УДК 517.928

©2002 р. Р.І. Петришин, Т.М. Сопронюк

Чернівецький національний університет імені Ю. Федьковича, Чернівці

ОЦІНКИ ПОХИБКИ МЕТОДУ УСЕРЕДНЕННЯ ДЛЯ БАГАТОЧАСТОТНИХ КОЛИВНИХ СИСТЕМ

Встановлено точну залежність оцінок осциляційних інтегралів від параметрів, а самі оцінки використано для обгрунтування методу усереднення на відрізку і півосі для резонансних коливних систем з повільно змінними частотами.

The exact dependence of estimations of the oscillation integrals of parameter is established. These estimation are used for the substantiation of averaging method on the segment and half-axis for resonance oscillation systems with slowly shifting frequencies.

Розглядається багаточастотна нелінійна система звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,\varphi,\tau),$$

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\omega(x,\tau)}{\varepsilon} + b(x,\varphi,\tau), \qquad (1)$$

в якій $x \in D \subset R^n$, $\varphi \in R^m$, $m \geq 2$, $\tau \in [0,L] = I$, $(0,\varepsilon_0] \ni \varepsilon$ — малий параметр, D — обмежена область, дійсні функції $a, b, \omega, \dfrac{\partial\omega}{\partial\tau}, \dfrac{\partial\omega}{\partial x}$ неперервні по $(x,\varphi,\tau) \in D \times R^m \times I \equiv G$ і обмежені сталою σ_1. Вважатимемо, що a, b задовольняють в G умову Ліпшиця по x, φ, τ зі сталою Ліпшиця σ_1 і належать до класу майже періодичних по φ_k, $k = \overline{1,m}$, функцій, які розкладаються в рівномірно по φ збіжний в G ряд Фур'є

$$(a(x,\varphi,\tau), b(x,\varphi,\tau)) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} (a_\nu(x,\tau), b_\nu(x,\tau)) e^{i(\lambda_\nu,\varphi)},$$

де $\lambda_0 = 0$, $\lambda_\nu \neq 0$ при $\nu \geq 1$, i — уявна одиниця, (λ_ν, φ) — скалярний добуток векторів, причому

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\|\lambda_\nu\|} + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|^{\frac{1}{2}}} \right) \|a_\nu(x,\tau)\| \leq \sigma_1,$$

$$\forall\, (x,\tau) \in D \times I. \qquad (2)$$

Усереднена по всіх швидких змінних φ система набуде вигляду

$$\frac{d\bar{x}}{d\tau} = \bar{a}(\bar{x},\tau),$$

$$\frac{d\bar{\varphi}}{d\tau} = \frac{\omega(\bar{x},\tau)}{\varepsilon} + \bar{b}(\bar{x},\tau), \qquad (3)$$

де

$$(\bar{a}(\bar{x},\tau), \bar{b}(\bar{x},\tau)) =$$

$$= \lim_{T\to\infty} T^{-m} \int_0^T \ldots \int_0^T (a(\bar{x},\varphi,\tau),$$

$$b(\bar{x},\varphi,\tau)) d\varphi_1 \ldots d\varphi_m = (a_0(x,\tau), b_0(x,\tau)).$$

У статті [1, с.275] і монографії [2, с.28, 63] при досить сильних обмеженнях на коефіцієнти Фур'є функцій a, b встановлено оцінки похибки методу усереднення вигляду $\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \leq \sigma\sqrt{\varepsilon}$ на відрізку і півосі, де $x(\tau)$ і $\bar{x}(\tau)$ повільні компоненти розв'язків систем відповідно (1) і (3), для яких $x(0) = \bar{x}(0)$, а $\varphi(0)$ і $\bar{\varphi}(0)$ — довільні. У даній роботі завдяки (2) ми дещо послаблюємо ці обмеження і досліджуємо, як впливає ця обставина на характер оцінок.

Нехай

$$|(\lambda_\nu, \omega(x,\tau))| +$$

$$+ \left| \left(\lambda_\nu, \frac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial\tau} + \frac{\partial\omega(x,\tau)}{\partial x} a(x,\varphi,\tau) \right) \right| \geq$$

$$\geq \sigma_0 \|\lambda_\nu\| \qquad (4)$$

для всіх $(x,\varphi,\tau) \in G$ і $\nu \geq 1$ з деякою додатною сталою σ_0.

Лема 1. *Якщо виконується умова (4), то функція*

$$\Omega_{\lambda_\nu}(\tau,\varepsilon)=\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau(\lambda_\nu,\omega(x(t),t))dt\right\}$$

задовольняє нерівність

$$\left|\int\limits_{\bar\tau}^{\tau}\Omega_{\lambda_\nu}(t,\varepsilon)dt\right|\le\sigma_2\varepsilon^{\frac12}\left(\frac{1}{\|\lambda_\nu\|}+\frac{1}{\|\lambda_\nu\|^{\frac12}}\right),\quad(5)$$

$\forall\,\tau,\bar\tau\in I$, $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $\nu\ge1$ зі сталою σ_2, не залежною від $\tau,\bar\tau,\lambda,\varepsilon$.

Доведення. Із (4) випливає, що в кожній точці $\tau^*\in I$ виконується хоч одна із двох нерівностей

$$|(\lambda_\nu,\omega(x(\tau^*),\tau^*))|\ge\frac12\sigma_0\|\lambda_\nu\|,$$

$$\left|\frac{d}{d\tau}(\lambda_\nu,\omega(x(\tau^*),\tau^*))\right|\ge\frac12\sigma_0\|\lambda_\nu\|.$$

Якщо справедлива перша з них, то на підставі неперервності $\omega(x(\tau),\tau)$ на I існує таке незалежне від ν і τ^* число $\beta>0$, що

$$|(\lambda_\nu,\omega(x(\tau),\tau))|\ge\frac14\sigma_0\|\lambda_\nu\|,$$

$$\forall\,\tau\in I\cap[\tau^*-\beta,\tau^*+\beta]\equiv I_1.\qquad(6)$$

Якщо ж перша з цих нерівностей порушується, то

$$\left|\frac{d}{d\tau}(\lambda_\nu,\omega(x(\tau),\tau))\right|\ge\frac14\sigma_0\|\lambda_\nu\|\quad\forall\,\tau\in I_1,$$

або

$$|(\lambda_\nu,\omega(x(\tau),\tau))|\ge\frac14\sigma_0\|\lambda_\nu\||\tau-\tau_1|,\qquad(7)$$

де τ_1 — точка мінімуму функції $|(\lambda_\nu,\omega(x(\tau),\tau))|$ на I_1. Звідси одержимо, що

$$|(\lambda_\nu,\omega(x(\tau),\tau))|\ge\frac14\sigma_0\|\lambda_\nu\|\mu\qquad(8)$$

при $|\tau-\tau_1|\ge\mu$ і $\tau\in I_1$, де μ — досить мале додатне число. Якщо відрізок $[\bar\tau,\tau]$ подати у вигляді об'єднання відрізків довжини 2β і останнього відрізка, довжина якого не перевищує 2β, і скористатись формулою інтегрування частинами, то на підставі (6)—(8) аналогічно як і в [2, с.67] дістанемо

$$\left|\int\limits_{\bar\tau}^{\tau}\Omega_{\lambda_\nu}(t,\varepsilon)dt\right|\le$$

$$\le\tilde\sigma_2\left(\frac{\varepsilon}{\|\lambda_\nu\|}+\mu+\frac{\varepsilon}{\mu\|\lambda_\nu\|}\right).$$

Аналіз останньої нерівності показує, що найкращий порядок по ε і $\|\lambda_\nu\|$ оцінки буде в тому випадку, коли покласти $\mu=\varepsilon^{\frac12}\|\lambda_\nu\|^{-\frac12}$ при $\|\lambda_\nu\|\ge1$ і $\mu=\varepsilon^{\frac12}$ при $\|\lambda_\nu\|<1$. Таким чином, оцінка (5) доведена.

Нерівність (5) уточнює відповідні результати з [1, с.276] та [2, с.63] стосовно залежності від $\|\lambda_\nu\|$.

Приклад осциляційного інтеграла з $\omega=(\tau+1,\tau)$ і $\lambda_\nu=\left(\frac1\nu,-\frac1\nu\right)$, ν — довільне натуральне, і який задовольняє оцінку

$$\left|\int\limits_0^1\Omega_{\lambda_\nu}(t,\varepsilon)dt\right|=\left|\int\limits_0^1\exp\frac{it}{\varepsilon\nu}dt\right|\ge$$

$$\ge\varepsilon\nu\left|\sin\frac{1}{\nu\varepsilon}\right|=\frac{\sqrt2\varepsilon}{\|\lambda_\nu\|}$$

при $\nu\to\infty$ і $\varepsilon=\dfrac{2}{\pi\nu}\to0$, показує, що нерівність (5) не можна покращити відносно порядку по $\|\lambda_\nu\|$ при $\|\lambda_\nu\|\to0$.

Приклад осциляційного інтеграла з $\omega=(2\tau+1,1)$ і $\lambda_\nu=(\nu,-\nu)$, ν — довільне натуральне, та нерівності

$$\left|\int\limits_0^\tau\Omega_{\lambda_\nu}(t,\varepsilon)dt\right|\ge\int\limits_0^\tau\cos\frac{t^2\nu}{\varepsilon}dt\ge$$

$$\ge\frac12\tau=\frac12\sqrt{\frac{\pi\sqrt2}{3}}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\|\lambda_\nu\|}},$$

$$\tau=\sqrt{\frac{\pi\varepsilon}{3\nu}},$$

доводять точність оцінки (5) по $\|\lambda_\nu\|$ при $\|\lambda_\nu\|\to\infty$.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови (2), (4) і крива* $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ *лежить в* D *разом з деяким* ρ*-околом при* $\tau \in I$*, то існують такі сталі* $\varepsilon_0^* > 0$ *і* $\sigma_3 > 0$*, що для всіх* $\tau \in I$ *і* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$*,* $\varepsilon_0 \le \varepsilon_0^*$*, справедлива нерівність*

$$\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \le \sigma_3 \varepsilon^{\frac{1}{4}}. \tag{9}$$

Доведення. Зафіксуємо досить мале додатне Δ (його ми означимо нижче) і припустимо, що $\tau \ge \Delta$. Тоді із рівнянь (1), (3) знаходимо, що

$$\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \le$$
$$\le \sigma_1 \int_0^\tau \|x(t) - \bar{x}(t)\| dt +$$
$$+ \sum_{s=0}^{s_0-1} \left\| \int_{s\Delta}^{(s+1)\Delta} \tilde{a}(x(t), \varphi(t), t) dt \right\| +$$
$$+ \left\| \int_{s_0\Delta}^{\tau} \tilde{a}(x(t), \varphi(t), t) dt \right\|, \tag{10}$$

де $\tilde{a}(x, \varphi, \tau) = a(x, \varphi, \tau) - \bar{a}(x, \tau)$, а s_0 — ціла частина числа $\dfrac{\tau}{\Delta}$. Розглянемо відрізок $[s\Delta, (s+1)\Delta]$. На підставі умови Ліпшиця і оцінки (5) дістанемо

$$\left\| \int_{s\Delta}^{(s+1)\Delta} \tilde{a}(x(t), \varphi(t), t) dt \right\| \le$$
$$\le \left\| \int_{s\Delta}^{(s+1)\Delta} \tilde{a}\Big(x^0, \theta^0 + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \omega(x(\tau), \tau) d\tau, \tau^0\Big) dt \right\| +$$
$$+ \sigma_4 \Delta^2 \le \sum_{\nu=1}^{\infty} \|a_\nu(x^0, \tau^0)\| \left| \int_{s\Delta}^{(s+1)\Delta} \Omega_{\lambda_\nu}(t, \varepsilon) dt \right| +$$
$$+ \sigma_4 \Delta^2 \le \sigma_1 \sigma_2 \varepsilon^{\frac{1}{2}} + \sigma_2 \Delta^2.$$

Тут $\tau_0 = s\Delta, x^0 = x(\tau_0), \theta^0 = \theta(\tau_0)$, а $\theta = \theta(\tau)$ — розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\theta}{d\tau} = b\Big(x(\tau), \theta + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\tau \omega(x(t), t) dt, \tau\Big),$$
$$\theta|_{\tau=0} = \varphi(0).$$

Таку ж оцінку задовольняє останній доданок у правій частині нерівності (10). Тому згідно з нерівністю Гронуолла-Беллмана із (10) для $\tau \ge \Delta$ отримаємо нерівність

$$\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \le e^{\sigma_1 L} \sigma_5 (\Delta + \varepsilon^{\frac{1}{2}} \Delta^{-1}),$$

з якої випливає, що вона буде найкращою відносно порядку по ε при $\Delta = \varepsilon^{\frac{1}{4}}$. Така ж нерівність справедлива і при $\tau < \Delta$, тільки в цьому випадку для її обгрунтування немає потреби ділити $[0, \tau]$ на частини. Звідси одержимо (9) з $\sigma_3 = 2\sigma_5 e^{\sigma_1 L}$. Нарешті, накладемо обмеження $\sigma_3 \varepsilon_0^{\frac{1}{4}} \le \dfrac{1}{2}\rho$, завдяки якому крива $x = x(\tau)$ лежить в D для всіх $\tau \in I$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Теорему доведено.

В умові (4) замість функції a можна взяти лише резонансні доданки в її розкладі в ряд Фур'є, тобто такі, для яких величина $|(\lambda_\nu, \omega(x, \tau))|$ дорівнює нулю або досить мала. Вперше на таку обставину звернув увагу М.М. Хапаєв [3], проте ним не досліджена кількісна залежність оцінки похибки методу усереднення від малого параметра ε. Ця задача розв'язана в монографії [2]. Нижче ми сформулюємо аналогічний результат при дещо послаблених припущеннях на систему.

Нехай $\dfrac{\partial a}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial a}{\partial \tau}$ неперервні в G і

$$\left\| \frac{\partial a(x, \varphi, \tau)}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial a(x, \varphi, \tau)}{\partial \tau} \right\| +$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} \Bigg[\Big(1 + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|}\Big) \|a_\nu(x, \tau)\| +$$
$$+ \frac{1}{\|\lambda_\nu\|} \Big(\left\| \frac{\partial a_\nu(x, \tau)}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial a_\nu(x, \tau)}{\partial \tau} \right\| \Big) \Bigg] \le$$
$$\le \sigma_1 \quad \forall \, (x, \varphi, \tau) \in G, \tag{11}$$

а частоти задовольняють замість умови (4) умову [2]

$$|(\lambda_\nu, \omega(x, \tau))| +$$
$$+ \left| \Big(\lambda_\nu, \frac{\partial \omega(x, \tau)}{\partial \tau} + \frac{\partial \omega(x, \tau)}{\partial x} \delta(x, \varphi, \tau, \varepsilon) \Big) \right| \ge$$
$$\ge \sigma_0 \|\lambda_\nu\| \tag{12}$$

при $\nu \geq 1$, $(x, \varphi, \tau, \varepsilon) \in G \times (0, \varepsilon_0]$ і деякому $\alpha \in [0, \frac{1}{2})$, де

$$\delta(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = a_0(x, \tau) +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(x, \tau) h_{\varepsilon^\alpha}((\bar{\lambda}_\nu, \omega(x, \tau))) e^{i(\lambda_\nu, \varphi)},$$

$\lambda_\nu = \bar{\lambda}_\nu \|\lambda_\nu\|$, $h_d(t)$ — парна фінітна неперервно диференційовна на R функція з носієм $[-2d, 2d]$, $0 \leq h_d(t) \leq 1$, $h_d(t) \equiv 1$ при $t \in [-d, d]$.

Як і в [2, с.63] при зроблених припущеннях встановлюємо оцінку (5) осциляційного інтеграла, яка дозволяє сформулювати наступне твердження.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення (11), (12) і крива $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ лежить в D разом із своїм ρ-околом для $\tau \in I$. Тоді при досить малому додатному ε_0 для всіх $(\tau, \varepsilon) \in I \times (0, \varepsilon_0]$ справджується нерівність (9).*

Розглянемо тепер випадок, коли частоти $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$ не залежать від x, тобто $\omega(x, \tau) = \omega(\tau)$, і припустимо, що при деякому $p \geq m$

$$\omega \in C^{p-1}_{[0,L]}, \det(W_p^*(\tau) W_p(\tau)) > 0,$$

$$\forall \tau \in [0, L]. \tag{13}$$

Тут $W_p(\tau)$ і $W_p^*(\tau)$ позначають відповідно $p \times m$-матрицю

$$\left(\frac{d^{r-1}}{d\tau^{r-1}} \omega_j(\tau) \right)_{j,r=1}^{m,p}$$

і транспоновану матрицю.

Лема 2. *Якщо ω задовольняє умову (13) і ε_0 — досить мале додатне, то для всіх $\lambda = (\lambda^{(1)}, ..., \lambda^{(m)}) \neq 0$, $\bar{\tau}, \tau \in I$ і $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ справедлива оцінка*

$$\left| \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \Omega_\lambda(t, \varepsilon) dt \right| \leq$$

$$\leq \sigma_6 \varepsilon^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{\|\lambda\|} + \frac{1}{\|\lambda\|^{1/p}} \right) \tag{14}$$

зі сталою σ_5, незалежною від $\tau, \bar{\tau}, \lambda$ і ε.

Доведення. При зроблених припущеннях в [2, с.21] одержана нерівність

$$\left| \int_{\bar{\tau}}^{\tau} \Omega_\lambda(t, \varepsilon) dt \right| \leq$$

$$\leq \sigma_7 \left(\mu + \frac{\varepsilon \mu^{1-p}}{\|\lambda\|} + \frac{\varepsilon}{\|\lambda\|} \right),$$

в якій μ — довільна додатна стала, а σ_7 не залежить від $\bar{\tau}, \tau, \lambda, \mu$ і ε. Звідси при $\mu^p = \varepsilon \|\lambda\|$ для $\|\lambda\| \geq 1$ і $\mu^p = \varepsilon$ для $\|\lambda\| < 1$ дістанемо доведення леми.

Нерівність (14) покращує результат з [2] відносно порядку по $\|\lambda\|$ при $\|\lambda\| \to \infty$.

Використовуючи лему 2 і повторюючи схему доведення теореми 1, встановлюємо наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай: 1) a, b майже періодичні по φ_k, $k = \overline{1, m}$, задовольняють в G умову Ліпшиця по x, φ, τ зі сталою Ліпшиця σ_1 і*

$$\|a(x, \varphi, \tau)\| + \|b(x, \varphi, \tau)\| \leq \sigma_1,$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\|\lambda_\nu\|} + \frac{1}{\|\lambda_\nu\|^{\frac{1}{p}}} \right) (\|a_\nu(x, \tau)\| +$$

$$+ \|b_\nu(x, \tau)\|) \leq \sigma_1$$

$$\forall (x, \tau) \in D \times I;$$

2) $\omega = \omega(\tau)$ і виконується умова (13);

3) повільна компонента $\bar{x}(\tau)$ розв'язку $(\bar{x}(\tau), \bar{\varphi}(\tau))$ усередненої системи (3) лежить в D разом із своїм ρ-околом при $\tau \in I$.

Тоді існує така стала σ_8, що $\forall (\tau, \varepsilon) \in I \times (0, \varepsilon_0]$ $(0 < \varepsilon_0$ — досить мале) виконується нерівність

$$\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| + \|\varphi(\tau) - \bar{\varphi}(\tau)\| \leq \sigma_8 \varepsilon^{\frac{1}{2p}},$$

в якій $(x(\tau), \varphi(\tau))$ — розв'язок системи (1), $x(0) = \bar{x}(0)$, $\varphi(0) = \bar{\varphi}(0)$.

Дане твердження і метод доведення теореми 3 роботи [4] дозволяють перефразувати теорему 2.4 з монографії [2] наступним чином.

Теорема 4. *Нехай:*

а) виконуються умови 1), 2) теореми 3 при $(x, \varphi, \tau) \in D \times R^m \times [0, \infty)$*;*

б) функція $\dfrac{\partial \bar{a}(x, \tau)}{\partial x}$ *обмежена і рівномірно неперервна на множині* $D \times [0, \infty)$*, а матрицант* $Q(\tau, t)$ *системи у варіаціях*

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\partial}{\partial x} \bar{a}(\bar{x}(\tau), \tau) z$$

задовольняє нерівність

$$\|Q(\tau, t)\| \leq K e^{-\gamma(\tau - t)} \ \forall \tau \geq t \in [0, \infty)$$

з деякими сталими $K \geq 1$ *і* $\gamma > 0$*;*

в) функції $\dfrac{d^{r-1}}{d\tau^{r-1}} \omega(\tau)$, $r = \overline{1, p}$, *рівномірно неперервні на* R *і*

$$\|(W_p^*(\tau) W_p(\tau))^{-1} W_p^*(\tau)\| \leq \sigma_1 \ \forall \tau \in [0, \infty).$$

Тоді

$$\|x(\tau) - \bar{x}(\tau)\| \leq \sigma_9 \varepsilon^{\frac{1}{2p}} \ \forall (\tau, \varepsilon) \in [0, \infty) \times (0, \varepsilon_0],$$

де $x(\tau)$ *— повільна компонента розв'язку* $(x(\tau), \varphi(\tau))$ *системи (1), для якого* $x(0) = \bar{x}(0)$*, а* $\varphi(0)$ *— довільне.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А.М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения.— 1987.— **23**, N 2.— С.267-278.

2. *Самойленко А.М., Петришин Р.І.* Багаточастотні коливання нелінійних систем.— К.: Ін-т математики НАН України, 1998.— 340 с.

3. *Хапаев М.М.* Усреднение в теории устойчивости.— М.: Наука, 1986.— 192 с.

4. *Петришин Я.Р.* Обгрунтування методу усереднення на півосі для одного класу нелінійних коливних систем з імпульсним впливом // Наук. вісник Чернівецького ун-ту: Зб. наук. пр. Вип. 111. Математика.— Чернівці: Рута, 2001.— С.105-109.

Стаття надійшла до редколегії 08.12.2001