УДК 517.929

©2002 р. Я.Й. Бігун

Чернівецький національний університет ім. Юрія Федьковича, Чернівці

ДОСЛІДЖЕННЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Для багаточастотних систем зі сталим запізненням одержано оцінку похибки методу усереднення на скінченному проміжку.

For the multifrequency systems with the delay in finite segment the estimate of error of averaging method is obtained.

Багаточастотні системи диференціальних рівнянь асимптотичним методом і методом усереднення досліджувались у працях [1 - 4] та ін. Характерною особливістю таких систем є резонанси, що описуються раціональною співвимірністю чи майже співвимірністю частот у деякі моменти часу.

У монографії [2] для широких класів багаточастотних систем метод усереднення обгрунтований на підставі оцінок осциляційних інтегралів. Аналогічні оцінки для систем із запізненням, які в процесі еволюції проходять через резонанс, побудовані у [5, 6]. На відміну від [7, 8], де резонанси описувались тими ж співвідношеннями, що й для систем без запізнення, у [5, 6] враховано вплив запізнення в цих співвідношеннях.

У даній роботі розглядається система з m частотами і сталим запізненям. Не передбачається, як це робилось в [5], що праві частини системи диференціальних рівнянь - тригонометричні поліноми за частиною швидких змінних.

1. Усереднена система. Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{d\tau} = X(\tau, x, x_h, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + Y(\tau, x, x_h, \varphi, \varphi_\Delta, \varepsilon). \qquad (1)$$

Тут $x, x_h \in D$, D - обмежена область в $\mathbb{R}^n$, $\varphi, \varphi_\Delta \in \mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 << 1$, $\tau = \varepsilon t \in [0, L]$, $L = const > 0$; $x_h(\tau) = x(\tau - \varepsilon h)$, $\varphi_\Delta(\tau) = \varphi(\tau - \varepsilon\Delta)$, $(n+m)$-вимірна вектор-функція $A(\tau, x, z, u, v, \varepsilon) = [X(\tau, x, z, u, v, \varepsilon), Y(\tau, x, z, u, v, \varepsilon)]$ 2π-періодична за змінними u_ν, v_ν, $\nu = 1, \ldots, m$.

Умовою резонансу в системі (1) служить виконання співвідношення

$$\gamma_{kl} \equiv (k, \omega(\tau)) + (l, \omega(\tau - \varepsilon\Delta)) \approx 0 \qquad (2)$$

у деяких точках (τ, ε), $\tau \geq \tau_1 = \varepsilon\Delta$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, де k і l - цілочислові вектори, $k + l \neq 0$, $(\cdot, \cdot)$ - скалярний добуток. Коли τ - точка із $[0, \tau_1)$, то під резонансом розумітимемо виконання рівності

$$(k, \omega(\tau)) + (l, \omega(0)) = 0.$$

Якщо $k + l = 0$, то для фіксованого вектора $k \neq 0$ і $\tau \geq \tau_1$ внаслідок малості запізнення маємо $(k, \omega(\tau) - \omega(\tau - \varepsilon\Delta)) = O(\varepsilon)$. Отже, система (1) у цьому випадку володіє властивістю застрягання в резонансній зоні [3, с. 48]. Тому в усередненій системі збережемо складові, для яких $k + l = 0$. Для цього введемо змінну $\psi = \varphi - \varphi_\Delta$ і усереднимо праву частину (1) за змінною φ:

$$\overline{A}(\tau, x, z, \psi, \varepsilon) = = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} A(\tau, z, \varphi, \varphi - -\psi, \varepsilon) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m = \sum_{k+l=0} A_{kl}(\tau, x, z, \varepsilon) e^{-i(k,\psi)}.$$

Для $\tau \geq \tau_1$ маємо $\psi(\tau, \varepsilon) - \omega(\tau)\Delta = O(\varepsilon)$. Враховуючи цю оцінку, побудуємо усереднену систему у вигляді

$$\frac{d\overline{x}}{d\tau} = \overline{X}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_h, \overline{\psi}, \varepsilon),$$

$$\frac{d\overline{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\tau)}{\varepsilon} + \overline{Y}(\tau, \overline{x}, \overline{x}_h, \overline{\psi}, \varepsilon), \qquad (3)$$

де $\overline{\psi} = \omega(\tau)\Delta$.

Розглянемо приклад двочастотної системи зі сталим запізненням

$$\frac{dx}{d\tau} = \cos(2\varphi_1 - 6\varphi_2 - \varphi_{1\Delta} + 4\varphi_{2\Delta}),$$

$$\frac{d\varphi_1}{d\tau} = \frac{2+4\tau}{\varepsilon}, \quad \frac{d\varphi_2}{d\tau} = \frac{1+\tau}{\varepsilon}, \tau \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

$$\varphi_\Delta(\tau) = \varphi\left(\tau - \frac{\pi}{2}\varepsilon\right).$$

Система має резонанс при $\tau = 0$, оскільки $(k, \omega(\tau)) + (l, \omega(0)) = 2\tau$. Зауважимо, що $(k, \omega(\tau)) = 2(\tau - 1) \neq 0$. Використавши асимптотику інтеграла Френеля для $\tau = 1/2$, одержимо

$$x(\tau, \varepsilon) - \overline{x} = \int\limits_0^\tau \cos\frac{\tau^2}{2\varepsilon} d\tau =$$

$$= \frac{\sqrt{\pi\varepsilon}}{2} + O(\sqrt[4]{\varepsilon^3}) = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Оцінка осциляційного інтеграла. Розглянемо осциляційний інтеграл

$$I_\lambda(t, \tau, \overline{s}, \varepsilon) = \int\limits_t^{t+\tau} f(s, \varepsilon) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon} \times \int\limits_{\overline{s}}^{s} \gamma_\lambda(z, \varepsilon) dz\right\} ds, \qquad (4)$$

де $\gamma_\lambda(\tau, \varepsilon) = (\lambda^{(1)}, \omega(\tau)) + (\lambda^{(2)}, \omega(\tau - \varepsilon\Delta))$, $\lambda = [\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}]$ - довільний $2m$-вимірний вектор, $\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} \neq 0$.

Теорема 1. *Нехай виконуються наступні умови:*

1) функції $\omega_\nu \in \mathbb{C}^m(\mathbb{R})$, $\nu = 1, \ldots, m$; $\omega_\nu^{(j)}(\tau)$ - рівномірно неперервні на $\mathbb{R}$ для $j = 0, 1, \ldots, m-1$ і обмежені сталою σ_1 для $j = 1, \ldots, m$;

2) визначник Вронського для системи функцій $\{\omega_1(\tau), \ldots, \omega_m(\tau)\}$

$$\det V(\tau) \neq 0, \quad \tau \in \mathbb{R}$$

і

$$\sup_{\tau \in \mathbb{R}} \|V^{-1}(\tau)\| \leq \sigma_2;$$

3) $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ вектор-функція $f(\cdot, \varepsilon) \in C^1(\mathbb{R})$;

4) $\|\lambda^{(1)}\|$ або $\|\lambda^{(2)}\|$ обмежені зверху величиною $N_0\varepsilon^{-\beta}$, $0 \leq \beta < 1$, $N_0 > 0$.

Тоді для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\tau \in [0, L]$, $\overline{s} \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon}_0]$, $\overline{\varepsilon}_0(\sigma_1, \sigma_2, \beta) \leq \varepsilon_0$, та дійсних векторів $\lambda^{(1)}$ і $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} \neq 0$, справджується нерівність

$$\|I_\lambda(t, \tau, \overline{s}, \varepsilon)\| \leq c_1 \sqrt[m]{\varepsilon} \left(\sup_{G_1} \|f(\tau, \varepsilon)\| + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|} \sup_{G_2} \left\|\frac{df(\tau, \varepsilon)}{d\tau}\right\|\right), \qquad (5)$$

де $G_1 = [t, t+L] \times (0, \overline{\varepsilon}_0]$, $c_1 > 0$ і не залежать від $\lambda, t, \overline{s}$ і ε; $\|\lambda^{(\nu)}\| = |\lambda_1^{(\nu)}| + \cdots + |\lambda_m^{(\nu)}|$, $\nu = 1, 2$.

Доведення. Запровадимо такі позначення:

$$V_1(\tau, \varepsilon) = V(\tau - \varepsilon\Delta) - V(\tau),$$

$$\Omega_\lambda(\tau, \varepsilon) = (\gamma_\lambda(\tau, \varepsilon), \gamma'_\lambda(\tau, \varepsilon), \ldots, \gamma_\lambda^{(m-1)}(\tau, \varepsilon))^T.$$

Тоді

$$V(\tau)\lambda^{(1)} + V(\tau - \varepsilon\Delta)\lambda^{(2)} = \Omega_\lambda(\tau, \varepsilon). \qquad (6)$$

Оскільки $\|V_2(\tau, \varepsilon)\| \leq \varepsilon\sigma_1 m$, то із (6)

$$\|\Omega_\lambda(\tau, \varepsilon)\| \geq \frac{\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|}{\sigma_2} -$$

$$-\varepsilon\sigma_1\Delta m\|\lambda^{(2)}\|/\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\| \geq \|\lambda^{(1)} +$$

$$+\lambda^{(2)}\|/(2\sigma_2), \qquad (7)$$

якщо $\varepsilon_0 \leq (2\sigma_1\sigma_2\Delta m)^{1/(\beta-1)}$

Із рівномірної неперервності функцій $\omega_\nu^{(j)}(\tau)$, $j = 0, \ldots, m-1$ на $\mathbb{R}$ випливає, що $\forall d > 0$ $\exists \delta > 0$ таке, що $\forall \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ таких, що $|\tau_2 - \tau_1| < \delta$ виконується нерівність $|\omega_\nu^{(j)}(\tau_2) - \omega_\nu^{(j)}(\tau_1)| < d$, як тільки $|\tau_2 - \tau_1| < d$. Подамо проміжок $[t, t+\tau]$ у вигляді об'єднання

$$[t, t+\tau] = \bigcup_{\nu=0}^{r} T_\nu, T_\nu = [t_\nu, t_\nu + \delta], t_\nu = t + \nu\delta,$$

$\nu = 0, \ldots, r-1; T_r = [t_r, \tau], r \leq L \leq \delta.$

Зафіксуємо $\lambda^{(1)}$ і $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(1)} + \lambda^{(1)} \neq 0$. Із (7) випливає, що $\forall (\tau, \varepsilon) \in T_\nu \times [0, \varepsilon_0]$ знайдеться $q = q(\tau, \varepsilon)$, $0 \leq q \leq m-1$, таке, що

$$|\gamma_\lambda^{(q)}| \geq \max_{0 \leq j \leq m-1} |\gamma_\lambda^{(j)}(\tau, \varepsilon)| \geq \frac{\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|}{2m\sigma_2}.$$

Нехай $q = q(\overline{\tau}_\nu, 0)$, де $\overline{\tau}_\nu = t_\nu + 0.5\delta$ і $d = (4m\sigma_2)^{-1}$. Тоді

$$|\gamma_\lambda^{(q)}| \geq \frac{\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|}{4m\sigma_2}, (\tau, \varepsilon) \in T_\nu \times [0, \varepsilon_0]. \quad (8)$$

Справді,

$$|\gamma_\lambda^{(q)}(\tau, \varepsilon)| \geq |\gamma_\lambda^{(q)}(\overline{\tau}_\nu, 0)| -$$
$$-|(\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}, \omega^{(q)}(\overline{\tau}_\nu) - \omega^{(q)}(\tau))| -$$
$$|(\lambda^{(2)}, \omega^{(q)}(\tau) - \omega^{(q)}(\tau - \varepsilon\Delta))| \geq$$
$$\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|/(4m\sigma_2).$$

Аналогічно для $j = 0, 1, \ldots, m-1$ доводиться ще одна нерівність

$$|\gamma_\lambda^{(j)}(\tau, \varepsilon)| \leq \sigma_3 |\gamma_\lambda^{(q)}(\tau, \varepsilon)|, (\tau, \varepsilon) \in T_\nu \times [0, \varepsilon_0], \quad (9)$$

де $\sigma_3 = 1 + m/4 + 4m\sigma_1\sigma_2$.

Перейдемо до оцінки осциляційного інтеграла (5) на кожному із проміжків T_ν. Нехай $q = 0$. Тоді на T_ν резонанси відсутні, оскільки

$$|\gamma_\lambda(\tau, \varepsilon)| \geq \sigma_3 \|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|/\sigma_4, \sigma_4 = 4m\sigma_2. \quad (10)$$

Проінтегрувавши (5) частинами у межах від t_ν до $t_{\nu+1}$ і врахувавши нерівності (9) і (10), одержимо

$$\left\| \int_{t_\nu}^{t_{\nu+1}} g_\lambda(s, \varepsilon) ds \right\| \leq \frac{\sigma_4 \varepsilon}{\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|} \times$$
$$\times \left[(2 + \sigma_3\delta) \sup_{G_1} \|f(\tau, \varepsilon)\| + \sup_{G_1} \left\| \frac{df(\tau, \varepsilon)}{d\tau} \right\| \right], \quad (11)$$

де $g_\lambda(\tau, \varepsilon) = f(\tau, \varepsilon) \exp\left\{ \frac{i}{\varepsilon} \int_{\overline{s}}^{s} \gamma_\lambda(z) dz \right\} ds.$

Нехай $q > 0$. Припустимо, що $\mu = \min(2, \delta/p)$, $p = (m^2 - m + 2)/2$, $\chi(\varepsilon) = \sigma_4^{-1} \varepsilon^{\frac{m-1}{m}}$. Множину $r_\lambda(\varepsilon) = \{\tau \in \mathbb{R} : |\gamma_\lambda(\tau, \varepsilon)| \leq \chi(\varepsilon) \|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|\}$ назвемо резонансною. Нехай

$$r_\lambda^\nu = T_\nu \bigcap r_\lambda(\varepsilon).$$

Якщо виконується нерівність (8), то $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ функція $\gamma_\lambda^{(q-1)}(\tau, \varepsilon)$ має на T_ν не більше одного нуля $\tau_\nu^{(q-1)}$ або не більше одного разу входить у резонансну зону. Виділимо із T_ν проміжок $[\tau_\nu^{(q-1)} - \mu/2, \tau_\nu^{(q-1)} + \mu/2]$ у першому і $[\nu\delta, \nu\delta + \mu/2]$ або $[(\nu+1)\delta - \mu/2, (\nu+1)\delta]$ у другому випадку. Для τ, які не належать таким проміжкам, маємо

$$|\gamma_\lambda^{(q-1)}(\tau, \varepsilon)| \geq \frac{\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|}{\sigma_4} \frac{\mu}{2}.$$

Кількість нулів і входжень у резонансну множину функції $\gamma_\lambda^{(q-j)}(\tau, \varepsilon)$, $j = 2, \ldots, m$, $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ не перевищує j. Позначимо об'єднання відповідних проміжків для $j = 1, \ldots, q$ через R_ν, а замикання множини $T_\nu \setminus R_\nu$ через N_ν. Тоді

$$N_\nu = \bigcup_{\alpha=1}^{p_1} [a_\alpha, b_\alpha], \quad p_1 \leq p.$$

Для $\tau \in [a_\alpha, b_\alpha]$ і $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$ та $j = 1, \ldots, q$ маємо

$$|\gamma_\lambda^{(q-j)}(\tau, \varepsilon)| \geq \frac{\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|}{\sigma_4} \left(\frac{\mu}{2}\right)^j \geq$$
$$\geq \frac{\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|}{\sigma_4} \left(\frac{\mu}{2}\right)^{m-1}. \quad (12)$$

Якщо припустити, що $\mu = 2\sqrt[m]{\varepsilon}$, то для $\tau \subset N_\nu$ і всіх $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, враховуючи, що $\gamma_\lambda(\tau, \varepsilon)$ зберігає знак, одержимо

$$\left\| \int_{N_\alpha} g_{kl}(s, \varepsilon) ds \right\| \leq \frac{\sigma_4 \varepsilon^{1/m}}{\|\lambda^{(1)} + \lambda^{(2)}\|} \times$$
$$\times \left(4p \sup_{G_1} \|f\| + \delta \sup_{G_1} \left\| \frac{df}{d\tau} \right\| \right). \quad (13)$$

На резонансній множині R_ν

$$\left\|\int\limits_{R_\nu} g_\lambda(s,\varepsilon)ds\right\| \le (p-1)\mu\sup_{G_1}\|f(\tau,\varepsilon)\|. \quad (14)$$

Нехай $\sigma_6=(2\delta^{-1}+\sigma_3)\sigma_5$, $\sigma_5=\sigma_4 L$, $c_1=\max(\sigma_5,\sigma_6)$ і ε_0 задовольняє нерівність

$$\varepsilon^{\frac{m-1}{m}}(2+\delta\sigma_3)\sigma_6\le 2p\sigma_6+m.$$

Об'єднуючи нерівності (11), (13) і (14), одержимо оцінку (6). Теорему 1 доведено.

Припустимо, що замість умови 4) теореми 1 $\forall\lambda$, $\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}\neq 0$, маємо

$$\|\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}\|>\|\lambda^{(2)}\| \text{ або } \|\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}\|>\|\lambda^{(1)}\|. \quad (15)$$

Теорема 2. *Якщо виконуються умови 1) - 3) теореми 1 і одна із нерівностей (15), то $\exists c_1>0$ така, що для всіх $t\in\mathbb{R}$, $\tau\in[0,L]$, $\overline{s}\in\mathbb{R}$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справджується оцінка (6).*

Справді, у цьому випадку

$$\|\Omega_\lambda(\tau,\varepsilon)\|\ge\frac{\|\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}\|}{\|V^{-1}(\tau,\varepsilon)\|}(1-\varepsilon\Delta\|V_1(\tau,\varepsilon)\|)\ge$$

$$\ge\frac{\|\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}\|}{2\sigma_2},$$

якщо $\varepsilon_0\le(2\sigma_1\sigma_2 m\Delta)^{-1}$.

3. Обгрунтування методу усереднення. На підставі оцінки (6) вдається обгрунтувати метод усереднення для системи (1).

Теорема 3. *Нехай:*

1) функції $\omega_\nu\in\mathbb{C}^m[0,L]$ і визначник Вронського, побудований за системою функцій $\{\omega_1(\tau),\ldots,\omega_m(\tau)\}$, відмінний від нуля на $[0,L]$;

2) для кожного $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$ вектор-функція $A(\tau,x,z,u,v,\varepsilon)$ має в області G $[0,L]\times D\times D\times\mathbb{R}^m\times[0,\varepsilon_0]$ неперервні перші похідні за τ,x,z,u, обмежені разом із A сталою $a_1>0$, і $p\ge m+1$ похідних за змінною v;

3) на проміжку $[0,L]$ існує єдиний розв'язок усередненої системи (3), компонента $x(\tau)$ якого лежить в D разом із деяким ρ-околом;

4) для коефіцієнтів Фур'є вектор-функції $A(\tau,\overline{x}(\tau,\varepsilon),\overline{x}_h(\tau,\varepsilon),\overline{\psi}(\tau),\varepsilon)$ вздовж розв'язку $\overline{x}(\tau,\varepsilon)$, коли $(\tau,\varepsilon)\in G_2=[0,L]\times(0,\varepsilon_0]$ справджується нерівність

$$\sum_{k+l\neq 0}\left[\sup_{G_2}\|A_{kl}\|+\frac{1}{\|k+l\|}\times\right.$$

$$\times\left(\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial\tau}\right\|+a_1\left(\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x}\right\|+\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sup_{G_2}\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial z}\right\|\right)\right)\right]\le a_2;$$

5) виконується нерівність

$$\sum_{k+l=0}\sup\|A_{kl}\|\le a_3.$$

Тоді для досить малого $\varepsilon_0>0$, всіх $\tau\in[0,L]$ і $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$ справджується оцінка

$$\eta(\tau,\varepsilon)=\|x(\tau,\varepsilon)-\overline{x}(\tau,\varepsilon)\|+$$

$$+\|\varphi(\tau,\varepsilon)-\overline{\varphi}(\tau,\varepsilon)\|\le c_4\varepsilon^{1/m},$$

де стала $c_4>0$ і не залежить від ε.

Доведення. Розв'язок системи (1) існує на деякому максимальному півінтервалі $[0,\tau)$. Можна вважати, що

$$\tau>\tau_2, \tau_2=\varepsilon\theta, \theta=\max(h,\Delta).$$

Із систем (1) і (3) з однаковими початковими даними маємо

$$\eta(\tau,\varepsilon)\le 2a_1\int\limits_0^\tau\eta(s,\varepsilon)ds+$$

$$+\sum_{\substack{k+l\neq 0\\ \|l\|\le N}}\|\int\limits_{\tau_2}^{\tau}A_{kl}(s,\overline{x}(s,\varepsilon),\overline{x}_h(s,\varepsilon),\varepsilon)\times$$

$$\times\exp[i(k,\overline{\varphi}(s,\varepsilon)+i(l,\overline{\varphi}_\Delta(s,\varepsilon))]ds\|+$$

$$+\sum_{\substack{k+l=0\\ \|k\|\le N}}\|\int\limits_{\tau_2}^{\tau}A_{kl}(s,\overline{x},\overline{x}_h,\varepsilon)(e^{i(k,\overline{\varphi}-\overline{\varphi}_\Delta)}-$$

$$-e^{-i(k,\omega(s))\Delta})ds\|+\int\limits_0^{\tau_2}\|A(s,\overline{x},\overline{x}_h,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_\Delta,\varepsilon)-$$

$$-\overline{A}(s,\overline{x},\overline{x}_h,\overline{\psi},\varepsilon)\|ds+$$

$$+\int\limits_{\tau_2}^{\tau}\|\sum_{\|l\|\geq N}A_{kl}(s,\overline{x},\overline{x}_h,\varepsilon)\exp[i(k,\overline{\varphi})+$$

$$+i(l,\overline{\varphi}_\Delta)]ds\|=2a_1\int\limits_0^{\tau}\eta(s,\varepsilon)ds+$$

$$+\sum_{\substack{k+l\neq 0\\ \|l\|\leq N}}\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\|+R_1+R_2+R_N,$$

де

$$I_{kl}(\tau,\varepsilon)=\int\limits_{\tau_2}^{\tau}A_{kl}(s,\overline{x}(s,\varepsilon),\overline{x}_h(s,\varepsilon),\varepsilon)\times$$

$$\times\exp[i(k,\overline{\varphi}(s,\varepsilon))+i(l,\overline{\varphi}_\Delta(s,\varepsilon))]ds.$$

Скориставшись оцінкою залишку ряду Фур'є [9, с. 89], одержимо

$$R_N=\int\limits_{\tau_2}^{\tau}\|\sum_{\|l\|\geq N}A_{kl}(s,\overline{x},\overline{x}_h,\varepsilon)\exp[i(k,\overline{\varphi})$$

$$+i(l,\overline{\varphi}_\Delta)]ds\|$$

$$\leq(\tau-\tau_2)a_12^mN^{m-p}\leq 2^ma_1L\varepsilon^{1/m},\qquad(17)$$

якщо $N\geq\varepsilon^{-\beta}$, $\beta=(m(p-m))^{-1}$.

Для R_2 маємо:

$$R_2=\int\limits_0^{\tau_2}\|A(s,\overline{x},\overline{x}_h,\overline{\varphi},\overline{\varphi}_\Delta,\varepsilon)-$$

$$-\overline{A}(s,\overline{x},\overline{x}_h,\overline{\psi},\varepsilon)\|ds\leq 2\tau_2a_1\leq 2a_1\theta\varepsilon.\quad(18)$$

На підставі умови 1) і $\|l\|<\varepsilon^{-\beta}$ одержимо

$$R_1=\sum_{\substack{k+l\neq 0\\ \|l\|\leq N}}\|\int\limits_{\tau_2}^{\tau}A_{kl}(s,\overline{x}(s,\varepsilon),\overline{x}_h(s,\varepsilon),\varepsilon)\times$$

$$\times\exp[i(k,\overline{\varphi}(s,\varepsilon)+i(l,\overline{\varphi}_\Delta(s,\varepsilon))]ds\|+$$

$$\leq\sum_{\substack{k+l=0\\ \|l\|\leq N}}\int\limits_{\tau_2}^{\tau}\|A_{kl}(s,\overline{x},\overline{x}_h,\varepsilon)\|\|l\|\times$$

$$\times\max_{1\leq\nu\leq m}|\overline{\varphi}_\nu(s,\varepsilon)-\overline{\varphi}_\nu(s+\varepsilon\Delta,\varepsilon)-\omega_\nu(s)\Delta|ds\leq$$

$$\leq L\Delta(a_3+0.5\sigma_1\Delta)\varepsilon N_0\times$$

$$\times\sup_{G_2}\sum_{\substack{k+l\\ \|l\|\leq N}}\|A_{kl}(\tau,\overline{x},\overline{x}_h,\varepsilon)\|\leq c_2\varepsilon^{1-\beta}<c_2e^{1/m}.$$

Отже,

$$R_1\leq c_2\varepsilon^{1/m},\qquad(19)$$

де $c_2=a_3\Delta L(a_1+0.5\sigma_1\theta)$.

Запишемо інтеграл I_{kl} у вигляді

$$I_{kl}(\tau,\varepsilon)=\int\limits_{\tau_2}^{\tau}(A_{kl}(s,\overline{x}(s,\varepsilon),\overline{x}_h(s,\varepsilon),\varepsilon)\times$$

$$\exp[i\int\limits_{\tau_2}^{s}((k,\overline{Y})+(l,\overline{Y}_\Delta))dz])\times$$

$$\times\exp[\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_{\tau_2}^{s}\gamma_{kl}(z,\varepsilon)dz]ds.$$

Скористаємось оцінкою (5), де

$$f(s,\varepsilon)=A_{kl}(s,\overline{x}(s,\varepsilon),\overline{x}_h(s,\varepsilon),\varepsilon)$$

$$\exp\left[i\int\limits_{\tau_2}^{s}((k,\overline{Y})+(l,\overline{Y}_\Delta))dz\right].$$

Оскільки $\|l\|<N_0$, то із умов 1), 2) теореми 3 одержимо

$$|(k,\overline{Y})+(l,\overline{Y}_\Delta)|\leq|(k,\overline{Y})|+|(l,\overline{Y}-\overline{Y}_\Delta)|\leq$$

$$\leq a_1\|k+l\|+a_1\sum_{\nu=1}^{m}|l_\nu|\varepsilon\Delta(1+2a_1+m\Delta\sigma_1)\leq$$

$$\leq a_1\|k+l\|+c_3\varepsilon^{1-\beta},\quad c_3=a_1\Delta(1+2a_1m\Delta\sigma_1).$$

На підставі оцінки (5)

$$\sum_{\substack{k+l\neq 0\\ \|l\|\leq N}}\|I_{kl}(\tau,\varepsilon)\|\leq c_1\sqrt[m]{\varepsilon}\sum_{\substack{k+l\neq 0\\ \|l\|\leq N}}[\sup_{G_2}\|A_{kl}+$$

$$+\frac{1}{\|k+l\|}(\sup\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial\tau}\right\|+a_1(\sup\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x}\right\|+$$

$$+\sup\left\|\frac{\partial A_{kl}}{\partial x_h}\right\|)+a_1\sup\|A_{kl}\|\|k+l\|+$$

$$+a_3\varepsilon^{1-\beta}\sup\|A_{kl}\|)]\leq(1+2a_1)a_2c_1\varepsilon^{1/m}\quad(20)$$

при умові, що

$$c_3 a_1^{-1} \varepsilon_0^{1-\beta} \leq 1.$$

На підставі оцінок (17) - (20) і нерівнсті Гронуолла одержимо оцінку похибки методу усереднення на $[0, \tau]$

$$\eta(\tau, \varepsilon) \leq e^{2a_1 L}[(2^m a_1 + a_3 c_2)L + (a_1 + a_3)\Delta +$$

$$+(1 + 2a_1)a_2 c_1]\varepsilon^{1/m} \equiv c_4 \varepsilon^{1/m}.$$

Якщо

$$2c_4 \varepsilon_0^{1/m} \leq \rho,$$

то $x(L, \varepsilon) \in D$ разом із $\rho/2$-околом, тому оцінка $\eta(\tau, \varepsilon) \leq c_4 \varepsilon^{1/m}$ виконується на $[0, L]$.

Теорему доведено.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 504 с.

2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340 с.

3. *Гребеников Е.А., Митропольский Ю.А., Рябов Ю.А.* Введение в резонансную аналитическую динамику.— М.: Янус-К, 1999.— 320 с.

4. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986.— 192 с.

5. *Бигун Я.И., Самойленко А.М.* Обоснование принципа усреднения для многочастотных систем дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференц. уравнения.— 1999.– **35**, N 1.— С.8—14.

6. *Рубаник В.П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М.: Наука, 1969.— 287 с.

7. *Митропольский Ю.А., Мартынюк Д.И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— К.: Вища школа, 1979.— 248 с.

8. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Самойленко А.М.* Метод ускоренной сходимости в нелинейной механике.— К.: Наук. думка, 1969.— 247 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.2002