УДК 512.54; 519.713

©2002 р. В.С. Сікора

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

ОЦІНКА ДІАМЕТРА ГРАФА КЕЛІ ГРУПИ АВТОМАТНИХ ПІДСТАНОВОК

Побудовано приклад мінімальної системи твірних для вінцевого степеня симетричної групи S_n. Оцінено зверху діаметр графа Келі групи автоматних підстановок над скінченним алфавітом $X^{(r)}$ відносно побудованих мінімальних систем твірних.

An example of mininal system of generators is constructed for wreath degree of symmetric group S_n. The upper bound of diameter of Cayley graph is obtained for groups of automatic permutations on finite alphabet $X^{(r)}$ regarding to abovementioned generators systems.

Проблема побудови мінімальних (за кількістю елементів) систем твірних скінченних груп є актуальною і досліджувалася різними авторами на всіх етапах розвитку теорії груп (наприклад, [1,2,3]). Тому природним є питання про дослідження верхньої оцінки найбільшого з нескоротних розкладів довільного елемента скінченної групи за елементами мінімальних систем твірних (під нескоротністю розкладу елемента групи за елементами системи твірних розуміємо найкоротший з можливих розкладів).

Продовжуючи дослідження, запропоновані в роботах [4,5], у даній статті побудовано конкретні мінімальні системи твірних вінцевого степеня симетричної групи S_n, оцінено зверху діаметр графа Келі групи автоматних підстановок над скінченним алфавітом відносно мінімальних систем твірних.

1. Нагадаємо [6], що ініціальним автоматом Мілі над вхідним алфавітом X та вихідним алфавітом Y називається набір вигляду $\mathcal{A} =< Q, X, Y, q_0, \delta, \lambda >$, де Q — множина внутрішніх станів автомата $\mathcal{A}$, $q_0 \in Q$ — початковий стан, $\delta : Q \times X \to X$ та $\lambda : Q\times X \to Y$ — функції переходів і виходів автомата відповідно. Автомат називається скінченним, якщо множина його станів є скінченною. Скінченні автомати можна задавати таблицями значень функцій δ і λ або їх діаграмами Мура (див.[6,7]).

Будемо розглядати тільки ініціальні автомати, вхідний та вихідний алфавіти яких збігаються ($X = Y$). Якщо такий алфавіт X зафіксовано, то автомат будемо задавати набором вигляду $< Q, q_0, \delta, \lambda >$.

Отже, нехай $\mathcal{A} =< Q, q_0, \delta, \lambda >$ — деякий автомат над скінченним алфавітом X ($|X| = n$). Далі, без обмеження загальності, вважатимемо, що $X = \{1, 2, ..., n\}$. Позначимо символом X^* множину всіх слів у алфавіті X, символом e — порожнє слово із X^* і розширимо дії функцій δ та λ на множину $Q \times X^*$ за правилами:

$$\delta(q, e) = q, \quad \delta(q, wx) = \delta(\delta(q, w), x), \tag{1}$$

$$\lambda(q, e) = e, \quad \lambda(q, wx) = \lambda(\delta(q, w), x), \tag{2}$$

де $w \in X^*, x \in X$. За допомогою співвідношень (1), (2) можна визначити перетворення $\gamma_{\mathcal{A}} : X^* \to X^*$, яке задається автоматом $\mathcal{A}$. А саме, для довільного слова $x_1x_2...x_k \in X^*$ покладають

$$\gamma_{\mathcal{A}}(x_1x_2...x_k) = y_1y_2...y_k,$$

де $y_i = \lambda(q_0, x_1...x_i), \quad i = 1, 2, ..., k$. Перетворення $f : X^* \to X^*$ називається автоматним, якщо існує автомат $\mathcal{A}$ такий, що $f = \gamma_{\mathcal{A}}$. Автомат $\mathcal{A}$ називається підстановковим, якщо для довільного $q \in Q$ відображення $t_q : X \to X$, яке визначається умовою $t_q(x) = \lambda(q, x)$, є підстановкою на X.

Лема 1. [6] *Автоматне перетворення буде бієктивним тоді і тільки тоді, коли воно задається підстановковим автоматом.*

Автоматні перетворення тісно пов'язані з автоморфізмами кореневих дерев $T(X)$. А саме, в кореневому дереві $T(X)$ (з коренем e) ребрами будуть з'єднуватися пари слів $u, v \in X^*$, для яких $u = vx$ при $x \in X$.

Лема 2. [8] *Бієктивне перетворення $f : X^* \to X^*$ буде автоматним тоді і тільки тоді, коли воно задає автоморфізм дерева $T(X)$.*

Суперпозиція автоматних перетворень знову буде автоматним відображенням [9]. Оскільки обернене до бієктивного автоматного відображення також автоматне [9], то усі бієктивні автоматні відображення над алфавітом X утворюють групу, яку називають групою автоматних підстановок над алфавітом X і позначають $A(X)$. Згідно з вищесказаним,

$$A(X) \simeq \operatorname{Aut} T(X)$$

(тут $\operatorname{Aut} T(X)$ позначає групу автоморфізмів кореневого дерева $T(X)$, а знак $\simeq$ означає ізоморфізм груп).

Нехай $X^{(r)}$ — підмножина множини X^*, яка містить слова довжини точно r. Ця підмножина є інваріантною відносно дії групи $A(X)$ [5], тобто можна розглядати групу дій $(A(X), X^{(r)})$. Якщо J_r ядро цієї дії, то фактор-група $A^{(r)}(X) = A(X)/J_r$ діє на $X^{(r)}$ точно і її називають також групою автоматних підстановок над $X^{(r)}$.

2. Нехай n_1, $n_2, ...,$ — (скінченна або нескінченна) послідовність натуральних чисел, причому $n_i \geq 2$, $i \in \mathbb{N}$; $S_{n_1}, S_{n_2}, ...$ — симетричні групи степенів $n_1, n_2, ...$ відповідно.

Нагадаємо [10], що метасиметричною групою $S(n_1,\, n_2,\, ...)$ метастепеня $(n_1,\, n_2,\, ...)$ називається (скінченно або нескінченно) ітерований вінцевий добуток симетричних груп $S_{n_1}, S_{n_2}, ...$ степенів $n_1, n_2, ...$ відповідно, тобто

$$S(n_1, n_2, ...) \equiv S_{n_1} \wr S_{n_2} \wr ... \, .$$

Якщо послідовність чисел $n_1, n_2, ...$ є скінченною, тобто скінченним є кортеж $(n_1, n_2, ..., n_r)$ ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 2$), то будемо казати, що метасиметрична група має скінченний метастепінь (або має скінченний ранг r). З означення метасиметричної групи випливає, що для довільного впорядкованого скінченного набору натуральних чисел $n_1, n_2, ..., n_r$ ($n_i \geq 2$ для всіх $i = 1, 2, .., r$) з точністю до подібності існує тільки одна метасиметрична група метастепеня $(n_1, n_2, ..., n_r)$, яку позначатимемо $S(n_1, n_2, ..., n_r)$.

Елементи метасиметричної групи $S(n_1, n_2, ..., n_r)$ записують у вигляді наборів довжини r

$$[\omega_1, \omega_2(x_1), \omega_3(x_1, x_2), ..., \omega_r(x_1, x_2, ..., x_{r-1})],$$

які називають підстановками або таблицями, де $\omega_1 \in S_{n_1}$,

$$\omega_i(x_1, x_2, ..., x_{i-1}) \equiv \omega_i(\bar{x}_{i-1}) : \{1, 2, ..., n_1\} \times \\ \times \{1, 2, ..., n_2\} \times ... \times \{1, 2, ..., n_{i-1}\} \to S_{n_i}$$

— довільне відображення, $1 \leq i \leq r$.

3. При дослідженні груп автоматних підстановок виникає проблема побудови їх мінімальних (щодо кількості елементів) систем твірних. Для цього зручно користуватися наступним твердженням.

Теорема 1. [5]. *Для довільного $r \in \mathbb{N}$ група $(A^{(r)}(X), X^{(r)}), |X| = n$, ізоморфна (як група перетворень) r-кратному вінцевому добутку симметричної групи $S(X)$, тобто*

$$A^{(r)}(X) \simeq \underbrace{S_n \wr S_n \wr ... \wr S_n}_{r} \equiv S(n, r).$$

Звідси маємо, що при вивченні груп автоматних підстановок досить розглядати аналогічне питання для групи $S(n, r)$.

У [4] доведено, що група $S_{n_1} \wr S_{n_2}$ містить мінімальну (за кількістю елементів) систему твірних, яка складається з двох підстановок, і наведено конкретні приклади таких систем в залежності від парності чисел n_1 та n_2. Крім того, у [5] отримано більш загальне твердження.

Теорема 2. [5]. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних метасиметричної групи $S(n_1, n_2, ..., n_r)$ (де $n_i \geq 2$ для $i = 1, 2, ..., r$) довільного скінченного рангу $r \geq 2$ містить рівно r елементів.*

Із теорем 1, 2 випливає справедливість наступних тверджень.

Теорема 3. *Кожна мінімальна (за кількістю елементів) система твірних групи $S(n, r)$ для довільного $r \geq 2$ містить рівно r елементів.*

Теорема 4. *Група автоматних підстановок $A^{(r)}(X)$ над скінченним алфавітом X ($|X| = n$; $r, n \in \mathbb{N}$; $r, n \geq 2$) є точно r-породженою.*

4. Наступні таблиці є конкретним прикладом мінімальної (за кількістю елементів) системи твірних групи $S(n, r)$:

$$v_i = [\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}(x_1), \sigma_3^{(i)}(x_1, x_2),$$

$$..., \sigma_r^{(i)}(x_1, x_2, ..., x_{i-1})], \quad i = 1, 2, ..., r, \quad (3)$$

в яких

I. для всіх $k = 3, 4, ..., r$
$\sigma_k^{(1)}(x_1, x_2, ..., x_{k-1}) = \sigma_k^{(2)}(x_1, x_2, ..., x_{k-1}) = \varepsilon$ та

1) якщо n – непарне натуральне число, то
$\sigma_1^{(1)} = (1, 2, ...n)$, $\sigma_2^{(1)}(x_1) = (1, 2)$,
$\sigma_1^{(2)} = (1, 2)$,

$$\sigma_2^{(2)}(x_1) = \begin{cases} (1,2) & x_1 = 1, \\ (1,2,...,n-1) & x_1 = 3, \\ \varepsilon & \text{і і;} \end{cases}$$

2) якщо n – парне натуральне число, то
$\sigma_1^{(1)} = (1, 2, ...n)$, $\sigma_1^{(2)}(x_1) = (1, 2, ..., n-1)$,

$$\sigma_2^{(1)}(x_1) = \begin{cases} (1,2,...,n-1) & x_1 = 1, \\ \varepsilon & \text{і і,} \end{cases}$$

$$\sigma_2^{(2)}(x_1) = \begin{cases} (1,2,...,n) & x_1 = n, \\ \varepsilon & \text{і і.} \end{cases}$$

II. $\sigma_k^{(j)}(x_1, x_2, ..., x_{k-1}) = \varepsilon$ для всіх $k \neq j$, $k, j = 3, 4, ..., r$ та

1) якщо n – непарне натуральне число, то
$\sigma_j^{(j)}(x_1, x_2, ..., x_{j-1}) =$

$$= \begin{cases} (1,2) & \bar{x}_{j-1} = (1,0,...,0), \\ (1,2,...,n) & \bar{x}_{j-1} = (0,1,0,...,0), \\ \varepsilon & \text{і і;} \end{cases}$$

2) якщо n – парне натуральне число, то
$\sigma_j^{(j)}(x_1, x_2, ..., x_{j-1}) =$

$$= \begin{cases} (1,2,...,n-1) & \bar{x}_{j-1} = (1,0,...,0), \\ (1,2,...,n) & \bar{x}_{j-1} = (0,1,0,...,0), \\ \varepsilon & \text{і і.} \end{cases}$$

5. У статті [4] побудовано оцінку зверху діаметра графа Келі групи $S_{n_1} \wr S_{n_2}$. Природним є питання про дослідження аналогічної верхньої оцінки для групи $S(n, r)$ відносно елементів мінімальної системи твірних (3).

Теорема 5. *Діаметр D графа Келі групи $S(n, r)$ відносно системи твірних (3) не перевищує числа $3n^{11}(n-1)^{2r-4}$ $(n, r \geq 2)$.*

Як наслідок проведених міркувань, враховуючи теореми 1,4 та 5, отримуємо вірність наступного твердження.

Теорема 6. *Діаметр D графа Келі групи автоматних підстановок $A^{(r)}(X)$ над скінченним алфавітом X відносно мінімальної r-елементної системи твірних (яка безпосередньо будується за допомогою системи (3)), не перевищує $3n^{11}(n-1)^{2r-4}$ $(n, r \geq 2)$.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Steinberg R.* Generators for simple groups // Canad. J. Math.— 1962.— Vol.14.— P.277-283.

2. *Ashbacher M., Guralnic R.* Some applications of the first cohomology groups // J. of Algebra.— 1984.— N90.— P.446-460.

3. *Buzasi K., Kovacs L.G.* The minimal number of generators of wreath products of nilpotent groups // Contemporary Mathematics.—1989.— Vol.93.— P.115-121.

4. *Сікора В.С.* Діаметр графа Келі вінцевого добутку двох симетричних груп для двохелементної системи твірних // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту: Зб. наук. праць. Математика.— Чернівці: ЧДУ, 2000.— Вип.76.— С.99-105.

5. *Сикора В.С., Сущанский В.И.* Системы порождающих групп автоматных подстановок // Кибернетика и системный анализ.— 2000.— N3.— C.121-133.

6. *Глушков В.М.* Абстрактная теория автоматов // Успехи мат. наук.— 1961.— Т.XVI, вып. 5 (101).— С.3-62.

7. *Чакань Б., Гечег Ф.* О группе автоматных подстановок // Кибернетика.— 1965.— N5.— С.14-17.

8. *Сущанський В.І.* Групи автоматних підстановок // Доповіді НАН України.— 1998.— N6.— С.47-51.

9. *Gecseg F., Peak I.* Algebraic Theory of Automata.— Budapest: Akademiai Kiado, 1972.— 328p.

10. *Калужнин Л.А.* Об одном обобщении силовских p-подгрупп симметрических групп // Acta Math. Hung.— 1951.— V.2, N3-4.— p.198-221.

Стаття надійшла до редколегії 17.11.2001