УДК 517.95

©2002 р. **Н.П. Процах**

Львівський національний університет імені І.Франка, Львів

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛІНІЙНОГО УЛЬТРАПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

В обмеженій області $Q \subset \mathbb{R}^{n+2}$ досліджено мішану задачу для одного нелінійного ультрапараболічного рівняння, гіперболічна частина якого може вироджуватися. Методом Гальоркіна доведено розв'язність такої задачі в узагальнених просторах Соболєва.

The mixed problem for one nonlinear ultraparabolic equation the hyperbolic part of which can degenerate is considered in a bounded domain $Q \subset \mathbb{R}^{n+2}$. The solvability of this problem in the generalized Sobolev spases is proved using the Galerkin method.

Деякі фізичні явища можна описати за допомогою задач для ультрапараболічних рівнянь. Зокрема, рівняння такого типу виникають при дослідженні теорії броунівського руху, марківських дифузійних процесів, розсіюванні електронів, кінетичній теорії, в біології, теорії бінарних електролітів, теорії сповільнення електронів, теорії ймовірностей [1—3] та інших областях науки.

У працях [4—9] автори досліджували задачу Коші для ультрапараболічних рівнянь, які узагальнюють рівняння дифузії з інерцією А.М.Колмогорова. Так, у працях [4,6] автори, досліджуючи гладкість об'ємних потенціалів, одержали умови розв'язності задачі Коші у спеціальних вагових просторах Гельдера, в [7] доведено однозначну розв'язність задачі Коші в класах узагальнених функцій нескінченного порядку типу ультрарозподілів Жевре, а в працях [5,8] знайдено фундаментальні розв'язки, у [9] подано інтегральне зображення розв'язків таких задач.

Дослідженню крайових та мішаних задач для ультрапараболічних рівнянь присвячені праці [10—16]. У праці [10] для крайових задач Діріхле і Неймана без початкових умов для одного рівняння Колмогорова описано клас розв'язків, які явно зображаються за допомогою функції Гріна. У працях [12, 13] отримано існування єдиного розв'язку першої крайової задачі, який має похідні за просторовими змінними з простору Гельдера. У праці [16] за допомогою методу Гальоркіна доведено розв'язність мішаної задачі в просторах Соболєва для рівняння Колмогорова, а в [11], застосовуючи метод фіксованої точки, знайдено умови розв'язності мішаних задач для лінійних та квазілінійних ультрапараболічних рівнянь.

У цій праці в обмеженій області Q досліджено мішану задачу для одного нелінійного ультрапараболічного рівняння, гіперболічна частина якого може вироджуватися. Одержано розв'язність такої задачі в узагальнених просторах Соболєва [17].

1. Формулювання задачі

Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — обмежена область з межею Γ; $\hat{\Omega} = \Omega \times (0, y_0)$, $Q = \hat{\Omega} \times (0, T)$, $0 < T < +\infty$; $Q_\tau = \hat{\Omega} \times (0, \tau)$; $\hat{\Omega}_\tau = Q \cap \{t = \tau\}$.

В області Q розглянемо мішану задачу

$$u_t - \lambda(x, y, t) u_y -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} (a_i(x) |u_{x_i}|^{p(x)-2} u_{x_i})_{x_i} = f(x, y, t), \quad (1)$$

$$u|_{\Gamma \times (0, y_0) \times (0, T)} = 0, u(x, y_0, t) = 0, \quad (2)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (3)$$

Розглянемо простір $L^{p(x)}(\hat{\Omega})$ [17] з нормою $\|v; L^{p(x)}(\hat{\Omega})\| = \inf\{\mu > 0 : \int_{\hat{\Omega}} |v|^{p(x)}/\mu^{p(x)} dx \leq 1\}$. Уведемо множини

$W(Q)=\{v(x,y,t):v\in L^2(Q),v_t\in L^2(Q),v_y\in L^2(Q),v_{x_i}\in L^{p(x)}(Q),i\in\{1,...,n\},v|_\Gamma=0,v(x,y_0,t)=0\}$ з нормою $\|v;W(Q)\|=\|v;L^2(Q)\|+\|v_t;L^2(Q)\|+\|v_y;L^2(Q)\|+\sum\limits_{i=1}^{n}\|v_{x_i};L^{p(x)}(Q)\|$ та $V(Q)=\{v(x,y,t):v\in L^2(Q),v_{x_i}\in L^{p(x)}(Q),i\subset\{1,...,n\},v|_\Gamma=0\}$ з нормою $\|v;V(Q)\|=\|v;L^2(Q)\|+\sum\limits_{i=1}^{n}\|v_{x_i};L^{p(x)}(Q)\|$.

Припустимо, що для коефіцієнтів рівняння (1) виконуються такі умови:

(**A**) $\{a_i,a_{ix_i}\}\subset L^\infty(\Omega)$, $i\in\{1,...,n\}$;

$$a_i(x)\geq a_0>0,\quad\forall\, x\in\Omega;$$

(**L**) $\lambda,\lambda_y,\lambda_t\in L^\infty(Q)$, $\lambda(x,y,t)\geq 0$,

$$\lambda\not\equiv 0,\quad\forall\,(x,y,t)\in Q;$$

(**P**) $p\in C^1(\Omega), 2\leq p_1=\operatorname{ess}\inf\limits_{\Omega}p(x)\leq$

$$\leq\operatorname{ess}\sup_{\Omega}p(x)=p_2<+\infty;\quad x\in\bar\Omega.$$

Означення. *Узагальненим розв'язком задачі (1)—(3) назвемо функцію $u\in W(Q)$, яка задовольняє рівняння*

$$\int\limits_Q\Big[u_tv-\lambda(x,y,t)u_yv+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i}v_{x_i}\Big]dxdydt=$$
$$=\int\limits_Q f(x,y,t)vdxdydt\tag{4}$$

для довільної функції $v\in V(Q)$ та початкову умову (3).

2. Існування розв'язку

Теорема 1. *Нехай виконуються умови (**A**)—(**P**), $\{f_y,f_t,f\}\subset L^2(Q)$, $u_{0x_i}\log|u_{0x_i}|\in L^2(\hat\Omega)$, $\int\limits_{\hat\Omega}\sum\limits_{i=1}^{n}|u_{0x_i}|^{2(p(x)-2)}(u_{0x_ix_i})^2dxdy<+\infty$; $\{u_0,u_{0y}\}\subset L^2(\hat\Omega)$, $\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\frac{(f(x,y_0,t))^2}{\lambda(x,y_0,t)}dxdt<+\infty$. Тоді існує узагальнений розв'язок задачі (1)—(3).*

Доведення. Нехай $\{\varphi^k(x):k\geq 1\}$ — база простору $V(\Omega)$,

$$\varphi^{k,s}(x,y)=\varphi^k(x)\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y,$$

$$u^j(x,y,t)=\sum_{k,s=1}^{j}c^j_{ks}(t)\varphi^{k,s}(x,y),$$
$$j=1,2,...,\tag{5}$$

де $c^j_{ks}(t)$ є розв'язком задачі

$$\int\limits_{\hat\Omega_\tau}\Big[u^j_t\varphi^{k,s}-\lambda(x,y,t)u^j_y\varphi^{k,s}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}u^j_{x_i}\varphi^{k,s}_{x_i}\Big]dxdy=$$
$$=\int\limits_{\hat\Omega_\tau}f(x,y,t)\varphi^{k,s}dxdy,\tag{6}$$

$$c^j_{ks}(0)=u^j_0,\quad\{k,s\}\subset\{1,...,j\}.\tag{7}$$

$$u^j_0(x,y)=\sum_{k,s=1}^{j}u^j_0\varphi^{k,s}(x,y),$$
$$\lim_{j\to\infty}\|u_0-u^j_0\|_{V(\hat\Omega)}=0.$$

За теоремою Каратеодорі [18, с.54] існує абсолютно неперервний розв'язок задачі (6)—(7). Домножимо (6) на $c^j_{ks}(t)$, підсумуємо за s і k, зінтегруємо за t по проміжку $[0,\tau]$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u^j_tu^j-\lambda(x,y,t)u^j_yu^j+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(x)|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}u^j_{x_i}u^j_{x_i}\Big]dxdydt=$$
$$=\int\limits_{Q_\tau}f(x,y,t)u^jdxdydt.$$

Оцінимо кожний доданок отриманої рівності:

$$\tau_1=\int\limits_{Q_\tau}u^j_tu^jdxdydt=\frac12\int\limits_{\hat\Omega_\tau}(u^j)^2dxdy-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{\hat{\Omega}_0}(u_0^j)^2dxdy;$$

$$\tau_2=-\int\limits_{Q_\tau}\lambda(x,y,t)u_y^ju^jdxdydt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,0,t)(u^j(x,0,t))^2dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\lambda_y(x,y,t)(u^j)^2dxdydt;$$

$$\tau_3=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^ju_{x_i}^jdxdydt\geq$$

$$\geq a_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^j|^{p(x)}dxdydt;$$

$$\tau_4=\int\limits_{Q_\tau}f(x,y,t)u^jdxdydt\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}[|f(x,y,t)|^2+|u^j|^2]dxdydt.$$

Звідси одержимо нерівність:

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_\tau}(u^j)^2dxdy+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,0,t)(u^j)^2dxdt+$$

$$+2a_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^j|^{p(x)}dxdydt\leq\int\limits_Q\Big[|f|^2+$$

$$+(-\lambda_y+1)(u^j)^2\Big]dxdydt+\int\limits_{\hat{\Omega}_0}(u_0^j)^2dxdy.$$

Застосувавши лему Гронуолла-Беллмана, одержимо оцінку

$$\int\limits_{\hat{\Omega}_\tau}(u^j)^2dxdy+\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,0,t)(u^j)^2dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u_{x_i}^j|^{p(x)}dxdydt\leq$$

$$\leq M_1\Big[\int\limits_Q|f|^2dxdydt+\int\limits_{\hat{\Omega}_0}(u_0)^2dxdy\Big],\qquad(8)$$

в якій стала M_1 не залежить від j.

Нехай $\omega_s=\left(\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}\right)^2$. Тоді $\left(\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y\right)_{yy}=-\omega_s\cos\frac{(2s-1)\pi}{2y_0}y$. Домножимо (6) на $c_{ks}^j(t)\omega_s$, підсумуємо за s і k, зінтегруємо за t від 0 до τ та замінимо значення $\sum\limits_{s,k=1}^j c_{ks}^j(t)\omega_s\varphi^{k,s}(x,y)$ з попереднього виразу на $-u_{yy}^j$. Матимемо

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[-u_t^ju_{yy}^j+\lambda(x,y,t)u_y^ju_{yy}^j-$$

$$-\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^ju_{x_iyy}^j\Big]dxdydt=$$

$$=-\int\limits_{Q_\tau}f(x,y,t)u_{yy}^jdxdydt.$$

Після таких перетворень оцінимо кожний з доданків одержаної рівності окремо:

$$\tau_5=-\int\limits_{Q_\tau}u_t^ju_{yy}^jdxdydt=\int\limits_{Q_\tau}u_{ty}^ju_y^jdxdydt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{\hat{\Omega}_\tau}(u_y^j)^2dxdy-\frac{1}{2}\int\limits_{\hat{\Omega}_0}(u_{0y}^j)^2dxdy;$$

$$\tau_6=\int\limits_{Q_\tau}\lambda(x,y,t)u_y^ju_{yy}^jdxdydt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,y_0,t)(u_y^j)^2dxdt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\lambda_y(x,y,t)(u_y^j)^2dxdydt;$$

$$\tau_7=-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^j\times$$

$$\times u^j_{x_iyy}dxdydt = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)(p(x)-$$

$$-1)|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}(u^j_{x_iy})^2dxdydt \geq a_0(p_1-$$

$$-1)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |u^j_{x_i}|^{p(x)-2}(u^j_{x_iy})^2dxdydt;$$

$$\tau_8 = -\int\limits_{Q_\tau} f(x,y,t)u^j_{yy}dxdydt =$$

$$= -\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega_t} f(x,y_0,t)u^j_y(x,y_0,t)dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau} f_yu^j_y(x,y_0,t)dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega_t}\left[\frac{2(f(x,y_0,t))^2}{\lambda(x,y_0,t)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\lambda(x,y_0,t)}{2}(u^j_y(x,y_0,t))^2\right]dxdt+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}[|f_y|^2+(u^j_y)^2]dxdydt.$$

З наведених оцінок випливає нерівність:

$$\int\limits_{\hat\Omega_\tau}(u^j_y)^2dxdy + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\lambda(x,y_0,t)(u^j_y)^2dxdt+$$

$$+2a_0(p_1-1)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}(u^j_{x_iy})^2dxdydt \leq$$

$$\leq \int\limits_Q(|f_y|^2+(\lambda_y+1)(u^j_y)^2)dxdydt+$$

$$+\int\limits_{\hat\Omega_0}(u^j_{0y})^2dxdy + \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega_t}\frac{2(f(x,y_0,t))^2}{\lambda(x,y_0,t)}dxdt.$$

Застосувавши лему Гронуолла-Беллмана, матимемо оцінку

$$\int\limits_{\hat\Omega_\tau}(u^j_y)^2dxdy + \int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega}\lambda(x,y_0,t)(u^j_y)^2dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}(u^j_{x_iy})^2dxdydt \leq$$

$$\leq M_2\Bigg[\int\limits_Q|f_y|^2dxdydt + \int\limits_{\hat\Omega_0}(u_{0y})^2dxdy+$$

$$\left.+\int\limits_0^\tau\int\limits_{\Omega_t}\frac{(f(x,y_0,t))^2}{\lambda(x,y_0,t)}dxdt\right], \qquad (9)$$

в якій стала M_2 не залежить від j.

Розглянемо (6) при $t=0$, домножимо на $c^j_{ks}(t)$ та підсумуємо за k,s. Після перетворень отримаємо:

$$\int\limits_{\hat\Omega_0}(u^j_t)^2dxdy \leq M\int\limits_{\hat\Omega_0}\Bigg[(\lambda(x,y,0)u^j_{0y})^2+$$

$$+\sum_{i=1}^n((a_i(x)|u^j_{0x_i}|^{p(x)-2}u^j_{0x_i})_{x_i})^2+$$

$$\left.+|f(x,y,0)|^2\right]dxdy \leq M_3. \qquad (10)$$

Продиференціюємо (6) за t, домножимо на $c^j_{kst}(t)$, підсумуємо за s і k, зінтегруємо за t від 0 до τ. Матимемо:

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[u^j_{tt}u^j_t - \Big(\lambda_t(x,y,t)u^j_y+$$

$$+\lambda(x,y,t)u^j_{yt}\Big)u^j_t + (p(x)-1)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}(u^j_{x_it})^2\Bigg]dxdydt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} f_t(x,y,t)u^j_tdxdydt.$$

Застосувавши (10), оцінимо кожний доданок отриманої рівності:

$$\tau_9 = \int\limits_{Q_\tau}u^j_{tt}u^j_tdxdydt \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\int\limits_{\hat\Omega_\tau}(u^j_t)^2dxdy - \frac{1}{2}M_3;$$

$$\tau_{10} = -\int\limits_{Q_\tau}\Big[\lambda_t(x,y,t)u^j_y + \lambda(x,y,t)u^j_{yt}\Big]\times$$

$$\times u^j_t dxdydt \geq -\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Big[|\lambda_t|^2(u^j_y)^2+$$

$$+(u^j_t)^2\Big]dxdydt \geq +\frac{1}{2}\int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega \lambda(x,0,t)\times$$

$$\times(u^j_t)^2dxdt + \int\limits_{Q_\tau}\frac{\lambda_y}{2}(u^j_t)^2dxdydt;$$

$$\tau_{11} = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n a_i(x)(p(x)-1)|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}\times$$

$$\times(u^j_{x_it})^2dxdydt \geq a_0(p_1-1)\times$$

$$\times\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n |u^j_{x_i}|^{p(x)-2}(u^j_{x_it})^2dxdydt;$$

$$\tau_{12} = \int\limits_{Q_\tau} f_t(x,y,t)u^j_t dxdydt \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\Big[|f_t(x,y,t)|^2 + |u^j_t|^2\Big]dxdydt.$$

Після проведених оцінок отримаємо нерівність

$$\int\limits_{\hat\Omega_\tau}(u^j_t)^2dxdy + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,0,t)(u^j_t)^2dxdt+$$

$$+2a_0(p_1-1)\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}(u^j_{x_it})^2dxdydt \leq$$

$$\leq\int\limits_Q\Big[|f_t|^2 + (\lambda_y+2)(u^j_t)^2+$$

$$+\lambda_t(u^j_y)^2\Big]dxdydt| + M_3.$$

Застосувавши лему Гронуолла-Беллмана і оцінку (9), матимемо нерівність

$$\int\limits_{\hat\Omega_\tau}(u^j_t)^2dxdy + \int\limits_0^\tau\int\limits_\Omega\lambda(x,0,t)(u^j_t)^2dxdt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}(u^j_{x_it})^2dxdydt \leq$$

$$\leq M_4\Big[\int\limits_Q(|f_y|^2+|f_t|^2)dxdydt+$$

$$+\int\limits_{\hat\Omega}(u^j_{0y})^2dxdy\Big], \qquad (11)$$

в якій стала M_4 не залежить від j. З оцінок (8), (9), (11) випливають такі збіжності деякої підпослідовності послідовності $\{u^j : j \geq 1\}$ (за якою збережемо те ж саме позначення):

$$u^j \to u * - \quad L^\infty(0,T;L^2(\hat\Omega));$$

$$u^j_{x_i} \to u_{x_i} \quad L^{p(x)}(Q);$$

$$u^j_y \to u_y * - \quad L^\infty(0,T;L^2(\hat\Omega));$$

$$u^j_t \to u_t * - \quad L^\infty(0,T;L^2(\hat\Omega)). \qquad (12)$$

Із збіжностей (12) випливає, що для всіх $i \in \{1,...,n\}$ $a_i(x)|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}u^j_{x_i} \to \chi_i$-слабко в $L^{p'(x)}(Q)$.

Оскільки $u^j \to u$, $u^j_y \to u_y$ слабко в $L^\infty(0,T;L^2(\hat\Omega))$, то $u^j \to u$ слабко в $W^{1,2}(0,y_0;L^2([0,T]\times\Omega))$. Тоді $u \in C(0,y_0;L^2([0,T]\times\Omega))$, вираз $u(x,y_0,t)$ має зміст і $\lim\limits_{j\to\infty}\int\limits_Q u^j_y v dxdydt = \int\limits_Q u_y v dxdydt$, для довільних $v \in W(Q)$. Зінтегрувавши цю рівність частинами та використавши одержані збіжності, знаходимо, що $u(x,y_0,t) = 0$.

Аналогічно доводимо, що $u \in C(0,T;L^2(\hat\Omega))$ і $u(x,y,0) = u_0(x,y)$.

Покажемо, що u — розв'язок задачі (1)—(3). З (5) можна отримати рівність

$$\int\limits_Q\Big[u^j_t v^{j_0} - \lambda(x,y,t)u^j_y v^{j_0}+$$

$$+\sum_{i=1}^n a_i(x)|u^j_{x_i}|^{p(x)-2}u^j_{x_i}v^{j_0}_{x_i}\Big]dxdydt =$$

$$= \int\limits_Q f(x,y,t)v^{j_0}dxdydt,$$

яка виконується для всіх $v_{j_0} = \sum\limits_{s,k=1}^{j_0} z_{sk}^{j_0}(t)\varphi^{s,k}(x,y)$, $z_{sk}^{j_0} \in C([0,T])$. Сукупність таких функцій v^{j_0} щільна в просторі $V(Q)$. У попередній тотожності перейдемо до границі за вибраною вище послідовністю. Отримаємо, що

$$\int\limits_Q \left[u_t v - \lambda(x,y,t)u_y v + \sum_{i=1}^n \chi_i v_{x_i}\right] dxdydt =$$
$$= \int\limits_Q f(x,y,t) v dxdydt. \tag{13}$$

Доведемо, що

$$\sum_{i=1}^n \chi_i = \sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i}.$$

Розглянемо послідовність

$$0 \le X_j = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n (a_i(x)|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^j -$$
$$-a_i(x)|\psi_{x_i}|^{p(x)-2}\psi_{x_i})(u_{x_i}^j - \psi_{x_i})dxdydt =$$
$$= \int\limits_{Q_\tau} \left[\sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^j|^{p(x)} -\right.$$
$$- \sum_{i=1}^n a_i(x)|\psi_{x_i}|^{p(x)-2}\psi_{x_i}(u_{x_i}^j - \psi_{x_i}) -$$
$$\left.- \sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^j|^{p(x)-2}u_{x_i}^j\psi_{x_i}\right] dxdydt,$$
$$\psi \in W(Q).$$

Згідно з (6), матимемо

$$\int\limits_Q \sum_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}^j|^{p(x)} dxdydt =$$
$$= \int\limits_{Q_\tau} \left[f(x,y,t)u^j -\right.$$
$$\left.-u_t^j u^j + \lambda(x,y,t)u_y^j u^j\right] dxdydt. \tag{14}$$

Підставимо (14) у X_j, використаємо формулу (12), в якій виберемо $v = u$. Після виконання вказаних перетворень матимемо

$$0 \le \lim_{j\to\infty} sup X_j = \int\limits_{Q_\tau} \left[f(x,y,t)u - u_t u -\right.$$
$$\left.-\lambda(x,y,t)u_y u\right] + \sum_{i=1}^n \left[-a_i(x)|\psi_{x_i}|^{p(x)-2}\psi_{x_i}\times\right.$$
$$\left.\times(u_{x_i} - \psi_{x_i}) - \chi_i\psi_{x_i}\right] dxdydt =$$
$$= \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left[a_i(x)|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i} - \chi_i\right]\times$$
$$\times(u_{x_i} - \psi_{x_i})dxdydt.$$

Виберемо $\psi = u - æw$, $w \in W(Q)$, $æ > 0$. З неперервності $\sum\limits_{i=1}^n a_i(x)|\xi|^{p(x)-2}\xi$ за ξ випливатиме, що $\sum\limits_{i=1}^n a_i(x)|u_{x_i}|^{p(x)-2}u_{x_i} = \sum\limits_{i=1}^n \chi_i$ майже скрізь в Q. Тому u — розв'язок задачі (1)—(3).

3. Єдиність розв'язку

Теорема 2. *Якщо виконуються умови* (**A**)*—(***P***), то задача (1)—(3) не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що існує два різні розв'язки u_1, u_2 задачі (1)—(3). Їх різниця $u = u_1 - u_2$ задовольнятиме рівність

$$\int\limits_Q \left[u_t v - \lambda(x,y,t)u_y v +\right.$$
$$+ \sum_{i=1}^n a_i(x)\Big(|u_{1x_i}|^{p(x)-2}u_{1x_i} -$$
$$\left.-|u_{2x_i}|^{p(x)-2}u_{2x_i}\Big)v_{x_i}\right] dxdydt = 0 \tag{15}$$

для довільної функції $v \in V(Q)$, та умови (2), (3), в яких $u_0(x,y) \equiv 0$. Виберемо в цій рівності $v = u$ та оцінимо доданки одержаної рівності. Оцінки першого та другого доданків аналогічні до оцінок інтегралів τ_1, τ_2.

$$\tau_3 = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n a_i(x)\left[|u_{1x_i}|^{p(x)-2}u_{1x_i} -\right.$$

$$-|u_{2x_i}|^{p(x)-2}u_{2x_i}\Big](u_{1x_i}-u_{2x_i})dxdydt \geq 0.$$

Тому з (15) випливатиме, що $\int\limits_Q u^2 dxdy \leq 0$.

Отже, $u \equiv 0$ майже всюди в Q, тобто, $u^1 = u^2$.

Зауваження. *Якщо $u_0 \equiv 0$, коефіцієнти a_i залежать від x, t та $2 < p(x) < +\infty$, $p(x) \in L^\infty(\Omega)$, то теореми 1, 2 залишаються правильними.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Введение в теорию случайных процессов.— М.: Наука, 1977.— 568 с.

2. *Флеминг У., Ришел Р.* Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.— М.: Мир, 1978.— 316 с.

3. *Kolmogoroff A.* Zufällige Bewegungen (Zur Theorie der Brownschen Bewegung) // Ann. Math., 1934.— **35.** — P. 116—117.

4. *Дронь В.С.* Про коректну роз'язність у вагових просторах Гельдера задачі Коші для одного класу вироджених параболічних рівнянь типу Колмогорова // Науковий вісник Чернівець. ун-ту. Математика.— 2000.— Вип.76.— С. 32—42.

5. *Малицька Г.П.* Про структуру фундаментальних розв'язків задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією // Вісник Націон. ун-ту "Львівська політехніка", Серія "Прикладна математика".— 2000.— N 411.— С. 221—228.

6. *Дронь В.С., Івасишен С.Д.* Про властивість об'ємного потенціалу та коректну розв'язність задачі Коші для одного модельного ультрапараболічного рівняння // Науковий вісник Чернівець. ун-ту. Математика.— 1999.— Вип.46.— С. 36—43.

7. *Городецкий В.В., Житарюк И.В.* Стабилизация решений задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений в пространствах обобщенных функций// Нелинейн. граничн. задачи.— 1993.— Вып. 5.— С. 31—36.

8. *Эйдельман С.Д., Малицкая А.П.* О фундаментальных решениях и стабилизации решения задачи Коши для одного класса вырождающихся параболических уравнений // Дифференц. уравнения.— 1975.— **11.**— N 7.—С. 1316—1331.

9. *Ивасишен С.Д., Андросова Л.М.* Об интегральном представлении решений одного класса вырожденных параболических уравнений типа Колмогорова // Дифф. уравнения.— 1991.— **27.**— N 3.— С. 479—487.

10. *Балабушенко Т.М., Івасишен С.Д.* Крайові задачі Фур'є для рівняння Колмогорова дифузійного процесу Уленбека-Орнштейна з виродженням // Науковий вісник Чернівець. ун-ту. Математика.— 1999.— Вип. 46.— С. 5—12.

11. *Lascialfari F., Morbidelli D.* A bounlary value problem for a class of quasilinear ultraparabolic equations // Commun. Part. Diff. Equation.— 1998.— **23.**— N 5—6.— P. 847–868.

12. *Терсенов С.А.* О краевых задачах для одного класса ультрапараболических уравнений и их приложения // Матем. сборник.— 1987.— **133 (175).**— N4(8).— С. 539—555.

13. *Орлова С.А.* О первой краевой задаче для прямо и обратно ультрапараболического уравнения // Сибирск. мат. журнал.— 1990.— **31.**— N6.— С. 211—215.

14. *Паскалев Г.П.* Об исследовании одной краевой задачи для ультрапараболического уравнения с постоянными коэффициентами вариационным методом // Дифференц. уравнения.— 1992.— **28.**— N9.— С. 1640—1642.

15. *Пятков С.Г.* Разрешимость краевых задач для одного ультрапараболического уравнения // Некласические уравнения и уравнения смешанного типа.— Новосибирск, 1990.— С. 182—197.

16. *Амиров Ш.* Смешанная задача для ультрапараболического уравнения в ограниченной области // Корректные краевые задачи для неклассических уравнений математической физики.— Новосибирск, 1984.— С. 173—179.

17. *Kovácik O., Rákosnik J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$ // Czechosl. Math. J.— 1991.— **41.**— N4.— P. 592—618.

18. *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Иностр. литература, 1958.— 474 с.

Стаття надійшла до редколегії 08.10.2001