frac{2(l_2+l_3)}{|a_3|}\left|(1+\sigma\xi_0)\gamma c^{\gamma-1} + \frac{a_2}{a_3}\right|^{-1}.$$

Далі міркуємо так само, як і при доведенні теореми 1. Встановлюємо, що задача (8), (2) має єдиний розв'язок $x_u \in \mathcal{U}$, або вибираємо такий розв'язок за визначеним правилом; вибір розв'язку здійснюється однозначно (див. [4], стор. 303). Далі визначаємо оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, вважаючи $\mathrm{T}u = x_u$, і доводимо, що цей оператор є оператором стиску. Для завершення доведення теореми 2 залишається застосувати принцип нерухомої точки Банаха.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных// Дифференциальные уравнения.— 1971.— **7**, N 9.— С.1575—1580.
2. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М.: Наука, 1967.— 472 с.
3. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений.— Минск: Наука и техника, 1972.— 664 с.
4. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши// Украинский математический журнал.— 2001.— **54**, N 3.— С.302—310.
5. *Немыцкий В. В. и Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений.— М.–Л.: ГИТТЛ, 1949.— 550 с.
6. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных// Известия вузов. Математика.— 1971.— N 9.— С.79—84.
7. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, \frac{dx}{dt}) = 0$// Ann. mat. pura ed appl.— 1959.— N 48.— P.97—102.
8. *Kowalski Z.* A difference method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. polon. math.— 1965.— **15**, N 2.— P.173—204.

Стаття надійшла до редколегії 15.08.2002