УДК 517.925:517.622

©2002 р. І.М. Черевко

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ПРО НАБЛИЖЕНУ ЗАМІНУ РІЗНИЦЕВИХ І ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-РІЗНИЦЕВИХ РІВНЯНЬ ЗВИЧАЙНИМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИМИ РІВНЯННЯМИ

Досліджена схема апроксимації різницевого рівняння системою звичайних диференціальних рівнянь. Розглянуто застосування одержаних результатів для апроксимації пари різницевого та диференціально-різницевого рівнянь.

We investigate the algorithm of approximation of difference equation by system of ordinary differential equations. We considered the application of result which we obtained to approximation for coupled difference and differential-difference equations.

Наближена заміна диференціально-різницевих рівнянь вивчалась рядом авторів [1—7] при дослідженні задач стійкості та керування. В роботах [4,5] використано апроксимацію Паде, а в працях [6,7] застосовується апроксимація півгрупи лінійних операторів.

У даній роботі узагальнюється схема апроксимації Красовського-Рєпіна [1,2] на випадок інтегровних вхідних функцій для елемента запізнення та розглядаються деякі її застосування для різницевих та диференціально-різницевих рівнянь.

1. Наближення елемента запізнення

Розглянемо m елементів запізнення, що послідовно з'єднані між собою і відповідну їм послідовність аперіодичних ланок, що описуються системою звичайних диференціальних рівнянь вигляду [2,3]

$$\frac{\tau}{m}z_1'(t) + z_1(t) = x(t), \tag{1}$$

$$\frac{\tau}{m}z_i'(t)+z_i(t) = z_{i-1}(t), \quad i = \overline{2,m}, \quad t \in [0,T],$$

$$z_i(0) = \frac{m}{\tau}\int\limits_{-\frac{i\tau}{m}}^{\frac{-(i-1)\tau}{m}} x(s)ds, \quad i = \overline{1,m}, \tag{2}$$

де $x(t)$ — вхідна функція першого елемента запізнення, $m \in \mathbb{N}$, $T, \tau > 0$.

Позначимо $y_i(t) = x(t - \frac{i\tau}{m})$, $i = \overline{1,m}$, послідовність вихідних функцій елементів запізнення. Будемо досліджувати відповідність між величинами $y_i(t)$ та $z_i(t)$, $i = \overline{1,m}$.

Відмітимо, що система (1), (2) досліджена в [2] у випадку, коли функція $x(t)$ задовольняє умову Ліпшиця із сталою K або має похідну, що обмежена сталою M на $[-\tau, T]$. При цьому встановлено справедливість нерівностей

$$|z_i(t) - x(t - \frac{i\tau}{m})| \le \frac{4K\tau}{\sqrt{m}}, \tag{3}$$

або

$$|z_i(t) - x(t - \frac{i\tau}{m})| \le \frac{2M\tau}{\sqrt{m}}, \tag{4}$$

при $t \in [0,T]$, $i = \overline{1,m}$.

Випадок, коли $x(t) \in C[-\tau, T]$, розглянуто в роботах [8,9]. Встановлено, що в цьому випадку справджуються такі нерівності

$$|z_i(t) - x(t - \frac{i\tau}{m})| \le 2(e^{\tau} + 1)\omega(x, \frac{\tau}{m}),$$
$$i = \overline{1,m}, \quad t \in [0,T], \tag{5}$$

де $\omega(x, \sigma)$ — модуль неперервності функції $x(t)$ на $[-\tau, T]$.

У даній роботі розглядатимемо систему (1), (2) в припущенні, що $x(t)$ належить простору $L_1[-\tau, T]$ інтегровних на $[-\tau, T]$ функцій, оскільки такі функції часто зустрічаються в прикладних задачах [1,7].

Під розв'язком системи (1), (2) будемо розуміти функції $z_i(t), i = \overline{1,m}$, де $z_1(t)$ — абсолютна неперервна функція на $[0,T]$, що задовольняє перше рівняння системи (1) майже для всіх $t \in [0,T]$, а $z_i(t) \in C^1[0,T]$, $i = \overline{2,m}$.

Продовжимо функцію $x(t)$ на інтервал $[-h-\tau, T+h]$, $h > 0$, поклавши $x(t) = 0$ при $t \notin [-\tau, T]$.

Введемо до розгляду функцію

$$x_h(t) = \frac{1}{2h}\int\limits_{t-h}^{t+h} x(s)ds,$$

яка є неперервною на $[-\tau, T]$.

Відомо [10, с.460], якщо $p \geq 1$ і $x(t) \in L_p[-\tau, T]$, то

$$\lim_{h\to 0}\int\limits_{-\tau}^{T} |x_h(t) - x(t)|^p dt = 0. \qquad (6)$$

Позначимо $\alpha_1(h) = \int\limits_{-\tau}^{T} |x_h(t) - x(t)|dt$. Із співвідношення (6) випливає, що $\alpha_1(h) \to 0$ при $h \to 0$.

Представимо функцію $x(t)$ у вигляді $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$, де $x_1(t) = x_h(t)$, $x_2(t) = x(t) - x_h(t)$.

Згідно з лінійністю системи (1), (2) її розв'язок буде сумою функцій, які є розв'язками таких систем

$$\frac{\tau}{m}z_1'^{(1)}(t) + z_1^{(1)}(t) = x_1(t),$$

$$\frac{\tau}{m}z_i'^{(1)}(t) + z_i^{(1)}(t) = z_{i-1}^{(1)}(t),$$

$$i = \overline{2,m}, \quad t \in [0,T], \qquad (7)$$

$$z_i^{(1)}(t) = \frac{m}{\tau}\int\limits_{-\frac{i\tau}{m}}^{-(i-1)\frac{\tau}{m}} x(s)ds, \quad i = \overline{1,m},$$

$$\frac{\tau}{m}z_1'^{(2)}(t) + z_1^{(2)}(t) = x_2(t), \qquad (8)$$

$$\frac{\tau}{m}z_i'^{(2)}(t) + z_i^{(2)}(t) = z_{i-1}^{(2)}(t),$$

$$i = \overline{2,m}, \quad t \in [0,T],$$

$$z_i^{(2)}(0) = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Оцінимо різниці $z_i(t) - y_i(t)$, $i = \overline{1,m}$, які є елементами $L_1[0,T]$. Враховуючи представлення функції $x(t)$ у вигляді суми, маємо нерівність

$$\int\limits_0^T |z_i(t) - y_i(t)|dt \leq \int\limits_0^T (|z_i^{(1)}(t) -$$

$$-y_i^{(1)}(t)| + |y_i^{(2)}(t)| + |z_i^{(2)}(t)|)dt. \qquad (9)$$

Для оцінки різниці $|z_i^{(1)}(t) - y_i^{(1)}(t)|$ можна застосувати нерівність (5), оскільки функція $x_h(t)$ є неперервною на $[-\tau, T]$. Із рівності $y_i^{(2)}(t) = x_2(t - \frac{i\tau}{m})$ випливає оцінка

$$\int\limits_0^T |y_i^{(2)}(t)|dt \leq \alpha_1(h). \qquad (10)$$

Дослідимо третій доданок у правій частині нерівності (9). Із першого рівняння системи (8) знаходимо

$$z_1^{(2)}(t) = \frac{m}{\tau}\int\limits_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}x_2(s)ds. \qquad (11)$$

Оцінюючи (11), дістаємо

$$\int\limits_0^T |z_1^{(2)}(t)|dt \leq \frac{m}{\tau}\int\limits_0^T\int\limits_s^T e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}|x_2(s)|dtds =$$

$$= \int\limits_0^T (1 - e^{-\frac{m}{\tau}(T-s)})|x_2(s)|ds \leq \alpha_1(h). \qquad (12)$$

Аналогічна оцінка правильна і для $z_i^{(2)}(t)$, $i = \overline{2,m}$.

Підставляючи (10)—(12) у нерівність (9), маємо

$$\int\limits_0^T |z_i(t) - y_i(t)|dt \leq 2T(e^T + 1)\omega(x_1, \frac{\tau}{m}) + 2\alpha_1(h). \qquad (13)$$

Покладаючи в (13) $h = \frac{\tau}{m}$, одержуємо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай в системі (1), (2) вхідна функція $x(t)$ інтегровна на $[-\tau, T]$. Тоді справджуються такі нерівності*

$$\int_0^T |z_i(t) - x(t - \frac{i\tau}{m})| dt \leq \beta_1(\frac{\tau}{m}), i = \overline{1,m}, \quad (14)$$

де $\beta_1(\delta)$ — монотонно зростаюча функція і $\lim\limits_{\delta\to 0} \beta_1(\delta) = 0$.

2. Апроксимація різницевих та диференціально-різницевих рівнянь

Розглянемо нелінійне різницеве рівняння

$$x(t) = f(t, x(t-\tau)), \quad t \in [0, T], \quad (15)$$

з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (16)$$

де функція $f(t,x)$ — неперервна по t і задовольняє умову Ліпшиця по x, $\varphi(t)$ — задана неперервна функція, $\tau > 0$.

Розв'язок задачі (15), (16) можна знайти методом кроків. При виконанні умови склейки

$$\varphi(0) = f(0, \varphi(-\tau)) \quad (17)$$

цей розв'язок буде неперервною функцією на $[-\tau, T]$. Якщо умова (17) не виконується, тоді розв'язок задачі (15), (16) буде кусково неперервною функцією, що має на $[-\tau, T]$ скінченне число точок розриву, в яких існують скінченні ліві та праві границі.

Поставимо у відповідність задачі (15), (16) апроксимуючу задачу Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{\tau}{m} y_1'(t) + y_1(t) = f(t, y_m),$$

$$\frac{\tau}{m} y_i'(t) + y_i(t) = y_{i-1}(t),$$

$$i = \overline{2,m}, \quad t \in [0, T], \quad (18)$$

$$y_i(0) = \varphi(-\frac{i\tau}{m}), \quad i = \overline{1,m}.$$

Теорема 2. *Нехай функція $f(t,x)$ неперервна по t і задовольняє по x умову Ліпшиця із сталою $L < 1$. Тоді справджуються такі нерівності*

$$\int_0^T |x(t - \frac{i\tau}{m}) - y_i(t)| dt \leq \beta_2(\frac{\tau}{m}), i = \overline{1,m}. \quad (19)$$

Якщо початкова функція $\varphi(t)$ задовольняє умову (17), то тоді

$$|x(t - \frac{i\tau}{m}) - y_i(t)| \leq \beta_3(\frac{\tau}{m}),$$

$$i = \overline{1,m}, \quad t \in [0, T]. \quad (20)$$

Функції $\beta_j(\delta)$, $j = 2, 3$ є монотонно зростаючими і

$$\lim_{\delta\to 0} \beta_j(\delta) = 0, \quad j = 2, 3.$$

Доведення. Визначимо функції $u_i(t)$ як розв'язки системи рівнянь

$$\frac{\tau}{m} u_1'(t) + u_1(t) = x(t), \quad (21)$$

$$\frac{\tau}{m} u_i'(t) + u_i(t) = u_{i-1}(t), i = \overline{2,m}, t \in [0, T],$$

$$u_i(0) = x(-\frac{i\tau}{m}), i = \overline{1,m},$$

де $x(t)$ — розв'язок задачі (15), (16).

Застосовуючи теорему 1, дістаємо

$$\int_0^T |u_i(t) - x(t - \frac{i\tau}{m})| dt \leq \beta_1(\frac{\tau}{m}), i = \overline{1,m}. \quad (22)$$

Позначимо $v_i(t) = y_i(t) - u_i(t)$, $i = \overline{1,m}$. Легко бачити, що функції $v_i(t)$ є розв'язками такої системи рівнянь

$$\frac{\tau}{m} v_1'(t) + v_1(t) = f(t, y_m) - f(t, x(t-\tau)),$$

$$\frac{\tau}{m} v_i'(t) + v_i(t) = v_{i-1}(t), i = \overline{2,m}, t \in [0, T], \quad (23)$$

$$v_i(0) = 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Із першого рівняння системи (23) знаходимо, що

$$|v_1(t)| \le \frac{mL}{\tau}\int\limits_0^t e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}[|v_m(s)|+$$

$$+|u_m(s)-x(s-\tau)|]ds.$$

Застосовуючи тепер формулу варіації сталих і теорему Фубіні, дістаємо оцінку

$$|v_i(t)| \le \frac{mL}{\tau}\int\limits_0^t \frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{m}{\tau}(t-s)\right]^{i-1}\times$$

$$\times e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}[|v_m(s)|+|u_m(s)-x(s-\tau)|]ds. \quad (24)$$

Інтегруючи (24) в межах від 0 до T і змінюючи порядок інтегрування одержимо

$$\int\limits_0^T |v_i(t)|dt \le \frac{mL}{\tau}\int\limits_0^T\int\limits_s^T \frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{m}{\tau}(t-s)\right]^{i-1}\times$$

$$\times e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}[|v_m(s)|+|u_m(s)-x(s-\tau)|]ds. \quad (25)$$

Враховуючи оцінку

$$\frac{\tau}{m}\int\limits_s^T \frac{1}{(i-1)!}\left[\frac{m}{\tau}(t-s)\right]^{i-1}\times$$

$$\times e^{-\frac{m}{\tau}(t-s)}ds \le \int\limits_0^\infty \frac{\xi^{i-1}}{(i-1)!}e^{-\xi}d\xi = 1,$$

перепишемо нерівність (25) у вигляді

$$\int\limits_0^T |v_i(t)| \le L\int\limits_0^T [|v_m(s)|+|u_m(s)-x(s-\tau)|]ds.$$

Оскільки $L<1$, то маємо нерівності

$$\int\limits_0^T |v_i(t)| \le \frac{L}{1-L}\int\limits_0^T [|u_m(s)-$$

$$-x(s-\tau)|]ds, i=\overline{1,m}. \quad (26)$$

Враховуючи тепер (22), (26), одержуємо оцінку

$$\int\limits_0^T |y_i - x(t-\frac{i\tau}{m})|dt \le$$

$$\le \int\limits_0^T |v_i(t)|dt + \int\limits_0^T |u_i(t)-x(t-\frac{i\tau}{m})|dt \le$$

$$\le \frac{1}{1-L}\beta_1(\frac{\tau}{m}), \quad i=\overline{1,m}.$$

Отже, співвідношення (19) справджуються.

Оцінки (20) випливають із [8,9], при цьому

$$\beta_3(\frac{\tau}{m}) = \frac{2L(e^\tau+1)}{1-L}\omega(x,\frac{\tau}{m}).$$

Теорема 2 доведена.

Розлянемо застосування одержаних результатів для апроксимації диференціально-різницевої системи вигляду

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),y(t-\tau)),$$

$$y(t) = g(t,x(t),y(t-\tau)), \quad t\in[0,T], \quad (27)$$

$$x(0)=x_0, y(t)=\varphi(t), t\in[-\tau,0],$$

де $f(t,x,y)$, $g(t,x,y)$ — неперервні функції, що задовольняють по x,y умову Ліпшиця, $\varphi(t)$ — задана неперервна функція, $\tau>0$.

Система (27) досліджувалась у [8] при додатковій умові склейки

$$\varphi(0) = g(0,x_0,\varphi(-\tau)). \quad (28)$$

Розглянемо розв'язок $x(t),y(t)$ системи (27), не вимагаючи виконання умови (28). У цьому випадку $y(t)$ — кусково неперервна функція на $[-\tau,T]$, а $x(t)$ — абсолютно неперервна функція на $[0,T]$.

Поставимо у відповідність задачі (27) апроксимуючу систему вигляду

$$z_0'(t) = f(t,z_0,z_m),$$

$$z_1'(t) = \frac{m}{\tau}[g(t,z_0,z_m)-z_1],$$

$$z_i'(t) = \frac{m}{\tau}[z_{i-1}-z_i], \quad i=\overline{2,m}, \quad (29)$$

$$z_0(0)=x_0, \quad z_i(0)=\varphi(-\frac{i\tau}{m}), i=\overline{1,m}.$$

Теорема 3. *Нехай* $z_i(t), i=\overline{0,m}$ *— розв'язки задачі (29), а* $(x(t),y(t))$ *— розв'язки початкової задачі (27). Припустимо, що виконуються умови*

$$|f(t,x_1,y_1)-f(t,x_2,y_2)| \le$$

$$\leq L_1|x_1 - x_2| + L_2|y_1 - y_2|,$$
$$|g(t, x_1, y_1) - g(t, x_2, y_2)| \leq$$
$$\leq N_1|x_1 - x_2| + N_2|y_1 - y_2|,$$

де $L_1, L_2, N_1 > 0$, $0 < N_1 < 1$.

Тоді справджуються такі нерівності

$$\int_0^T |z_0(t) - x(t)|dt \leq \beta_4(\frac{\tau}{m}),$$

$$\int_0^T |z_i(t) - y(t - \frac{i\tau}{m})|dt \leq \beta_5(\frac{\tau}{m}), i = \overline{1, m}, \quad (30)$$

де $\beta_j(\delta), j = 4, 5$ *— монотонно зростаючі функції і*

$$\lim_{\delta \to 0} \beta_j(\delta) = 0, \quad j = 3, 4.$$

Доведення теореми нескладно одержати аналогічно доведенню теореми 2 з [8] використовуючи оцінки (19).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. математика и механика.— 1964.— **28**, N 4.— C.716-725.

2. *Репин Ю.М.* О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными дифференциальными уравнениями // Прикл. математика и механика.— 1965.— **29**, N 2.— C.226-235.

3. *Янушевский Р.Т.* Управление объектами с запаздыванием.— М.: Наука, 1978.— 416 с.

4. *Опарин Н.П.* Аппроксимация систем линейных нестационарных уравнений запаздывающего типа системами обыкновенных уравнений // В кн. Дифференциальные уравнения и функциональный анализ.— М.: Наука, 1984.— C.66-75.

5. *Оболенский А.Ю., Чернецкая Л.Н.* Об одном способе исследования функционально-дифференциальных моделей в задачах электродинамики // Электрон. моделирование.— 1993.— **15**, N 4.— C.8—13.

6. *Banks H.T.* Approximation of nonlinear functional differential equation control systems // J. Optim. Theory Appl.— 1979.— **29**, N 3.— P.383—408.

7. *Kunish K.* Approximation schemes for nonlinear neutral optimal control systems // J. Math. Anal. Appl.— 1981.— **82**, N 1.— P.112—144.

8. *Піддубна Л.А., Черевко І.М.* Апроксимація систем диференціально-різницевих рівнянь системами звичайних диференціальних рівнянь // Нелінійні коливання.— 1999.— **2**, N 1.— C.42—50.

9. *Матвій О.В., Черевко І.М.* Апроксимація крайових задач для диференціальних рівнянь із запізненням // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— C.85—89.

10. *Натансон И.П.* Теория функций вещественной переменной.— М.: Наука, 1974.— 480 с.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.2002