УДК 512.54

©2002 р. Р.І. Григорчук

Московський державний університет ім. М.В. Ломоносова, Москва

ЕРГОДИЧНІ ТЕОРЕМИ ТА ЕНТРОПІЯ НЕКОМУТУЮЧИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ

Доведено випадкову ергодичну теорему типу теореми Какутані. Введено поняття ентропії для динамічних систем із стаціонарною мірою. При цьому доведено теорему, аналогічну до теореми Абрамова-Рохліна про ентропію косого зсуву.

The random ergodic theorem of type Kakutani theorem is proved. The conception of entropy is introduced for dynamical systems with stationary measure. The theorem, which is analogous to the Abramov-Rohlin theorem on entropy of cross shift, is proved.

1. Вступ

Класична ергодична теорія має справу з динамічними системами вигляду (T, X, μ), де (X, μ) — простір з мірою, а T — вимірне перетворення X, що зберігає міру μ. Сучасніша точка зору на динамічні системи полягає у розгляді систем вигляду $(\bar{T}, X, \mu)$, де $\bar{T} = \{T_1, ..., T_n\}$ — набір перетворень, а міра μ — квазіінваріантна, тобто $(T_i)_*\mu \leq \mu$; $i = 1, ..., n$.

Спроби довести ергодичні теореми типу теорем Біркгофа або фон Неймана, а також побудувати ентропійну теорію для таких систем наштовхуються на значні труднощі. Ситуація стає кращою, коли зробити припущення, що міра μ стаціонарна, тобто задовольняє співвідношення

$$\mu = \sum_{i=1}^{m} p_i (T_i)_* \mu \tag{1}$$

для деякого розподілу ймовірностей $\bar{P} = \{p_1, ..., p_m\}$, $p_i > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{m} p_i = 1$.

Метою цієї роботи є довести випадкову ергодичну теорему типу теореми Какутані та ввести поняття ентропії для динамічних систем із стаціонарною мірою, довівши при цьому теорему, аналогічну до теореми Абрамова-Рохліна [1] про ентропію косого зсуву.

Динамічні системи $(\bar{T}, X, \mu)$ можна інтерпретувати як системи (G, X, μ), де G — група або напівгрупа перетворень простору X, породжена перетвореннями $T_1, ..., T_m$. При вивченні групових дій стаціонарні міри з'являються, наприклад, в теорії Фюрстенберга границі Пуассона [2], а також при вивченні граничних множин Клейнових груп. Напівгрупи і асоційовані з ними стаціонарні міри виникають при вивченні фракталів [3], в матричних проблемах та інших питаннях.

Результати цієї роботи відносяться до теорії дії зі стаціонарною мірою вільної напівгрупи. Подальший їх розвиток, а також поширення ергодичної теорії дій із стаціонарною мірою на інші групи та напівгрупи є першочерговою задачею.

2. Конструкція косого зсуву

Далі всюди в роботі ми вважатимемо зафіксованою динамічну систему $D = (\bar{T}, X, \mu)$, $\bar{T} = \{T_1, ..., T_m\}$, де міра μ є $(\bar{T}, \bar{P})$-стаціонарною (тобто задовольняє (1)) для деякого фіксованого розподілу ймовірностей $\bar{P} = \{p_1, ..., p_m\}$. З системою D пов'яжемо косий зсув Q і стаціонарний марковський процес на X наступним чином.

Нехай (σ, Ω, ν) — зсув Бернуллі, породжений розподілом $\bar{P}$, тобто:

$\Omega = \{1, ..., m\}^{\mathbb{N}}$ — простір нескінченних вправо послідовностей $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n...$ символів алфавіту $Z = \{1, ..., m\}$;

ν — міра Бернуллі, задана розподілом $\bar{P}$ на σ-алгебрі множин, породжених циліндричними множинами;

$\sigma : \Omega \to \Omega$ — лівий зсув, $(\sigma\omega)_n = \omega_{n+1}$, $n \geq 1$.

Нехай Z^* — множина усіх скінченних слів над алфавітом Z, яку також будемо розглядати як вільну напівгрупу, в якій добутком слів $u, v \in Z^*$ є слово uv. Циліндрична множина $C_\omega = \omega\Omega$ визначається як множина тих послідовностей, що починаються зі слова ω. Міра такої множини визначається співвідношенням

$$\nu(C_\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} ... p_{\omega_n},$$

якщо $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n \in Z^*$.

Слову $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n$ відповідає перетворення

$$T_\omega = T_{\omega_n} \circ ... \circ T_{\omega_2} \circ T_{\omega_1},$$

що є композицією перетворень T_{ω_1}, T_{ω_2},..., T_{ω_n} (оскільки перетворення діють зліва, то композиція перетворень, що відповідають літерам слова ω, пишеться в протилежному напрямку). Таким чином, виникає дія вільної напівгрупи $G = FS_m$ з m твірними $T_1, ..., T_m$ на просторі X (ця дія може бути неточною, тобто для непорожнього слова ω перетворення T_ω може бути тотожним).

Косий зсув $Q : X \times \Omega \to X \times \Omega$ визначається співвідношенням

$$Q(x, \omega) = (T_{\omega_1}x, \sigma\omega),$$

де ω_1 — перший символ послідовності ω.

Нагадаємо, що динамічна система називається ергодичною, якщо вона має тільки тривіальні інваріантні множини, тобто $\emptyset$ і X за модулем множин μ-міри нуль. Наступне твердження узагальнює добре відомий факт (вперше згаданий в [4]) з випадку інваріантної міри на випадок стаціонарної міри.

Твердження 1. *a) Міра $\mu \times \nu$ є Q-інваріантною тоді й тільки тоді, коли μ є $(\bar{T}, \bar{P})$-стаціонарною мірою.*

b) Динамічна система D ергодична тоді й тільки тоді, коли ергодичним є перетворення Q.

Це твердження доводиться аналогічно як і у випадку інваріантної міри [4] і ми на цьому зупинятися не будемо. Отже, маємо динамічну систему $(Q, X\times\Omega, \mu\times\nu)$ з інваріантною мірою, яка надалі відіграватиме значну роль.

Визначимо стаціонарний марковський процес $\{æ_n\}$ на X з перехідними ймовірностями

$$p(x, A) = \sum_{i=1}^{m} p_i \chi_A(T_i x),$$

де χ_A — характеристична функція множини A. З процесом $\{æ_n\}$ пов'язані оператори M і $\mathcal{M}$, що відповідно діють на функції і міри наступним чином:

$$(Mf)(x) = \sum_{i=1}^{m} p_i f(T_i x),$$

$$(\mathcal{M}f)(\mu) = \sum_{i=1}^{m} p_i (T_i)_* \mu.$$

Стаціонарність міри μ означає, що вона є нерухомою точкою оператора $\mathcal{M}$. Процес $\{x_n\}$ називається ергодичним, якщо в просторі $L^1(X, \mu)$ M-інваріантними функціями є тільки сталі функції. В [4] доведено, що ергодичність процесу $\{æ_n\}$ є еквівалентною ергодичності процесу $\{x_n\}$. Надалі ми не будемо використовувати процес $\{æ_n\}$, однак потрібно мати на увазі, що він має безпосереднє відношення до доведення ергодичних теорем, про які йде мова в наступному розділі.

3. Ергодичні теореми

Спочатку нагадаємо ергодичну теорему Елтона [5], що відіграє значну роль при вивченні статистичних властивостей фракталів [3].

Нехай (X, d) — метричний простір, у якому множини скінченного діаметра є відносно компактними (тобто їхнє замикання компактні). Нехай $T_i : X \to X$; $i = 1, ..., m$, — ліпшіцеві перетворення, тобто існують числа $\lambda_i, i = 1, ..., m$, такі, що

$$d(T_i(x), T_i(y)) \leq \lambda_i d(x, y)$$

для довільних $x, y \in X$. Припустимо, що система перетворень $\bar{T} = \{T_1, ..., T_m\}$ є стискуючою у середньому, тобто існує $\lambda < 1$ таке, що для довільних $x, y \in X$ правильна нерівність

$$\prod_{i=1}^{m} d(T_i(x), T_i(y))^{p_i} \le \lambda d(x, y).$$

Відомо [5], що при такій умові існує єдина $(\bar{T}, \bar{P})$-стаціонарна міра μ, яка є притягуючою нерухомою точкою оператора $\mathcal{M}$.

Теорема 1 [5]. *Нехай система $(\bar{T}, X, \mu, d)$ задовольняє сформульовані вище умови і ν — бернуллівська міра на Ω, визначена розподілом $\bar{P}$.*

Тоді для кожної точки $x \in X$ існує борелівська підмножина $\Delta_x \subset \Omega$ така, що $\nu(\Delta_x) = 1$ і для кожної точки $\omega \in \Delta_x$, $\omega = \omega_1\omega_2...$ і неперервної функції $f \in C(X)$ маємо поточкову збіжність:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(T_{\omega_k} \circ T_{\omega_{k-1}} \circ ... \circ T_{\omega_1} x) \to \int\limits_X f d\mu.$$

Тобто теорема стверджує, що для множини послідовностей ω повної міри середні за Чезаро значень функції f вздовж траєкторії x, $T_{\omega_1}x$,..., $T_{\omega_1...\omega_n}x$, визначеної послідовністю ω, збігаються до середнього значення функції f.

Теорема Елтона є спеціальним випадком випадкової ергодичної теореми Какутані (з більш сильними твердженнями, але і при значно сильніших припущеннях), до узагальнення якої ми і приступаємо. У розділі про ентропію нам знадобиться такий варіант випадкової ергодичної теореми.

Теорема 2. *Нехай $(\bar{T}, X, \mu)$ динамічна система з $(\bar{T}, \bar{P})$-стаціонарною мірою і $f_1, ..., f_m \in L^1(X, \mu)$. Тоді для ν-майже кожної послідовності $\omega = \omega_1\omega_2... \in \Omega$ середні*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{\omega_{i+1}}(T_{\omega_1\omega_2...\omega_i} x)$$

збігаються μ-майже всюди до деякої вимірної M-інваріантної функції $\tilde{f}_\omega \in L^1(X, \mu)$ і має місце співвідношення

$$\int\limits_\Omega \left(\int\limits_X \tilde{f}_\omega(x) d\mu(x) \right) d\nu(\omega) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \int\limits_X f_i(x) d\mu(x). \qquad (2)$$

Ця теорема узагальнює теорему Какутані у двох напрямках. По-перше, в [4] розглядався випадок, коли всі функції $f_1, ..., f_m$ рівні між собою, а, по-друге, міра μ мала бути інваріантною.

Схема доведення.

Розглянемо на $X \times \Omega$ функцію $F(x, \omega)$, визначену умовою $F(x, \omega) = f_{\omega_1}(x)$, якщо $\omega = \omega_1\omega_2...$, і застосуємо до неї індивідуальну ергодичну теорему Біркгофа, згідно з якою

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} F(Q^i(x, \omega)) \to \tilde{F}(x, \omega) \qquad (3)$$

$\mu \times \nu$-майже всюди, де $\tilde{F} \in L^1(X \times \Omega, \mu \times \nu)$, а Q — косий зсув. Крім того,

$$\sum_{i=1}^{n} F(Q^i(x, \omega)) = \sum_{i=1}^{n} f_{\omega_{i+1}}(T_{\omega_1...\omega_i} x).$$

З (3) випливає, що для множини точок ω ν-міри 1 збіжність в (3) має місце μ-майже всюди. Крім того, функція $\tilde{F}$ є Q-інваріантною та

$$\int F(x, \omega) d\mu \times \nu = \int \tilde{F}(x, \omega) d\mu \times \nu.$$

Таким чином, функція $\tilde{f}_\omega(x) = \tilde{F}(x, \omega)$ є M-інваріантною і має місце співвідношення (2).

Зауважимо, що у випадку, коли динамічна система ергодична, функція $\tilde{f}_\omega(x)$ є сталою при майже всіх ω, причому величина цієї константи не залежить від ω.

Тепер ми сформулюємо індивідуальну ергодичну теорему для дії вільних напівгруп, яка була доведена в [6] і яка подібна до теореми 2.

Розподіл ймовірностей $\bar{P}$ можна трактувати як розподіл ймовірностей P на вільній напівгрупі $G = Z^*$, для якого $P(i) = p_i$, $i = 1, ..., m$. Позначимо через $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ послідовність розподілів на G таку, що

$$P_n(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} ... p_{\omega_m},$$

якщо ω — слово довжини $|\omega| = n$, причому $\omega = \omega_1\omega_2...\omega_n$, і $P_n(u) = 0$, якщо $|u| \neq n$. Нехай $\{M_n\}_{n=0}^{\infty}$ — послідовність операторів, що діють на функції за правилом

$$(M_n f)(x) = \sum_{|\omega|=n} P_n(\omega) f(T_\omega x). \qquad (4)$$

Зауважимо, що M_1 збігається з оператором M, означеним вище. У випадку, коли $\bar{P}$ є рівномірним розподілом $\left\{\frac{1}{m}, ..., \frac{1}{m}\right\}$, співвідношення (4) набуває вигляду

$$(M_n f)(x) = \frac{1}{m^n} \sum_{|\omega|=n} f(T_\omega x).$$

Отже, у цьому випадку оператор M_n є оператором усереднення по сфері радіуса n вільної напівгрупи.

Нарешті, означимо середні за Чезаро:

$$C_n f = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M_i f.$$

Теорема 3. *Нехай вільна напівгрупа $G = Z^*$ діє на просторі (X, μ) за допомогою перетворень $T_1, ..., T_m$ і міра μ є $(\bar{T}, \bar{P})$-стаціонарною.*

Тоді для довільного $p \in [1; \infty)$ і довільної функції $f \in L^p(X, \mu)$ середні $C_n f$ μ-майже всюди збігаються за нормою при $n \to \infty$ до M-інваріантної функції $\tilde{f} \in L^p(X, \mu)$, причому має місце співвідношення

$$\int f d\mu = \int \tilde{f} d\mu.$$

Якщо динамічна система (G, X, μ) ергодична, то $\tilde{f}$ є сталою функцією.

Напевно, ця теорема є першим кроком у напрямку отримання індивідуальних ергодичних теорем для дій некомутативних і, більше того, неаменабельних груп та напівгруп перетворень просторів, оснащених стаціонарною мірою. У випадку інваріантної міри такі теореми з'явилися спочатку в [7], [8], і доведені не тільки для вільних груп та напівгруп, але й для деяких гіперболічних груп [9].

4. Ентропія

У цьому розділі ми дамо визначення ентропії $h_{\bar{T}}$ динамічної системи $(\bar{T}, X, \mu)$, де μ є $(\bar{T}, \bar{P})$-стаціонарна міра, і доведемо теорему, що пов'язує $h_{\bar{T}}$ з ентропією косого зсуву і ентропією зсуву Бернуллі. Наш результат є спорідненим з теоремою Абрамова-Рохліна про ентропію косого зсуву.

Спочатку нагадаємо означення ентропії Колмогорова динамічної системи (S, Y, ξ), де S — перетворення простору Y і міра ξ є інваріантною. Ми будемо використовувати загальновідомі факти про розбиття і властивості ентропійної функції, які, наприклад, можна знайти в [10, 11].

Нехай $\alpha = \{A_1, ..., A_k\}$ — скінченне розбиття простору Y. Ентропією розбиття α відносно міри ξ називається величина

$$H(\alpha) = -\sum \xi(A_i) \log \xi(A_i).$$

Ентропією перетворення S відносно розбиття α і міри ξ називається число

$$h(\alpha, S) = h_\xi(\alpha, S) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(\alpha \vee s^{-1}\alpha \vee ... \vee s^{-n+1}\alpha)$$

(границя існує), а ентропією перетворення S називається число

$$h(S) = h_\xi(S) = \sup_\alpha h(\alpha, S),$$

де супремум береться за всіма скінченними розбиттями α. Даючи визначення ентропії $h_{\bar{T}}$, ми будемо дотримуватися схеми Колмогорова.

Нехай $\omega \in Z^*$ і α — розбиття простору X. Через α_ω позначимо розбиття

$$\bigvee_{u \leq \omega} T_u^{-1} \alpha,$$

де $u \leq \omega$ означає, що u є початком слова ω і перетин береться за всіма такими початками. Якщо $\omega = \omega_1...\omega_n... \in \Omega$, то $\alpha_\omega^{(n)}$ є розбиття $\bigvee_u T_u^{-1}\alpha$, де u пробігає множину слів $\{\emptyset, \omega_1, \omega_1\omega_2, ..., \omega_1\omega_2...\omega_n\}$. Через $\nu(\omega)$ позначимо $\nu(C_\omega)$, де C_ω — циліндрична множина, визначена словом ω.

Нехай

$$h_\mu^{(n)}(\alpha, \bar{T}) = \frac{1}{n} \sum_{|\omega|=n} \nu(\omega) H_\mu(\alpha_\omega) =$$

$$= \frac{1}{n} \int_X H_\mu \left(\alpha_\omega^{(n)} \right) d\nu(\omega)$$

і

$$h_\mu(\alpha, \bar{T}) = \lim_{n \to \infty} h_\mu^{(n)}(\alpha, \bar{T}) \qquad (5)$$

Нижче буде доведено, що границя існує.

Нарешті, припустимо, що

$$h(\bar{T}) = h_\mu(\bar{T}) = \sup_\alpha h_\mu(\alpha, \bar{T}).$$

Це і є ентропія системи перетворень $\bar{T} = \{T_1, ..., T_m\}$ або дії вільної напівгрупи G відносно $(\bar{T}, \bar{P})$-стаціонарної міри μ.

Теорема 4. *Ентропія $h(\bar{T})$ пов'язана з ентропією косого зсуву Q і ентропією $h_\nu(\sigma)$ зсуву Бернуллі співвідношенням*

$$h_\mu(\bar{T}) = h_{\mu\times\nu}(Q) + h_\nu(\sigma).$$

Доведення. Нехай $\{A_\omega^i\}_{i=1}^{S(i)}$ — множина атомів розбиття α_ω, $\omega \in Z^*$ і β — скінченне розбиття Ω. Тоді маємо

$$\frac{1}{n} H_{\mu\times\nu} \left(\bigvee_{i=1}^{n-1} Q^{-i}(\alpha \times \beta) \right) =$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{|\omega|=n} \sum_i \nu(\omega) \mu(A_\omega^i) \log \nu(\omega) \mu(A_\omega^i) =$$

$$= -\frac{1}{n} \sum_{|\omega|=n} \nu(\omega) \sum_i \mu(A_\omega^i) \log \mu(A_\omega^i) -$$

$$-\frac{1}{n} \sum_i \mu(A_\omega^i) \sum_{|\omega|=n} \nu(\omega) \log \nu(\omega) =$$

$$= h_\mu^{(n)}(\alpha, \bar{T}) - \frac{1}{n} \sum_{|\omega|=n} \nu(\omega) \log \nu(\omega).$$

Оскільки $\nu(\omega) = p_{\omega_1} p_{\omega_2} ... p_{\omega_n}$, то

$$-\frac{1}{n} \sum_{|\omega|=n} \nu(\omega) \log \nu(\omega) =$$

$$= -\sum_{|\omega|=n} \nu(\omega) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log p_{\omega_i}, \qquad (6)$$

і з теореми 2, застосованої до множини сталих функцій $f_1 = -\log p_1$, ..., $f_m = -\log p_m$, випливає, що (6) збігається до сталої функції, значення якої збігаються з

$$\sum_{i=1}^m p_i \int f_i d\mu = -\sum p_i \log p_i = h_\nu(\sigma),$$

тобто з ентропією зсуву Бернуллі.

Таким чином, доведено співвідношення

$$h_{\mu\times\nu}(\alpha \times \beta, Q) = h_\mu(\alpha, \bar{T}) + h_\nu(\sigma), \qquad (7)$$

а також доведено, що границя (5) існує. Взявши в (7) супремум за α, отримуємо нерівність

$$h_{\mu\times\nu}(Q) \geq h_\mu(\bar{T}) + h_\nu(\sigma).$$

Доведемо протилежну нерівність. Зауважимо, що

$$h_{\mu\times\nu}(Q) = \sup_{\alpha,\beta} h_{\mu\times\nu}(\alpha \times \beta, Q),$$

де супремум береться за скінченними розбиттями α, β просторів X, Ω. Справді, якщо R_1, R_2, R_3 — σ-алгебри просторів X, Ω, $X \times \Omega$ і якщо α_n, β_n — зростаючі послідовності розбиттів просторів X, Ω такі, що

$$\bigvee_{n=1}^\infty \alpha_n = R_1,$$

$$\bigvee_{n=1}^\infty \beta_n = R_2,$$

то

$$\bigvee_{n=1}^\infty (\alpha_n \times \beta_n) = R_3,$$

а, отже,

$$h_{\mu\times\nu}(Q) = \lim_{n\to\infty} h_{\mu\times\nu}(\alpha \times \beta, Q).$$

Скористаємося нерівністю

$$h_{\mu\times\nu}(\alpha \times \beta, Q) \leq$$

$$\leq h_\nu(\sigma) + \frac{1}{n}\int\limits_\Omega H_n(\alpha_\omega^{(n)})d\nu(\omega) =$$

$$= h_\nu(\sigma) + h_\mu^{(n)}(\alpha, \bar{T}), \qquad (8)$$

яку можна знайти в [10] на сторінці 257, де використано інші позначення. В [10] ця нерівність відтворює фрагмент доведення формули Абрамова-Рохліна для ентропії косого зсуву. Ця частина доведення теореми Абрамова-Рохліна не використовує властивості міри μ бути інваріантною відносно перетворень T_i, $i = 1, ..., m$, що важливо для нашого доведення.

Перейшовши в (8) до границі, і взявши супремум за α і β, отримаємо протилежну нерівність

$$h_{\mu\times\nu}(Q) \leq h_\mu(\bar{T}) + h_\nu(\sigma).$$

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Абрамов Л.М., Рохлин В.А.* Энтропия косого произведения сохраняющих меру преобразований // Весник Ленинградского университета.— 1962.— **17**.— С. 5–13.

2. *Furstenberg H.* Random walks and discrete subgroups of Lie groups. // Adv. in Probab. Related topics.— Vol. 1 (P. Ney ed.), Dekker, New-York (1971).— P. 1–63.

3. *Barnsley M.* Fractals Every where.— New York: Academik Press, 1988.

4. *Kakutani S.* Random ergodic Theorems and Markoff processes with a stable distribution // Proc. 2nd Berkeley Symp. Math. Stat. and Prob., 1951.— P. 247–261.

5. *Elton J.* An ergodik theorem for iterated maps // Ergod. Theory Dynam. Systems, 1987.— Vol. 7.— P. 481–488.

6. *Григорчук Р.И.* Эргодические теоремы для действий свободной группы // Труды МИАН.— 2000.— **231**.— С. 119–133.

7. *Григорчук Р.И.* Индивидуальная эргодическая теорема для действий свободных групп // Тезисы докладов VIII школы по теории операторов в функциональных пространствах. Часть 1.— Тамбов, 1987.— С. 21.

8. *Nevo A., Stein E.M.* A generalization of Birkhoff ergodic theorem // Acta Math.— 1994.— **173**.— P. 135–154.

9. *Буфетов А.Н.* Операторные эргодические теоремы для действий свободных полугрупп и групп // Функциональный анализ и приложения.— 2000.— **34**, N 4.— С. 1–17.

10. *Peterson K.* Ergodic theory.— Cambridge University Press, 1983.

11. *Billingsley P.* Ergodic Theory and Information.— New York: John Wiley and Sons, 1965.

Стаття надійшла до редколегії 17.05.2002