УДК 519.21:519.3

©2002 р. В.К. Ясинський, В.Ю. Береза

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці

ОЦІНКИ ТА СТІЙКІСТЬ В СЕРЕДНЬОМУ КВАДРАТИЧНОМУ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІТО - СКОРОХОДА НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З МАЛИМИ ВІДХИЛЕННЯМИ АРГУМЕНТУ

Одержано достатні умови асимптотичної стійкості у середньому квадратичному тривіального розв'язку лінійних стохастичних диференціальних рівнянь нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями при певних обмеженнях на відхилення аргументу.

The sufficient conditions of asymptotic stability in the mean square for trivial solutions of stochastic differential neutral equations with Poisson switchings with some restrictions on memory are described in the article.

Нехай заданий ймовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$ [1]-[4], з якою узгоджений стандартний вінерівський процес

$$\{w(t) \equiv w(t,\omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^1,$$

центрована пуассонівска міра

$$\{\tilde{\nu}(t,A) \equiv \nu(t,A) - t\mathbf{\Pi}(A)\}$$

[1], а також випадковий процес

$$\{x(t) \equiv x(t,\omega),\ t \geq 0,\ \omega \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^n,$$

причому $\{x(t)\}$ є сильним розв'язком [5] стохастичного диференціального рівняння нейтрального типу з пуассонівськими перемиканнями (СДРНТПП)

$$d[x(t) - Dx(t-\tau)] = [A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau)]dt+$$
$$+[B_0 x(t) + B_1 x(t-\tau)]dw(t)+$$
$$+\int\limits_{\mathbf{U}} [C_0(u)x(t) + C_1(u)x(t-\tau)]\tilde{\nu}(dt,du), \quad (1)$$

за початковою умовою

$$x(\theta) = \psi(\theta),\ \theta \in [-\tau, 0], \quad (2)$$

де $\psi \in C^1[-\tau, 0]$.

Тут $A_0,\ A_1,\ B_0,\ B_1,\ D$ - числові матриці $n \times n$, $\tau > 0$ - постійне відхилення аргументу, $\{C_0(u)\},\ \{C_1(u)\}$ - матричні дійсні функції $n \times n$, $u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n$. Відмітимо, що мають виконуватися відповідні умови для існування стохастичних інтегралів Вінера-Іто та інтегралів, побудованих за центрованою пуассонівською мірою [1],[3].

Будемо розглядати спектральну норму [7] $\| A \| \equiv \sqrt{\lambda_{max}(B)}$, де $\lambda_{max}(B),\ \lambda_{min}(B)-$ відповідно максимальне і мінімальне власні значення матриці $B = A^T A$.

Нехай

$$\| D \| < 1, \int\limits_{\mathbb{U}} \| C_i(u) \|^2\, \mathbf{\Pi}(du) < \infty,$$
$$i = 0,1, \quad u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Позначимо через $\mathbb{S}_n([-\tau,0])$ простір Скорохода неперервних справа функцій $\{\rho(t)\} \subset \mathbb{R}^n$, які мають лівосторонні границі з нормою

$$\| \rho \|_0^2 \equiv |\rho(0)|^2 + \int\limits_{-\tau}^{0} |\rho(\theta)|^2 d\theta. \quad (4)$$

Означення 1. *Тривіальний розв'язок $\{x(t) \equiv 0\}$ задачі (1),(2) називається стійким у середньому квадратичному, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існують такі $\delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2(\varepsilon) > 0$, що для розв'язку $\{x(t)\} \subset \mathbb{R}^n$ системи (1),(2) при $t > 0$ виконується умова $M\{|x(t)|^2\} < \varepsilon$, як тільки $\| \psi \|_0^2 < \delta_1(\varepsilon)$, $\| \dot{\psi} \|_0^2 < \delta_2(\varepsilon)$.*

Дослідження стійкості розв'язку задачі (1),(2) [2]-[6] доцільно викласти за допомогою другого методу Ляпунова. Оскільки система лінійна, то для дослідження стійкості у середньому квадратичному природно взяти за функцію Ляпунова квадратичну форму $V(x(t)) \equiv x^T(t)Hx(t)$.

Відомо, що для квадратичної функції Ляпунова $V(x)$ виконуються такі нерівності:

$$\lambda_{min}(H)|x(t)|^2 \leq V(x(t)) \leq \lambda_{max}(H)|x(t)|^2, \tag{5}$$

Необхідною умовою асимптотичної стійкості в середньому квадратичному розв'язку задачі (1),(2) є його асимптотична стійкість в середньому квадратичному при відсутності аргументу ($\tau = 0$) [6]. В цьому випадку система приймає вигляд:

$$dx(t) = Ax(t)dt + Bx(t)dw(t)+ \\ + \int\limits_{\mathbb{U}} C(u)x(t)\tilde{\nu}(dt, du), \tag{6}$$

де $A \equiv (I - D)^{-1}(A_0 + A_1)$, $B \equiv (I - D)^{-1}(B_0 + B_1)$, $C(u) \equiv (I - D)^{-1}(C_0(u) + C_1(u))$, I - одинична матриця.

Відомо, що якщо існує симетричний додатно - означений розв'язок $H = H^T > 0$ (будемо таким чином позначати додатно визначену матрицю) узагальненого матричного рівняння Сільвестра [5]

$$A^T H + HA + B^T HB+ \\ + \int\limits_{\mathbb{U}} C^T(u)HC(u)\mathbf{\Pi}(du) = -Q, \tag{7}$$

де $Q = Q^T > 0$, то розв'язок системи (6) буде асимптотично стійким в середньому квадратичному, бо тоді $dV < 0$ [5].

Якщо для довільного $t \in [0, T]$ і $u \in \mathbb{U}$ випадкова величина $\{ \xi(t, u) \equiv \xi(t, u, \omega) \}$ є $\mathcal{F}_t$- вимірною та існує повторний інтеграл $\int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{U}} M\{ |\xi(t, u)|^2 \}\mathbf{\Pi}(du)dt < \infty$, то будемо говорити, що $\xi \in H(\mathbf{\Pi})$.

Якщо для $\forall t \in [0, T]$ і $u \in \mathbb{U}$ випадкова величина $\{ \xi(t, u)\}$ є $\mathcal{F}_t$- вимірною і $\mathbb{P}\left\{\omega : \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{U}} |\xi(t, u)|^2\mathbf{\Pi}(du)dt < \infty\right\} = 1$, то будемо говорити, що $\xi \in H_2(\mathbf{\Pi})$. Якщо ж $\mathbb{P}\left\{\omega : \int\limits_0^T \int\limits_{\mathbb{U}} |\xi(t, u)|\mathbf{\Pi}(du)dt < \infty\right\} = 1$, то $\xi \in H_1(\mathbf{\Pi})$.

Покладемо $H_{1,2}(\mathbf{\Pi}) \equiv H_1(\mathbf{\Pi}) \bigcap H_2(\mathbf{\Pi})$. Розглянемо випадковий процес як стохастичний інтеграл за випадковою мірою зі змінною верхнею межею $\zeta(t) \equiv \int\limits_0^t \int\limits_{\mathbb{U}} \gamma(\tau, x)\tilde{\nu}(d\tau, dx)$. Тоді $g \in \mathcal{D}_\gamma$, якщо $g(t, \zeta(t) + \gamma(t, x)) - g(t, \zeta(t))$ з простору $H_{1,2}(\mathbf{\Pi})$.

Нехай H_2- простір $\mathcal{F}_t-$ вимірних випадкових величин $\{ \xi(t) \equiv \xi(t, \omega) \}$ таких, що для довільного $T > 0$ $\int\limits_0^T |\xi(s)|^2 ds < \infty$ з ймовірністю 1, $M\Big\{\int\limits_0^T |\xi(s)|^2 ds\Big\} < \infty$.

Будемо говорити далі, що векторна випадкова функція належить до просторів $H(\mathbf{\Pi})$ і $H_2(\mathbf{\Pi})$, якщо це виконується відповідно для кожної компоненти.

Нехай для коефіцієнтів рівняння (1) мають місце наступні обмеження:

1) $\forall\ \rho, \sigma \in C([-\tau, 0])$ виконуються умови Ліпшиця:

$$\Big| \ [A_0 + A_1] \cdot [\ \rho(t) - \sigma(t)\ ] \ \Big|^2 \leq \\ \leq \int\limits_{-\tau}^0 |\ \rho(\theta) - \sigma(\theta)\ |^2 dR_1(\theta), \tag{8}$$

$$\Big| \ [B_0 + B_1] \cdot [\ \rho(t) - \sigma(t)\ ] \ \Big|^2 \leq \\ \leq \int\limits_{-\tau}^0 |\ \rho(\theta) - \sigma(\theta)\ |^2 dR_2(\theta), \tag{9}$$

$$\int\limits_{\mathbb{U}} \Big| \, [C_0(u)+C_1(u)]\cdot[\rho(t)-\sigma(t) \,] \, \Big|^2 \Pi(du) \le$$

$$\le \int\limits_{\mathbb{U}} \int\limits_{-\tau}^{0} | \, \rho(\theta)-\sigma(\theta) \, |^2 dR_2(\theta)\Pi(du), \quad (10)$$

де $R_i(\theta)-$ монотонно неспадні функції обмеженої варіації, тобто

$$r_i^2 \equiv \int\limits_{-\tau}^{0} dR_i(s) < \infty, \; i=1,2,3.$$

Інтеграли в умовах Ліпшиця слід розуміти як інтеграли Стілт'єса;

2) $\forall \quad \rho,\sigma \quad \in \quad C^1([-\tau,0])$ матриця D задовольняє умову Ліпшиця:

$$| \; D[\rho(t)-\sigma(t)] \; |^2 \le$$

$$\le \int\limits_{-\tau}^{0} | \; \rho(\theta)-\sigma(\theta) \; |^2 \, dK_1(\theta), \qquad (11)$$

де $t \in [-\tau,0], \; K_1$ - неспадна функція обмеженої варіації, причому

$$\int\limits_{-\tau}^{0} dK_1(\theta) < 1 \quad [2].$$

Якщо для початкової функції задачі (1),(2), $\sup\limits_{-\tau\le\theta\le0} M\{| \; \psi(\theta) \; |^4\} < \infty$, то з точністю до стохастичної еквівалентності існує єдиний вимірний відносно випадкових процесів $\{w(s), \; 0 \le s \le t\}$ і $\{\tilde{\nu}(s,A), \; 0 \le s \le t, \; A \in \mathbb{U}\}$ розв'язок [8] $\{x(t)\}$ задачі (1),(2), який має обмежений четвертий момент для $t \in [0,T], \; T>0$.

Лема 1. *Нехай виконуються умови (8)-(11) [8] існування і єдиності розв'язку задачі (1),(2).*

Тоді $\forall \; t \in [-\tau,0]$ *існують додатні сталі* $\beta_1>0, \; \beta_2>0,$ *що для початкової функції* ψ *задачі (1),(2) виконуються нерівності:*

$$| \; \psi(t) \; |^2 \le \beta_1 \| \; \psi \; \|_0^2, \qquad (12_1)$$

$$| \; \dot{\psi}(t) \; |^2 \le \beta_2 \| \; \dot{\psi} \; \|_0^2. \qquad (12_2)$$

$\triangleleft$ Згідно властивості обмеженості функцій обмеженої варіації, для функції K_1 існує стала $\beta>0$, що справджується нерівність

$$\int\limits_{-\tau}^{0} | \; D\psi(\theta) \; |^2 \, dK_1(\theta) < \beta \int\limits_{-\tau}^{0} | \; D\psi(\theta) \; |^2 \, d\theta.$$

Звідси, поклавши в (11) $\rho(t) \equiv \psi(t)$ і $\sigma(t) \equiv 0$, одержимо

$$| \; D \; \psi(t) \; |^2 < \beta \int\limits_{-\tau}^{0} | \; D\psi(\theta) \; |^2 \, d\theta.$$

Якщо використати очевидну нерівність $\lambda_{min}^2(D)|\psi(t)|^2 < | \; D \; \psi(t) \; |^2, \; t \in [-\tau,0]$, то $\forall \; t \in [-\tau,0]$ матимемо

$$|\psi(t)|^2 \le \beta_1 \int\limits_{-\tau}^{0} |\psi(\theta|^2 d\theta,$$

де $\beta_1 \equiv \dfrac{\beta}{\lambda_{min}^2(D)}$.
Звідси випливає нерівність (12_1).

Повторивши всі вищенаведені міркування для функції $\{\dot{\psi}(t)\}$ і врахувавши її неперервність, одержимо (12_2). $\triangleright$

Введемо позначення:

$$I_1 \equiv (\| \; A_0 \; \| + \| \; A_1 \; \|)(1- \| \; D \; \|)^{-1},$$

$$I_2 \equiv (\| \; B_0 \; \| + \| \; B_1 \; \|)(1- \| \; D \; \|)^{-1};$$

$$I_3(u) \equiv (\| \; C_0(u) \; \| + \| \; C_1(u) \; \|)(1- \| \; D \; \|)^{-1}$$

$$u \in \mathbb{U}, \; \varphi(H) \equiv \frac{\lambda_{max}(H)}{\lambda_{min}(H)}.$$

$$\tilde{D} \equiv -(I-D)^{-1}D, \; \tilde{A} \equiv -(I-D)^{-1}A_1,$$

$$\tilde{B} \equiv -(I-D)^{-1}B_1, \; \tilde{C}(u) \equiv -(I-D)^{-1}C_1(u). \qquad (13)$$

$$L_1(H) \equiv 2\Big(F(H)I_1 + \|H(I-D)^{-1}A_1\| +$$

$$+\|A_1^T \left[(I-D)^{-1}\right]^T H\| + 2\left(\|\tilde{D}^T HB\| + \right.$$

$$\left. +\|B^T H\tilde{D}\|\right) I_2 + \|B_1^T \left[(I-D)^{-1}\right]^T HB\| +$$

$$+\|B^T H(I-D)^{-1}B_1\| + \qquad (14)$$

$$+\int\limits_{\mathbb{U}}\left[2\left(\|\,\tilde{D}^T HC(u)\,\| + \|\,C^T(u)H\tilde{D}\,\|\right)\times\right.$$

$$\times I_3(u) + \|\,C_1^T(u)\left[(I-D)^{-1}\right]^T HC(u)\,\| +$$

$$\left.+\,\|\,C^T(u)H(I-D)^{-1}C_1(u)\,\|\right]\mathbf{\Pi}(du)\Big),$$

$$L_2(H) \equiv 6\|\tilde{D}^T H\tilde{D}\|\Bigg(\int\limits_{\mathbb{U}}[I_3(u)+$$

$$+\|D^{-1}C_1(u)\|]^2\,\mathbf{\Pi}(du) + \left[I_2 + \|\,D^{-1}B_1\,\|\right]^2\Bigg),$$

$$L_3(H) \equiv 4I_1 + I_2^2 + \int\limits_{\mathbb{U}} I_3^2(u)\mathbf{\Pi}(du),$$

де $F(H) \equiv \|\,H\tilde{D}\,\| + \|\,H\,\|\|\,\tilde{D}\,\|$.

Теорема. *Нехай:*

1) *виконуються умови леми 1;*
2) *існують симетричні додатно - означені матриці H і Q, які задовольняють матричне рівняння Сільвестра (7);*
3) *виконується умова $\tau < \tau_0$, де*

$$\tau_0 \equiv \frac{\sqrt{b^2(H)+4a(H)c(H)}-b(H)}{2a(H)},$$

$$a(H) \equiv L_2(H)\varphi(H)I_1^2,$$

$$b(H) \equiv \frac{I_1}{4}(1+\varphi(H))+L_2(H)L_3(H)\varphi(H),$$

$$c(H) \equiv (1-\xi)\lambda_{min}(Q); \tag{15}$$

4) *справджуються нерівності $\|\,\psi\,\|_0^2 < \delta_1(\varepsilon,\tau)$, $\|\,\dot{\psi}\,\|_0^2 < \delta_2(\varepsilon,\tau)$, де*

$$\delta_1(\varepsilon,\tau) \equiv min\Bigg\{\frac{\varepsilon}{2\beta_1\varphi(H)},$$

$$\frac{\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)c(H)\xi\lambda_{min}(Q)\varepsilon}{4\beta_1\left[4L_1^2(H)+\xi L_2(H)\lambda_{min}(Q)\right]}\Bigg\}, \tag{16}$$

$$\delta_2(\varepsilon,\tau) \equiv \frac{\left(1-\frac{\tau}{\tau_0}\right)c(H)\xi\lambda_{min}(Q)\varepsilon}{64\beta_2F^2(H)\left(1+\|\,D\,\|^2\right)},$$

$$0<\xi<1.$$

Тоді $M\left\{|x(t)^2|\right\} < \varepsilon,\ \forall t > 0$.

◁ Твердження теореми буде доведено, якщо існує $\tau_0 > 0$ таке, що для $\tau \in (0,\tau_0)$ виконується нерівність

$$M\left\{V(x(t))\right\} < \varepsilon\lambda_{min}(H),\ t>0. \tag{17}$$

Справді, застосувавши до (17) ліву частину нерівностей квадратичних форм (5), одержимо:

$$\lambda_{min}(H)M\left\{|x(t)|^2\right\} \le$$

$$\le M\left\{V(x(t)))\right\} < \varepsilon\lambda_{min}(H),$$

звідки випливає твердження теореми.

Доведемо (17). Розглянемо такі взаємовиключні випадки:

I. Для $\forall\ \tau>0,\ t>0$,

$$M\left\{V(x(t))\right\} < \frac{\varepsilon}{2}\lambda_{min}(H).$$

В цьому випадку виконується умова (17), а тому справджується твердження теореми.

II. Існує $T \ge 0$ таке, що

$$M\left\{V(x(s))\right\} < \frac{\varepsilon}{2}\lambda_{min}(H)$$

для $-\tau \le s < T$, а

$$M\left\{V(x(T))\right\} = \frac{\varepsilon}{2}\lambda_{min}(H). \tag{18}$$

Зауважимо, що як приклад відрізку, для якого будуть виконуватись умови (18), може виступати $[-\tau,0]$. Справді, за умовами (12) і першою з умов (16), матимемо

$$M\left\{V(x(z))\right\} \le \lambda_{max}(H)M\left\{|x(z)|^2\right\} <$$

$$< \lambda_{max}(H)\beta_1\|\,\psi\,\|_0^2 < \lambda_{max}(H)\beta_1\delta_1(\varepsilon,\tau) <$$

$$< \frac{\lambda_{max}(H)\varepsilon}{2\varphi(H)} = \frac{\varepsilon}{2}\lambda_{min}(H),\ -\tau \le z \le 0.$$

Доведемо теорему для випадку II.

Зрозуміло, що для кожного $t > 0$ існує відповідне число $m_t = 0,1,2,...$ таке, що $m_t\tau < t \le (m_t+1)\tau$.

Введемо позначення:

$$R_1[\tilde{x}(t), x(t)] \equiv \begin{cases} -(I-D)^{-1}D\Big\{D^{-1}A_1\times \\ \times\tilde{x}(t)+A_0x(t)+A_1x(t- \\ -\tau)\Big\}, \text{якщо } 0<t\le\tau; \\ -(I-D)^{-1}D\Big\{\sum\limits_{i=0}^{m_t-1}D^i\times \\ \times[A_0\tilde{x}(t-i\tau)+A_1\tilde{x}(t- \\ -(i+1)\tau)]+D^{-1}A_1\times \\ \times\tilde{x}(t)+D^{m_t}[A_0x(t- \\ -m_t\tau)+A_1x(t-(m_t+ \\ +1)\tau)]\Big\}, \text{якщо } t>\tau; \end{cases} \quad (19_1)$$

$$R_2[\tilde{x}(t), x(t)] \equiv \begin{cases} -(I-D)^{-1}D\Big\{D^{-1}B_1\times \\ \times\tilde{x}(t)+B_0x(t)+B_1x(t- \\ -\tau)\Big\}, \text{якщо } 0<t\le\tau; \\ -(I-D)^{-1}D\Big\{\sum\limits_{i=0}^{m_t-1}D^i\times \\ \times[B_0\tilde{x}(t-i\tau)+B_1\tilde{x}(t- \\ -(i+1)\tau)]+D^{-1}B_1\times \\ \times\tilde{x}(t)+D^{m_t}[B_0x(t- \\ -m_t\tau)+B_1x(t-(m_t+ \\ +1)\tau)]\Big\}, \text{якщо } t>\tau; \end{cases} \quad (19_2)$$

$$R_3[\tilde{x}(t), x(t), u] \equiv \begin{cases} -(I-D)^{-1}D\Big\{D^{-1}\times \\ C_1(u)\tilde{x}(t)+C_0(u)x(t)+ \\ +C_1(u)x(t-\tau)]\Big\}, \\ \text{якщо } 0<t\le\tau; \\ -(I-D)^{-1}D\times \\ \times\Big\{\sum\limits_{i=0}^{m_t-1}D^i[C_0(u)\times \\ \times\tilde{x}(t-i\tau)+C_1(u)\tilde{x}(t- \\ -(i+1)\tau)]+D^{-1}\times \\ \times C_1(u)\tilde{x}(t)+D^{m_t}\times \\ \times[C_0(u)x(t-m_t\tau)+ \\ +C_1(u)x(t-(m_t+ \\ +1)\tau)]\Big\}, \text{якщо } t>\tau. \end{cases} \quad (19_3)$$

Де $\tilde{x}(t)\equiv x(t)-x(t-\tau)$,

$$\Phi(t)\equiv D\dot{\psi}(t-(m_t+1)\tau)-$$
$$-\dot{\psi}(t-m_t\tau),\ u\in\mathbb{U}\subset\mathbb{R}^n.$$

$$E_1(t)\equiv Ax(t)+R_1[\tilde{x}(t),x(t)],$$
$$E_2(t)\equiv Bx(t)+R_2[\tilde{x}(t),x(t)],$$
$$E_3(t,u)\equiv C(u)x(t)+$$
$$+R_3[\tilde{x}(t),x(t),u],\ u\in\mathbb{U}.$$

Лема 2. *Нехай $\{x(t)\}$ - розв'язок задачі (1),(2), де $t>0$.*

Тоді СДРНТ (1)(2) еквівалентне СДР [9] із загаюванням

$$dx(t)=\Big(Ax(t)+R_1[\tilde{x}(t),x(t)]-$$
$$-(I-D)^{-1}D^{m_t+1}\Phi(t)\Big)dt+$$
$$+\Big(Bx(t)+R_2[\tilde{x}(t),x(t)]\Big)dw(t)+ \quad (20)$$
$$+\int\limits_{\mathbb{U}}\{C(u)x(t)+R_3[\tilde{x}(t),x(t),u]\}\tilde{\nu}(dt,du).$$

Лема 3. *Нехай*

1) *$\{x(t)\}$ - розв'язок задачі (1),(2) для $t\ge 0$;*

2) *арифметичний корінь модуля кожної компоненти вектора $E_1(t)-(I-D)^{-1}D^{m_t+1}\Phi(t)$ належить до простору H_2;*

3) *$E_2\in H_2$, $E_3\in H_{1,2}(\mathbf{\Pi})$, $u\in\mathbb{U}$, $V\in\mathcal{D}_\gamma$; $\{V(E_3(t,u))\}\in H_1(\mathbf{\Pi})$;*

4) *простору $H_2(\mathbf{\Pi})$ належить вираз*

$$\left[\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}}E_3(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)\right]^T HE_3(t,u)+$$
$$+E_3^T(t,u)H\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}}E_3(s,u)\tilde{\nu}(ds,du)+$$
$$+E_3^T(t,u)HE_3(t,u).$$

Тоді справджується співвідношення

$$\frac{d}{dt}M\{V(x(t))\}=M\Big\{x^T(t)H[E_1(t)- -(I-D)^{-1}D^{m_t+1}\Phi(t)]+[E_1(t)- -(I-D)^{-1}D^{m_t+1}\Phi(t)]^THx(t)+ +\int\limits_{\mathbb{U}}E_3^T(t,u)HE_3(t,u)\mathbf{\Pi}(\mathrm{du})+ +sp\left(HE_2(t)E_2^T(t)\right)\Big\}. \quad (21)$$

$\triangleleft$ Легко бачити, що якщо

$$H=(h_{ij})_{i,j=1}^n,\ x(t)=\{x_1(t),...,x_n(t)\}^T,$$

то

$$V(x(t))=x^T(t)Hx(t)=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n h_{ij}x_i(t)x_j(t),$$

$$\triangle V(x(t))=\Big(\sum_{i=1}^n h_{ik}x_i(t)+\sum_{i=1}^n h_{ki}x_i(t)\Big)_{k=1}^n,$$

$$\triangle^2V(x(t))=H+H^T=2H.$$

Використовуючи загальну заміну Іто [1] до рівняння (20), матимемо:

$$dV(x(t))=\Big\{L_0(V)+L_\pi(V)+L_N(V)\Big\}dt+ +\Big\{x^T(t)HE_2(t)+E_2^T(t)Hx(t)\Big\}dw(t)+ +\int\limits_{\mathbb{U}}\Big\{[x(t)+E_3(t,u)]^TH[x(t)+E_3(t,u)]- -x^T(t)Hx(t)\Big\}\tilde{\nu}(dt,du),$$

де

$$L_N(V)\equiv\frac{1}{2}sp\Big(\triangle^2V(x(t))E_2(t)E_2^T(t)\Big);$$

$$L_0(V)\equiv x^T(t)H\Big[E_1(t)-(I-D)^{-1}D^{m_t+1}\Phi(t)\Big]+ +\Big[E_1(t)-(I-D)^{-1}D^{m_t+1}\Phi(t)\Big]^THx(t);$$

$$L_\pi(V)\equiv\int\limits_{\mathbb{U}}\Big\{[x(t)+E_3(t,u)]^TH[x(t)+ +E_3(t,u)]-x^T(t)Hx(t)- -\{x^T(t)HE_3(t,u)+E_3^T(t,u)Hx(t)]\}\Big\}\mathbf{\Pi}(du).$$

За означенням стохастичного диференціалу, запишемо приріст для $\{V(x(t))\}$:

$$V(x(t))=V(x(0))+\int\limits_0^t\Big\{L_0(V)+ +L_\pi(V)+L_N(V)\Big\}ds+ +\int\limits_0^t\Big\{x^T(s)HE_2(s)+ +E_2^T(s)Hx(s)\Big\}dw(s)+ +\int\limits_0^t\int\limits_{\mathbb{U}}\Big\{[x(s)+E_3(s,u)]^TH[x(s)+ +E_3(s,u)]-x^T(s)Hx(s)\Big\}\tilde{\nu}(ds,du). \quad (22)$$

Застосувавши операцію математичного сподівання до (22) і скориставшись рівністю нулю математичного сподівання від інтеграла Вінера-Іто та інтеграла за пуассонівською мірою [1], після обчислення похідної по t, одержимо (21).$\triangleright$

Лема 4. *Нехай для розв'язку $\{x(t)\}$ рівняння (1) існує таке $T>0$, що для всіх $s:\ -\tau\le s<T$, справджується*

$$M\{V(x(s))\}<M\{V(x(T))\}.$$

Тоді виконується нерівність [9]

$$\frac{d}{dt}M\{V(x(t))\}<-\left[\xi\lambda_{min}(Q)-L_1(H)\alpha_1- -\alpha_2F(H)\right]M\left\{|x(T)|^2\right\}+\Big\{-(1-\xi)\lambda_{min}(Q)+ +\left[\frac{I_1}{4}\left(1+\varphi(H)\right)+L_2(H)L_3(H)\varphi(H)\right]\tau+ +L_2(H)\varphi(H)I_1^2\tau^2\Big\}M\left\{|x(T)|^2\right\}+\Big[\frac{2L_1(H)}{\alpha_1}+ +L_2(H)\Big]\beta_1\parallel\psi\parallel_0^2+\frac{8\beta_2\parallel\dot{\psi}\parallel_0^2(1+\parallel D\parallel^2)}{\alpha_2}, \quad (23)$$

де $0<\xi<1-$ довільне число, $L_1(H)$, $L_2(H)$, $L_3(H)$ визначені в (14).

Покладемо в (23) $\alpha_1 \equiv \frac{\xi\lambda_{min}(Q)}{2L_1(H)}$, $\alpha_2 \equiv \frac{\xi\lambda_{min}(Q)}{2F(H)}$, тоді легко одержати нерівність

$$\frac{d}{dt}M\left\{V(x(T))\right\} < -\left\{(1-\xi)\lambda_{min}(Q)-\right.$$
$$\left.-b(H)\tau - a(H)\tau^2\right\} M\left\{|x(T)|^2\right\} +$$
$$+\left[\frac{4L_1^2(H)}{\xi\lambda_{min}(Q)} + L_2(H)\right]\beta_1 \| \psi \|_0^2 +$$
$$+\frac{16F^2(H)\left(1+\| D \|^2\right)\beta_2 \| \dot{\psi} \|_0^2}{\xi\lambda_{min}(Q)},$$

де $a(H)$, $b(H)$, $c(H)$ визначені в (15).

Очевидно, що якщо τ_0- розв'язок квадратного рівняння $a(H)\tau^2 + b(H)\tau - c(H) = 0$, то

$$a(H)\tau^2 + b(H)\tau - c(H) < 0,$$
$$a(H)\tau^2 + b(H)\tau - c(H)\frac{\tau}{\tau_0} < 0,$$

для $0 < \tau < \tau_0$. Звідси випливає

$$a(H)\tau^2 + b(H)\tau - c(H) < -c(H)\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right),$$
$$0 < \tau < \tau_0.$$

Тоді

$$\frac{d}{dt}M\left\{V(x(T))\right\} <$$
$$< -c(H)\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) M\left\{|x(T)|^2\right\} +$$
$$+\left[\frac{4L_1^2(H)}{\xi\lambda_{min}(Q)} + L_2(H)\right]\beta_1 \| \psi \|_0^2 +$$
$$+\frac{16F^2(H)\left(1+\| D \|^2\right)\beta_2 \| \dot{\psi} \|_0^2}{\xi\lambda_{min}(Q)}.$$

Якщо ж будуть виконуватись оцінки

$$\| \psi \|_0^2 < \frac{c(H)\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) M\left\{|x(T)|^2\right\}\xi\lambda_{min}(Q)}{4\left[4L_1^2(H) + \xi L_2(H)\lambda_{min}(Q)\right]\beta_1},$$

$$\| \dot{\psi} \|_0^2 < \frac{c(H)\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) M\left\{|x(T)|^2\right\}\xi\lambda_{min}(Q)}{64F^2(H)\left(1+\| D \|^2\right)\beta_2},$$

то

$$\frac{d}{dt}M\left\{V(x(T))\right\} <$$
$$< -\frac{c(H)}{2}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) M\left\{|x(T)|^2\right\}. \qquad (24)$$

Далі, згідно (5) виконуються нерівності

$$-\lambda_{max}(H)|x(T)|^2 \le -V(x(T)) \le$$
$$\le -\lambda_{min}(H)|x(T)|^2.$$

Тоді враховуючи співвідношення (24), матимемо

$$\frac{d}{dt}M\{V(x(T))\} <$$
$$< -\frac{c(H)}{2\lambda_{max}(H)}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right) M\{V(x(T))\},$$

що еквівалентно

$$\frac{dM\{V(x(T))\}}{M\{V(x(T))\}} < -\frac{c(H)dt}{2\lambda_{max}(H)}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right).$$

Проінтегрувавши цю нерівність на досить малому відрізку $[T, T+\zeta]$, одержимо

$$\left|\frac{M\{V(x(T+\zeta))\}}{M\{V(x(T))\}}\right| <$$
$$< exp\left\{-\frac{c(H)\zeta}{2\lambda_{max}(H)}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)\right\}.$$

Але квадратична форма $V(x)$ є додатно означеною, тому легко переконатися, що

$$M\{V(x(T+\zeta))\} < M\{V(x(T))\}\times$$
$$\times exp\left\{-\frac{c(H)\zeta}{2\lambda_{max}(H)}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_0}\right)\right\} <$$
$$< M\{V(x(T))\}.$$

Оскільки $M\{V(x(T))\} = \frac{\varepsilon}{2}\lambda_{min}(H)$, то

$$M\left\{V(x(T+\zeta))\right\} < \frac{\varepsilon}{2}\lambda_{\min}(H).$$

Тоді можна стверджувати, що:

$$\exists\, \eta > 0 \text{ таке, що } \forall\, s:\ T < s < T+\eta,$$
$$M\left\{V(x(s))\right\} < \frac{\varepsilon}{2}\lambda_{min}(H),\ 0 < \tau < \tau_0.$$

Отже, $\forall\, \tau \in (0, \tau_0)$ та $\forall\, t > 0$ справджується нерівність $M\left\{V(x(t))\right\} \le \frac{\varepsilon}{2}\lambda_{min}(H)$, тобто виконується (17).

Таким чином, для виконання умови (17) досить, щоб

$$\frac{d}{dt} M\left\{V(x(T))\right\} < 0,$$

а це гарантується умовою 4) теореми.

Отже, випадки I і II вичерпують всі можливі варіанти, тобто теорема 2 доведена. ▷

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— К.: Наук. думка, 1968.— 354 с.

2. *Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием.— М: Наука, 1981.— 448 с.

3. *Скороход А.В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений.— К.: Наукова думка, 1984.— 328 с.

4. *Царьков Е.Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений.— Рига: Зинатне, 1989.— 424 с.

5. *Царьков Е.Ф., Ясинский В.К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения.— Рига: Ориентир, 1992.— 328 с.

6. *Кореневский Д.Г.* Устойчивость динамических систем при случайных возмущениях параметров. Алгебраические критерии.— К.: Наук. думка, 1989.— 208 с.

7. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер.— М: Наука, 1977.— 362 с.

8. *Береза В.Ю., Юрченко И.В.* Дослідження стійкості розв'язків стохастичних систем диференціально-різницевих рівнянь Іто-Скорохода нейтрального типу // Дослідження математичних моделей: Зб. наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 1997.— С.233—245.

9. *Ясинський В.К., Береза В.Ю.* Стійкість та оцінки другого моменту розв'язку систем стохастичних диференціальних рівнянь нейтрального типу з пуассонівськими збуреннями // Abstracts of Communications of the International Conference "Stochastic Analysis and its Applications" (10—17 June 2001, Lviv).— Lviv, 2001.— P.83.

Стаття надійшла до редколегії 07.09.2001