УДК 519.21 : 519.3

©2002 р. В.Ю. Береза, В.К. Ясинський

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНА СТІЙКІСТЬ З ІМОВІРНІСТЮ ОДИНИЦЯ СТОХАСТИЧНИХ СИСТЕМ ІТО-СКОРОХОДА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ

Для коефіцієнтів стохастичних систем Іто-Скорохода нейтрального типу одержані оцінки, які гарантують експоненціальну стійкість з імовірністю одиниця розв'язків цих систем.

The exponential behaviour almost shure of solutions of neutral stochastic functional differential equations with Puasson perturbations is described.

§1. Лінійні стохастичні системи нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями. Нехай задано імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ та фільтрація $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ [1],[3]. Випадковий процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega),\ t \geqslant 0,\ \omega \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n$ заданий як сильний розв'язок стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями (СДРН-ТПП) [1]:

$$d\left[x(t) - Cx(t-\tau)\right] =$$
$$= \left[A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau)\right] dt + \rho(t)\, dw(t) +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{U}} \sigma(t,u)\, \tilde{\nu}(dt, du), \qquad (1.1)$$

за початковою умовою

$$x(t) = \psi(t),\ t \in [-\tau, 0], \qquad (1.2)$$

де $\{\psi(t) = \psi(t,\omega)\}$ - обмежений неперервно-диференційовний випадковий процес із значеннями в $\mathbb{R}^n$; A_0, A_1, C - дійсні матриці порядку n, $\tau > 0$ - стале відхилення аргументу; $\{\rho(t) \equiv \rho(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}^{n\times m}$, $\{\sigma(t,u) \equiv \sigma(t,u,\omega)\} \subset \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$ - $\mathcal{F}_t$-вимірні обмежені випадкові процеси.

Під матричною нормою будемо розуміти спектральну норму [3], тобто $\| A \| \equiv \sqrt{\lambda_{max}(B)}$, де $\lambda_{max}(B)$, $\lambda_{min}(B)$ - відповідно максимальне і мінімальне власні значення матриці $B = A^T A$. Позначимо через $|\cdot|$ евклідову норму, тобто $|x| = \sqrt{x^T x}$, де $x \in \mathbb{R}^n$.

Під сильним розв'язком системи СДРН-ТПП (1.1),(1.2) слід розуміти випадковий процес $\{x(t) \equiv x(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}^n$, який задовольняє умови:

1) якщо $\mathcal{F}_t$ - мінімальна σ - алгебра, відносно якої вимірні $\{x(s)\}$, $\{\ w(s)\ \}$, $\{\tilde{\nu}(s,A)\}$, $s \leqslant t$, то сукупність випадкових величин $\{w(t+h) - w(t)\}$, $\{\tilde{\nu}([t, t+h], A)\}$, $A \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$, не залежить від фільтрації $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\ \}$, тобто $\{w(t)\}$, $\{\tilde{\nu}(s,A)\}$ узгоджені з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$;
2) існують стохастичні інтеграли від виразів у правій частині (1.1);
3) для $\forall\, t \geqslant 0$ приріст $\{\ x(t) - Cx(t-\tau)\ \}$ збігається із сумою стохастичних інтегралів у правій частині (1.1) на проміжку $[0,t]$, тобто виконується інтегральна рівність

$$x(t) - C\, x(t-\tau) = \psi(0) - C\, \psi(-\tau) +$$
$$+ \int\limits_0^t \left[A_0 x(s) + A_1 x(s-\tau)\right] ds +$$
$$+ \int\limits_0^t \rho(s)\, dw(s) + \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} \sigma(s,u)\, \tilde{\nu}(ds, du); \qquad (1.3)$$

4) $\forall\, t \in [-\tau, 0]$, $x(t) \equiv \psi(t)$, тобто випадковий процес $x(t)$ узгоджений з початковою умовою (1.2).

Оскільки умови теореми існування та єдиності для задачі (1.1),(1.2) виконуються [8], то сильний розв'язок існує і єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності. Надалі сильний розв'язок [6] задачі (1.1), (1.2) за початковою умовою $\{\psi \equiv \psi(t,\omega)\} \subset \mathbb{R}^n$ позначатимемо $x\,(t,\psi)$.

Означення 1.1. *Розв'язок задачі (1.1),(1.2) називається експоненціально стійким з імовірністю одиниця, якщо існує стала* $\gamma > 0$ *така, що* $\forall\,\psi \in \mathbb{R}^n$ *для* $t \geqslant 0$ *з імовірністю одиниця справджується нерівність* $|x(t,\psi)| < k(\psi)e^{-\gamma t}$, *причому* $\mathbb{P}\{\omega : 0 < k(\psi) < \infty\} = 1$.

Лема 1.1. *Нехай:*

1) $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *- вимірна за Борелем функція така, що для деякого* $k \in (0,1)$ *справджується*

$$|\,G\,(x)\,| \leqslant k\,|\,x\,| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n; \tag{1.4}$$

2)

$$|\,\varphi\,(t) - G\,(\varphi\,(t-\tau))\,|^2 \le$$
$$\le K\,(1 + \ln\,l)\,e^{-\alpha(l-1)\tau} \tag{1.5}$$

для $(l-1)\,\tau \leqslant t \leqslant l\tau$, $l \ge l_0$, *де* $\{\varphi\,(t)\} \subset \mathbb{R}^n$, $-\tau \leqslant t < \infty$ *- вимірна за Борелем функція,* $\alpha > 0$, $K > 0$, $\{l, l_0\} \subset \mathbb{N}$.

Тоді $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\,\dfrac{1}{t}\ln\,(\,|\,\varphi\,(t)\,|\,) \leqslant -\dfrac{1}{2}\max(\alpha,\beta)$, *де* $\beta \equiv -\dfrac{2}{\tau}\ln l > 0$.

Доведення леми 1.1 наведене в [4].

Теорема 1.1. *Нехай:*

1) існують дві симетричні матриці Q і D порядку n, де Q — додатно-визначена, D — невід'ємно-визначена, такі, що симетрична матриця

$$H \equiv \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}$$

від'ємно-визначена, де

$$h_{11} = QA_0 + A_0^T Q + D,$$

$$h_{12} = QA_1 - A_0^T QC,$$

$$h_{21} = A_1^T Q - C^T QA_0,$$

$$h_{22} = -C^T QA_0 - A_1^T QC - D,$$

причому $\|\;C\;\| < 1$*;*

2) існують $\gamma > 0$ *і* $\delta > 0$ *такі, що* $\forall\,t \geqslant 0$

$$sp\left[\rho\,(t)\,\rho^T\,(t)\right] \leqslant \frac{\delta}{2}e^{-\gamma t}, \tag{1.6}$$

$$\int\limits_{\mathbb{U}} sp\left[\sigma\,(t,u)\,\sigma^T\,(t,u)\right]\Pi\,(du) \leqslant$$
$$\le \frac{\delta}{2}e^{-\gamma t}, \tag{1.7}$$

де $sp\,(\,\cdot\,)$ *— слід відповідної матриці.*

Тоді:

I. Розв'язок задачі (1.1),(1.2) експоненціально стійкий з імовірністю одиниця.

II. Верхня межа експоненти Ляпунова розв'язку (1.1),(1.2) задовольняє оцінку

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\,(\,|\,x\,(t\,,\psi)\,|\,) \leqslant$$
$$\le -\frac{\max(\gamma,\alpha,\beta)}{2}, \tag{1.8}$$

де $\alpha \in (0,\lambda)$ *— розв'язок рівняння*

$$2\alpha\,\|\,Q\,\| + \alpha\tau e^{\alpha\tau}\,\|\,D\,\| = \lambda; \tag{1.9}$$

$$\beta \equiv -\frac{2}{\tau}\ln\,(\,\|\,C\,\|\,) > 0,$$

де $\lambda \equiv -\lambda_{max}\,(H)$.

Доведення. Зафіксуємо початковий процес $\psi \in \mathbb{R}^n$ довільним чином і розв'язок надалі позначатимемо $x\,(t) \equiv x(t,\psi)$. Визначимо функціонал Ляпунова:

$$V\,(z,t) = z^T Q z +$$
$$+\int\limits_{-\tau}^{0} x^T\,(t+s)\,D\,x\,(t+s)\,ds \tag{1.10}$$

для $(z,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,\infty)$. Застосувавши до $V\,(x\,(t) - C\,x\,(t-\tau)\,,t)$ узагальнену формулу Іто [1], одержимо з імовірністю 1:

$$d\,V\,(x\,(t) - C\,x\,(t-\tau)\,,t) =$$
$$= \{L_0\,(V) + L_\pi\,(V) + L_N\,(V)\}\,dt +$$

$$+\Big(\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]^{T}Q\rho\left(t\right)+$$

$$+\rho^{T}\left(t\right)Q\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]\Big)\,dw\left(t\right)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{U}}\left[V\left(x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)+\sigma\left(t,u\right),t\right)-\right.$$

$$\left.-V\left(x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right),t\right)\right]\tilde{\nu}\left(dt,du\right),$$

де

$$L_{0}\left(V\right)=x^{T}\left(t\right)D\,x\left(t\right)-x^{T}\left(t-\tau\right)D\,x\left(t-\tau\right)+$$

$$+\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]^{T}Q\left[A_{0}x\left(t\right)+A_{1}x\left(t-\tau\right)\right]+$$

$$+\left[A_{0}x\left(t\right)+A_{1}x\left(t-\tau\right)\right]^{T}Q\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right],$$

$$L_{\pi}\left(V\right)=\int\limits_{\mathbb{U}}\Big(\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)+\sigma\left(t,u\right)\right]^{T}Q\times$$

$$\times\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)+\sigma\left(t,u\right)\right]-$$

$$-\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]^{T}Q\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]-$$

$$-\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]^{T}Q\,\sigma\left(t,u\right)-$$

$$-\sigma^{T}\left(t,u\right)Q\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]\Big)\,\Pi\left(du\right)=$$

$$=\int\limits_{\mathbb{U}}\sigma^{T}\left(t,u\right)Q\,\sigma\left(t,u\right)\Pi\left(du\right),$$

$$L_{N}\left(V\right)=sp\left(Q\rho\left(t\right)\rho^{T}\left(t\right)\right).$$

Зауважимо, що надалі всі оцінки слід розуміти з імовірністю 1. Легко бачити, що згідно з означенням матриці H виконується оцінка

$$L_{0}\left(V\right)\leqslant\left(x^{T}\left(t\right),x^{T}\left(t-\tau\right)\right)H\begin{pmatrix}x\left(t\right)\\ x\left(t-\tau\right)\end{pmatrix}\leqslant$$

$$\leq-\lambda\cdot\left(\left|x\left(t\right)\right|^{2}+\left|x\left(t-\tau\right)\right|^{2}\right),\qquad(1.11)$$

згідно з умовою (1.6):

$$L_{N}\left(V\right)\leqslant\|\,Q\,\|\;\frac{\delta}{2}e^{-\gamma t}\qquad(1.12)$$

згідно з умовою (1.7):

$$L_{\pi}\left(V\right)=\int\limits_{\mathbb{U}}sp\left(Q\,\sigma\left(t,u\right)\sigma^{T}\left(t,u\right)\right)\Pi\left(du\right)\leqslant$$

$$\leq\|\,Q\,\|\;\frac{\delta}{2}e^{-\gamma t}.\qquad(1.13)$$

Тоді з (1.11)-(1.13) матимемо

$$dV\left(x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right),t\right)\leqslant$$

$$\leq-\lambda\cdot\left(\left|\,x\left(t\right)\right|^{2}+\left|\,x\left(t-\tau\right)\right|^{2}\right)dt+$$

$$+\delta\,\|\,Q\,\|\,e^{-\gamma t}dt+$$

$$+\Big(\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]^{T}Q\rho\left(t\right)+$$

$$+\rho^{T}\left(t\right)Q\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]\Big)\,dw\left(t\right)+$$

$$+\int\limits_{\mathbb{U}}\Big(\sigma^{T}\left(t,u\right)Q\sigma\left(t,u\right)+$$

$$+\sigma^{T}\left(t,u\right)Q\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]+$$

$$+\left[x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right)\right]^{T}Q\sigma\left(t,u\right)\Big)\,\tilde{\nu}\left(dt,du\right).\qquad(1.14)$$

Розглянемо довільне число $\theta\in(0,\max(\alpha,\gamma))$. Застосувавши формулу Іто інтегрування частинами [1], одержимо ланцюжок нерівностей:

$$d\left(e^{\theta\,t}V\left(x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right),t\right)\right)=$$

$$=\theta\,e^{\theta\,t}V\left(x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right),t\right)dt+$$

$$+e^{\theta\,t}d\,V\left(x\left(t\right)-C\,x\left(t-\tau\right),t\right)\leq$$

$$\leq \theta e^{\theta t}\Bigg(2 \parallel Q \parallel \left(|x(t)|^2 + \parallel C \parallel^2 |x(t-\tau)|^2 \right) +$$

$$+ \parallel D \parallel \int\limits_{-\tau}^{0} |x(t+s)|^2 ds \Bigg) dt +$$

$$+ e^{\theta t} \left\{ -\lambda \cdot \left(|x(t)|^2 + |x(t-\tau)|^2 \right) dt + \right.$$

$$+ \delta \parallel Q \parallel e^{-\gamma t} dt + \Big([x(t) - C x(t-\tau)]^T Q \rho(t) +$$

$$+ \rho^T(t) Q [x(t) - C x(t-\tau)] \Big) dw(t) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{U}} \Big(\sigma^T(t,u) Q \sigma(t,u) +$$

$$+ \sigma^T(t,u) Q [x(t) - C x(t-\tau)] + [x(t) -$$

$$\left. - C x(t-\tau)]^T Q \sigma(t,u) \Big) \tilde{\nu}(dt, du) \right\} \leqslant$$

$$\leq e^{\theta t} \Bigg(-(\lambda - 2\theta \parallel Q \parallel) \left(|x(t)|^2 + |x(t- \right.$$

$$\left. -\tau)|^2 \right) + \theta \parallel D \parallel \int\limits_{-\tau}^{0} |x(t+s)|^2 ds \Bigg) dt +$$

$$+ \delta \parallel Q \parallel e^{-(\gamma - \theta)t} dt +$$

$$+ e^{\theta t} \Big\{ \Big([x(t) - Cx(t-\tau)]^T Q \rho(t) +$$

$$+ \rho^T(t) Q [x(t) - Cx(t-\tau)] \Big) dw(t) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{U}} \Big(\sigma^T(t,u) Q \sigma(t,u) +$$

$$+ \sigma^T(t,u) Q [x(t) - C x(t-\tau)] +$$

$$+ [x(t) - C x(t-\tau)]^T Q \sigma(t,u) \Big) \tilde{\nu}(dt, du) \Big\}.$$

Якщо позначити

$$c_3 \equiv V(\psi(0) - C\psi(-\tau), 0) + \frac{\delta \parallel Q \parallel}{\gamma - \theta},$$

$$M_1(t) \equiv \int\limits_0^t e^{\theta s} \Big([x(s) - C x(s-\tau)]^T Q \times$$

$$\times \rho(s) + \rho^T(s) Q [x(s) - C x(s-\tau)] \Big) dw(s),$$

$$M_2(t) \equiv \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} e^{\theta s} \Big\{ \sigma^T(s,u) Q \sigma(s,u) +$$

$$+ \sigma^T(s,u) Q [x(s) - C x(s-\tau)] +$$

$$+ [x(s) - C x(s-\tau)]^T Q \sigma(s,u) \Big\} \tilde{\nu}(ds, du),$$

то за означенням стохастичного диференціала [2] матимемо

$$e^{\theta t} V(x(t) - C x(t-\tau), t) \leqslant$$

$$\leq c_3 - (\lambda - 2\theta \parallel Q \parallel) \int\limits_0^t e^{\theta s} \left(|x(s)|^2 + \right.$$

$$\left. + |x(s-\tau)|^2 \right) ds +$$

$$+ \theta \|D\| \int\limits_0^t e^{\theta s} \int\limits_{-\tau}^{0} |x(s+r)|^2 dr ds +$$

$$+ M_1(t) + M_2(t). \qquad (1.15)$$

Але

$$\int\limits_0^t e^{\theta s} \int\limits_{-\tau}^{0} |x(s+r)|^2 dr ds =$$

$$= \int\limits_0^t e^{\theta s} \int\limits_{s-\tau}^{s} |x(r)|^2 dr ds =$$

$$=\int\limits_{-\tau}^{t}\left(\int\limits_{r\vee 0}^{(r+\tau)\wedge t} e^{\theta s}ds\right)|\,x\,(r)\,|^2\,dr\leqslant$$

$$\leqslant\int\limits_{-\tau}^{t}\tau e^{\theta(r+\tau)}\,|\,x\,(r)\,|^2\,dr\leqslant$$

$$\leq\tau e^{\theta\,\tau}\int\limits_{-\tau}^{0}|\,\psi\,(s)\,|^2\,ds+$$

$$+\tau e^{\theta\,\tau}\int\limits_{0}^{t}e^{\theta s}\,|\,x\,(s)\,|^2\,ds. \tag{1.16}$$

Підставивши (1.16) у (1.15), одержимо:

$$e^{\theta\,t}V\,(x\,(t)-C\,x\,(t-\tau)\,,t)\leqslant$$

$$\leq c_4-\bar{\theta}\int\limits_{0}^{t}e^{\theta\,s}\left(|\,x\,(s)\,|^2+|\,x\,(s-\tau)\,|\right)ds+$$

$$+M_1\,(t)+M_2\,(t)\,, \tag{1.17}$$

де

$$\bar{\theta}\equiv\lambda-2\theta\ \ \|\,Q\,\|-\theta\,\tau e^{\theta\tau}\,\|\,D\,\|\,,$$

$$c_4\equiv c_3+\theta\,\tau e^{\theta\,\tau}\,\|\,D\,\|\int\limits_{-\tau}^{0}|\,\psi\,(s)\,|^2\,ds.$$

Якщо $0<\theta<\alpha\wedge\gamma$, то із (1.9) випливає додатність $\bar{\theta}>0$. Зауважимо, що $M_1\,(t)$ і $M_2\,(t)$ — мартингали [1], [2], які вироджуються при $t=0$ і мають відповідно такі квадратичні варіації [2]:

$$\langle M_1\,(t)\rangle=\int\limits_{0}^{t}e^{2\theta\,s}\Big|\,[\,x\,(s)-C\,x\,(s-\tau)]^T\,Q\times$$

$$\times\rho\,(s)+\rho^T\,(s)\,Q\,[\,x\,(s)-C\,x\,(s-\tau)]\,\Big|^2\,ds\leqslant$$

$$\leqslant 4\,\delta\,\|\,Q\,\|^2\int\limits_{0}^{t}\left(|\,x\,(s)\,|^2+|\,x\,(s-\tau)\,|^2\right)ds, \tag{1.18}$$

$$\langle M_2\,(t)\rangle=\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{\mathbb{U}}e^{2\theta\,s}\,\big|\,\sigma^T\,(s,u)\,Q\sigma\,(s,u)+$$

$$+\sigma^T\,(s,u)\,Q\ \ [x\,(s)-C\,x\,(s-\tau)]+[x(s)-$$

$$-C\,x\,(s-\tau)]^TQ\sigma\,(s,u)\,\big|^2\,\Pi\,(du)\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\delta}{\theta}\,\|\,Q\,\|^2+4\,\delta\,\|\,Q\,\|^2\times$$

$$\times\int\limits_{0}^{t}\left(|\,x\,(s)\,|^2+|\,x\,(s-\tau)\,|^2\right)ds. \tag{1.19}$$

Згідно з експоненціальною мартингальною нерівністю [4], [5] матимемо для $l=1,2,...\,;\ i=1,2$ та $\varepsilon\equiv\dfrac{\overline{\theta}}{4\delta\,\|\,Q\,\|^2}$:

$$\mathbb{P}\left\{\omega:\ \sup_{0\leqslant t\leqslant k\tau}\Big[M_i\,(t)-\frac{\varepsilon}{2}\,\langle M_i\,(t)\rangle\Big]>\right.$$

$$\left.>\frac{2}{\varepsilon}\ln l\right\}\leqslant\frac{1}{l^2}.$$

Згідно з лемою Бореля-Кантеллі [7], можна стверджувати, що існує ціле число $l_0\equiv l_0(\omega)$ таке, що

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant k\tau}\Big[M_i\,(t)-\frac{\varepsilon}{2}\,\langle M_i\,(t)\rangle\Big]\leqslant\frac{2}{\varepsilon}\ln l\quad(mod\ \mathbb{P})$$

при $l\geqslant l_0,\ i=1,2.$

Це разом із (1.18) і (1.19) та згідно з вибором ε означатиме, що виконується твердження

$$M_1\,(t)+M_2\,(t)\leqslant\frac{4}{\varepsilon}\ln l+\frac{\overline{\theta}}{4\theta\varepsilon}+$$

$$+\bar{\theta}\int\limits_{0}^{t}e^{\theta\,s}\left(|\,x\,(s)\,|^2+|\,x\,(s-\tau)\,|^2\right)ds\ \ (mod\ \mathbb{P}) \tag{1.20}$$

при $0 \leqslant t \leqslant l\tau$, $l \geqslant l_0$.

Підставивши (1.20) в (1.17), матимемо

$$e^{\theta t} V\left(x(t) - C\,x(t-\tau), t\right) \leqslant$$

$$\leq c_4 + \frac{4}{\varepsilon} \ln l + \frac{\overline{\theta}}{4\theta\varepsilon} \quad (mod\ \mathbb{P}).$$

Тоді справджуватиметься нерівність:

$$V\left(x(t) - C\,x(t-\tau), t\right) \leqslant$$

$$\leq \left(c_4 + \frac{4}{\varepsilon} + \frac{\overline{\theta}}{4\theta\varepsilon}\right)(1 + \ln l)\, e^{-\theta(l-1)\tau} \quad (mod\ \mathbb{P}).$$

при $(l-1)\tau \leqslant t \leqslant l\tau,\ l \geqslant l_0$.

З іншого боку,

$$\lambda_{min}(Q)\ |\,x(t) - C\,x(t-\tau)|^2 \leqslant$$

$$\leq \left(x(t) - C\,x(t-\tau)\right)^T Q\ \left(x(t) - C\,x(t-\tau)\right) \leqslant$$

$$\leqslant V\left(x(t) - C\,x(t-\tau), t\right).$$

Отже,

$$|\,x(t) - C\,x(t-\tau)\,|^2 \leqslant$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_{\min}(Q)}\left(c_4 + \frac{4}{\varepsilon} + \frac{\overline{\theta}}{4\theta\varepsilon}\right) \times$$

$$\times (1 + \ln l)\, e^{-\theta(l-1)\tau} \quad (mod\ \mathbb{P}) \qquad (1.21)$$

при $(l-1)\tau \leqslant t \leqslant l\tau,\ l \geqslant l_0$, тобто згідно з означенням 1.1 експоненціальна стійкість з імовірністю одиниця доведена.

Застосувавши лему 1.1, одержимо, що

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln\left(|\,x(t)\,|\right) \leqslant -\frac{\max(\theta, \beta)}{2}.$$

Тоді, попрямувавши $\theta \to \max(\gamma, \alpha)$, одержимо твердження (1.8). Теорема 1.1 доведена.

Наслідок 1.1. *Нехай:*

1) *симетрична матриця $A_0 + A_0^T$ від'ємно визначена;*

2) *для*

$$\eta \equiv \left(-\lambda_{max}\left(A_0 + A_0^T\right)\right) > 0$$

справджується

$$\frac{\eta}{2} > \|\,C^T A_1\,\| + \|\,A_1 - A_0^T C\,\|,$$

де $\|\ C\ \| < 1$;

3) *існують $\gamma > 0$ і $\delta > 0$ такі, що $\forall\, t \geqslant 0$*

$$sp\left[\rho(t)\,\rho^T(t)\right] \leqslant \frac{\delta}{2} e^{-\gamma t},$$

$$\int_{\mathbb{U}} sp\left[\sigma(t,u)\,\sigma^T(t,u)\right] \Pi(du) \leqslant \frac{\delta}{2} e^{-\gamma t},$$

де $sp(\,\cdot\,)$ - слід відповідної матриці.

Тоді:

I. *Розв'язок задачі (1.1),(1.2) експоненціально стійкий з імовірністю одиниця.*

II. *Верхня межа експоненти Ляпунова розв'язку (1.1),(1.2) задовольняє оцінку (1.8), де β таке ж, як і в теоремі 1.1, $\alpha > 0$- розв'язок рівняння*

$$2\alpha + \alpha\tau e^{\alpha\tau}\left(\frac{\eta}{2} + \|\,C^T A_1\,\|\right) =$$

$$= \frac{\eta}{2} - \|\,C^T A_1\,\| - \|\,A_1 - A_0^T C\,\|.$$

Доведення. Нехай $Q = I$ і $D = \theta I$, де I - матриця розмірності $n \times n$, а $\theta = \dfrac{\eta}{2} + \|\,C^T A_1\,\|$.

Якщо зафіксувати матрицю H, визначену в умові 1 теореми 1.1, то для $\forall\ x, y \in \mathbb{R}^n$ справджується співвідношення

$$\left(x^T, y^T\right) H \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^T\left(A_0 + A_0^T\right)x + \theta\,|\,x\,|^2 =$$

$$= 2x^T\left(A_1 - A_0^T C\right)y - \theta\,|\,y\,|^2 - 2y^T C^T A_1 y \leqslant$$

$$\leqslant -(\eta - \theta)\,|\,x\,|^2 + 2\,\|\,A_1 - A_0^T C\,\| \cdot |\,x\,| \cdot |\,y\,| -$$

$$-\left(\theta - 2\,\|\,C^T A_1\,\|\right)|\,y\,|^2 \leqslant$$

$$\leqslant -\left(\eta - \theta - \|\,A_1 - A_0^T C\,\|\right)\ |\,x\,|^2 -$$

$$-\left(\theta - 2\,\|\,C^T A_1\,\| - \|\,A_1 - A_0^T C\,\|\right)\ |\,y\,|^2 =$$

$$= -\lambda\left(|\,x\,|^2 + |\,y\,|^2\right),$$

де $\lambda \equiv \frac{\eta}{2} - \| C^T A_1 \| - \| A_1 - A_0^T C \|$.

Далі доведення наслідку 1.1 випливає з теореми 1.1.

§2. Нелінійні стохастичні системи нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями. У цьому параграфі розглянемо проблему стійкості розв'язків $n-$вимірного нелінійного стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями

$$d\left[x(t) - G(x(t-\tau))\right] =$$
$$= f(t, x(t), x(t-\tau))\,dt + \rho(t)\,dw(t) +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{U}} \sigma(t,u)\,\tilde{\nu}(dt,du),\ t \geqslant 0 \qquad (2.1)$$

за початковою умовою

$$x(t) = \psi(t),\ t \in [-\tau, 0], \qquad (2.2)$$

де $\psi(t), \rho(t), \sigma(t,u)$ визначені в §1; $f: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - неперервна функція, яка задовольняє локальну умову Ліпшиця [1],[2]; $G: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - неперервна функція, яка для $K \in (0,1)$ задовольняє оцінку

$$|G(x)| \leq K|x|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \qquad (2.3)$$

Теорема 2.1. *Нехай:*

1) *справджуються співвідношення (1.6), (1.7) і (2.3) для $K \in (0,1)$ і $\delta, \gamma > 0$;*

2) *існують дві симетричні матриці Q і D розмірності $n \times n$, де Q-додатно-визначена, D- невід'ємно визначена, а також існують сталі $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ такі, що*

$$f^T(t,x,y)\,Q\,(x - G(y)) +$$
$$+ (x - G(y))^T\,Q\,f(t,x,y) +$$
$$+ x^T D x - y^T D y \leqslant$$
$$\leqslant -\lambda_1 |x|^2 - \lambda_2 |y|^2, \qquad (2.4)$$
$$\forall\ (t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

Тоді:

I. *Розв'язок задачі (2.1),(2.2) експоненціально стійкий з імовірністю одиниця.*

II. *Верхня межа експоненти Ляпунова розв'язку (2.1),(2.2) задовольняє оцінку*

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln\left(|x(t,\psi)|\right) \leqslant$$
$$\leq -\frac{\gamma \wedge \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \beta}{2}, \qquad (2.5)$$

де

$$\beta = -\frac{2}{\tau} \ln K > 0,$$
$$\alpha_2 = \frac{\lambda_2}{2K^2 \| Q \|}, \qquad (2.6)$$

$\alpha_1 \in (0, \lambda_1)$ *– розв'язок рівняння*

$$2\alpha_1 \| Q \| + \alpha_1 \tau e^{\alpha_1 \tau} \| D \| = \lambda_1. \qquad (2.7)$$

Доведення. Зауважимо, що надалі всі оцінки слід розуміти з імовірністю 1. Згідно з формулою Іто [1] і умовою (2.4), легко записати стохастичний диференціал

$$dV\left(x(t) - G(x(t-\tau)), t\right) \leqslant \Big(-\lambda_1 \cdot |x(t)|^2 -$$
$$-\lambda_2 \cdot |x(t-\tau)|^2\Big)\,dt + \delta\, \| Q \|\, e^{-\gamma t} dt +$$
$$+ \Big(\left[x(t) - G(x(t-\tau))\right]^T Q \rho(t) +$$
$$+ \rho^T(t)\, Q \left[x(t) - C\,x(t-\tau)\right]\Big)\, dw(t) +$$
$$+ \int\limits_{\mathbb{U}} \Bigg(\sigma^T(t,u)\, Q \sigma(t,u) +$$
$$+ \sigma^T(t,u)\, Q\left[x(t) - C\,x(t-\tau)\right] +$$
$$+ \left[x(t) - C\,x(t-\tau)\right]^T Q\sigma(t,u)\Bigg)\,\tilde{\nu}(dt,du).$$

Розглянемо довільне число $\theta \in (0, \max(\gamma, \alpha_1, \alpha_2))$.

Застосувавши формулу Іто інтегрування частинами [1], одержимо нерівність

$$d\left(e^{\theta t} V\left(x(t) - G(x(t-\tau)), t\right)\right) \leqslant$$
$$\leq e^{\theta t} \Bigg(-\left(\lambda_1 - 2\theta\ \| Q \|\right) |x(t)|^2 -$$

$$-\left(\lambda_2 - 2\theta K^2 \, \| Q \| \right) |\, x\,(t-\tau)\,|^2 +$$

$$\left. +\theta \, \| D \| \int_{-\tau}^{0} |\, x\,(t+s)\,|^2 \, ds \right) dt +$$

$$+\delta \, \| Q \| \; e^{-(\gamma-\theta)t} dt +$$

$$+e^{\theta t} \Big\{ \Big(\left[x\,(t) - G\,(x\,(t-\tau)) \right]^T Q \rho\,(t) +$$

$$+\rho^T\,(t)\, Q \left[x\,(t) - G\,(x\,(t-\tau)) \right] \Big) dw\,(t) +$$

$$+ \int_{\mathbb{U}} \Big(\sigma^T\,(t,u)\, Q\, \sigma\,(t,u) +$$

$$+\sigma^T\,(t,u)\, Q \left[x\,(t) - C\, x\,(t-\tau) \right] +$$

$$+ \left[x\,(t) - C\, x\,(t-\tau) \right]^T Q \sigma\,(t,u) \Big) \tilde{\nu}\,(dt, du) \Big\} .$$

Якщо позначити

$$c_5 \equiv V\,(\psi\,(0) - G\,(\psi\,(-\tau))\,, 0) + \frac{\delta \, \| Q \|}{\gamma - \theta},$$

$$N_1\,(t) \equiv \int_0^t e^{\theta s} \Big(\left[x\,(s) - G\,(x\,(s-\tau)) \right]^T Q \rho\,(s) +$$

$$+\rho^T\,(s)\, Q \left[x\,(s) - G\,(x\,(s-\tau)) \right] \Big)\, dw\,(s)\,,$$

$$N_2\,(t) \equiv \int_0^t \int_{\mathbb{U}} e^{\theta s} \Big\{ \sigma^T\,(s,u)\, Q\, \sigma\,(s,u) +$$

$$+\sigma^T\,(s,u)\, Q \left[x\,(s) - G\,(x\,(s-\tau)) \right] +$$

$$+ [x\,(s) - G\,(x\,(s-\tau))]^T \, Q \sigma\,(s,u) \Big\} \tilde{\nu}\,(ds, du)\,,$$

то за означенням стохастичного диференціала [2] матимемо

$$e^{\theta t} V\,(x\,(t) - G\,(x\,(t-\tau))\,, t) \leqslant$$

$$\leq c_5 - (\lambda_1 - 2\theta \, \| Q \|) \int_0^t e^{\theta s} \,|\, x\,(s)\,|^2 \, ds -$$

$$- \left(\lambda_2 - 2\theta K^2 \, \| Q \| \right) \int_0^t e^{\theta s} \,|\, x\,(s-\tau)\,|^2 \, ds +$$

$$+\theta \, \| D \| \int_0^t e^{\theta s} \int_{-\tau}^{0} |\, x\,(s+r)\,|^2 \, dr ds +$$

$$+N_1\,(t) + N_2\,(t)\,. \tag{2.8}$$

Підставивши (1.16) в (2.8), одержимо нерівність

$$e^{\theta t} V\,(x\,(t) - G\,(x\,(t-\tau))\,, t) \leqslant$$

$$\leq c_6 - \theta_1 \int_0^t e^{\theta s} \,|\, x\,(s)\,|^2 \, ds -$$

$$-\theta_2 \int_0^t e^{\theta s} \,|\, x\,(s-\tau)\,|^2 \, ds +$$

$$+N_1\,(t) + N_2\,(t)\,, \tag{2.9}$$

де

$$c_6 \equiv c_5 + \theta\, \tau e^{\theta \tau} \, \| D \| \int_{-\tau}^{0} |\, \psi\,(s)\,|^2 \, ds,$$

$$\theta_1 \equiv \lambda_1 - 2\theta \, \| Q \| - \theta\, \tau e^{\theta\tau} \, \| D \|\,,$$

$$\theta_2 \equiv \lambda_2 - 2\theta K^2 \, \| Q \| \;.$$

Згідно з (2.6) і (2.7), для $\theta \in (0, \max(\gamma, \alpha_1, \alpha_2)$ матимемо $\theta_1, \theta_1 > 0$.

Припустимо, що $\varepsilon = \max(\theta_1, \theta_2) \left(4\delta \, \| Q \|^2 \right)^{-1}$. Оскільки $N_1\,(t)$ і $N_2\,(t)$ - неперервні мартингали, які вироджуються при $t = 0$, аналогічно як у теоремі 1.1 можна показати, що існує таке ціле $l_0 = l_0\,(\omega)$, що

$$N_1\,(t) + N_2\,(t) \leqslant \frac{4}{\varepsilon} \ln l + \frac{\max(\theta_1, \theta_2)}{4\theta\varepsilon} +$$

$$+ \max(\theta_1, \theta_2) \int_0^t e^{\theta s} \left(|\, x\,(s)\,|^2 + \right.$$

$$\left. + \,|\, x\,(s-\tau)\,|^2 \right) ds \quad (mod \; \mathbb{P}) \tag{2.10}$$

при $0 \leqslant t \leqslant l\tau$, $l \geqslant l_0$.

Підставивши (2.10) в (2.9), легко записати оцінку

$$|\, x\,(t) - G\,(x\,(t-\tau))\,|^2 \leqslant \frac{1}{\lambda_{min}\,(Q)} \times$$

$$\times\left(c_6+\frac{4}{\varepsilon}+\frac{\max(\theta_1,\theta_2)}{4\theta\varepsilon}\right)\times$$
$$\times\left(1+\ln l\right)e^{-\theta\,(l-1)\tau}\quad (mod\ \mathbb{P})$$

при $(l-1)\,\tau\ \leqslant\ t\ \leqslant\ l\tau,\ l\ \geqslant\ l_0$, тобто згідно з означенням 1.1, експоненціальна стійкість з ймовірністю одиниця розв'язку задачі (2.1),(2.2) доведена.

Застосувавши лему 1.1, одержимо

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\ln\left(\,|\,x\,(t)\,|\,\right)\le-\frac{\max(\theta,\beta)}{2}.$$

Тоді, попрямувавши $\theta\to\max(\gamma,\alpha_1,\alpha_2)$, одержимо твердження (2.5). Теорема 2.1 доведена.

Теорема 2.2. *Нехай:*

1) *існують сталі $K\in(0,1)$,$\delta,\gamma>0$, для яких справджуються співвідношення (1.6), (1.7) і (2.3);*
2) *існує симетрична додатно-визначена матриця Q розмірності n, що для $0<\lambda_2<\lambda_1$ справджується*
$$f^T\,(t,x,y)\,Q\,(x-G\,(y))+$$
$$+\,(x-G\,(y))^T\,Q\,f\,(t,x,y)\le$$
$$\leqslant-\lambda_1\,|\,x\,|^2+\lambda_2\,|\,y\,|^2$$
при $(t,x,y)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$.

Тоді:

I. *Розв'язок задачі (2.1),(2.2) експоненціально стійкий з імовірністю одиниця.*

II. *Верхня межа експоненти Ляпунова розв'язку (2.1),(2.2) задовольняє оцінку*
$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{1}{t}\ln\left(\,|x(t,\psi)|\,\right)\le-\frac{\max(\gamma,\alpha_1,\alpha_2,\beta)}{2},$$
де
$$\beta\equiv-\frac{2}{\tau}\log K>0,\ \ \alpha_2\equiv\frac{\lambda_1-\lambda_2}{4K^2\,\|\,Q\,\|}$$
$\alpha_1\in\left(0,\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{2}\right)$ *є розв'язком рівняння*
$$2\alpha_1\,\|\,Q\,\|+\alpha_1\tau e^{\alpha_1\tau}\,\|\,D\,\|=\lambda_1.$$

Доведення. Якщо позначити $D\equiv\frac{1}{2}\,(\lambda_1+\lambda_2)\,I$, де I - одинична матриця розмірності n, то $\forall\,(t,x,y)\,\in\,\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ виконується нерівність

$$f^T\,(t,x,y)\,Q\,(x-G\,(y))+$$
$$+\,(x-G\,(y))^T\,Q\,f\,(t,x,y)+x^TDx-y^TDy\leqslant$$
$$\leqslant-\frac{1}{2}\,(\lambda_1-\lambda_2)\left(\,|\,x\,|^2+|\,y\,|^2\right)\,.$$

Тоді з теореми 2.1 випливають твердження 1), 2) теореми 2.2.

Наслідок 2.1. *Нехай:*

1) *існують сталі $K\in(0,1)$, $\delta,\gamma>0$, для яких справджуються співвідношення (1.6), (1.7) і (2.3);*
2) *існує симетрична додатно-визначена матриця Q, що для $\lambda_i>0$, $i=\overline{1,4}$ справджується*
$$x^TQ\,f\,(t,x,0)\leqslant-\lambda_1\,|\,x\,|^2\,,$$
$$|\,f\,(t,x,y)-f\,(t,x,0)\,|\leqslant\lambda_2\,|\,y\,|\,,$$
$$|\,f\,(t,x,y)|\leqslant\lambda_3\,|\,x\,|+\lambda_4\,|\,y\,|$$
для $t\geqslant0,\ \ x,y\in\mathbb{R}^n$;
3) *справджується*
$$(\lambda_2+K\lambda_3+K\lambda_4)\ \,\|\,Q\,\|<\lambda_1.$$

Тоді розв'язок задачі (2.1),(2.2) експоненціально стійкий з імовірністю одиниця.

Доведення. Легко переконатися, що для $t\geqslant0,\ \ x,y\in\mathbb{R}^n$:

$$2\,(x-G\,(y))^T\,Q\,f\,(t,x,y)=$$
$$=2x^TQ\,f\,(t,x,y)-2G\,(y)^T\,Q\,f\,(t,x,y)\leqslant$$
$$\leqslant2x^TQ\,f\,(t,x,0)+$$
$$+2x^TQ\,[f\,(t,x,y)-f\,(t,x,0)]+$$
$$+2\,|\,G\,(y)\,|\cdot\|\,Q\,\|\cdot|\,f\,(t,x,y)\,|\leqslant$$
$$\leqslant-2\lambda_1\,|\,x\,|^2+2\lambda_2\,\|\,Q\,\|\cdot|\,x\,|\cdot\,|\,y\,|+$$
$$+2\,K\,\|\,Q\,\|\cdot\,|\,y\,|\cdot(\lambda_3\,|\,x\,|+\lambda_4\,|\,y\,|\,)\leqslant$$
$$\leqslant-2\lambda_1\,|\,x\,|^2+\lambda_2\,\|\,Q\,\|\ \,\left(\,|\,x\,|^2+|\,y\,|^2\right)+$$

$$+K\lambda_3\|Q\|(|x|^2+|y|^2)+$$
$$+2K\lambda_4\,\|\,Q\,\|\cdot|\,y\,|^2\leqslant$$
$$\leqslant-\left(2\lambda_1-(\lambda_2+K\lambda_3)\,\|\,Q\,\|\,\right)\;|\,x\,|^2+$$
$$+\left(\lambda_2+K\lambda_2+2K\lambda_4\right)\|\,Q\,\|\cdot|\,y\,|^2.$$

Згідно з теоремою 2.2, розв'язок задачі (2.1),(2.2) експоненціально стійкий з імовірністю одиниця.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— К.: Наук. думка, 1968.— 354 с.

2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— К.: Наук. думка, 1982.— 612 с.

3. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 576 с.

4. *Liao X.X., Mao X.* Almost sure exponential stability of neutral differential difference equations with damped stochastic perturbations // Electronic Journal of Probability.— 1996.— Vol. 1, Paper no. 8.— P.1—16.

5. *Mao X.* Exponential Stability of Stochastic Differential Equations.— Marcel Dekker Inc., 1994.

6. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях параметров.— М.: Наука, 1969.— 368 с.

7. *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике.— М.: Наука, 1985.— 640 с.

8. *Береза В.Ю., Юрченко І.В.* Дослідження стійкості розв'язків стохастичних систем диференціально-різницевих рівнянь Іто-Скорохода нейтрального типу // Дослідження математичних моделей: Зб. наук. праць.— К.: Ін-т математики НАН України, 1997.— С.233—245.

Стаття надійшла до редколегії 10.08.2002