УДК 517.21

©2002 р. Г.М. Перун

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

# ПРО РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛІЧНОГО ТИПУ З МОЛОДШИМИ ПОХІДНИМИ У НЕЛІНІЙНОСТЯХ

Встановлено існування в середньому квадратичному розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння довільного порядку, яке має нелінійності з молодшими похідними.

The existence in the mean square of the solution of Cauchy problem is established for parabolic equation of any order, which has nonlinearities with lower derivatives.

У розділі 3 праці [1] досліджено існування розв'язку задачі Коші для параболічних систем з слабкими нелінійностями в класах зростаючих функцій.

У праці [2] отримано теореми існування, єдиності, а також з'ясовано питання гладкості розв'язку задачі Коші в залежності від гладкості коефіцієнтів лінійних стохастичних параболічних рівнянь другого порядку.

У [3] доведено існування розв'язку задачі Коші для квазілінійного рівняння зі слабкою нелінійністю та встановлено умови стійкості та асимптотичної стійкості розв'язку при $t \to +\infty$.

Тут встановлюється існування розв'язку задачі Коші для параболічного рівняння довільного порядку, яке містить нелінійності з молодшими похідними при детермінованих та збурених доданках.

Нехай $(\Omega, F, P)$ — ймовірнісний простір. Розглянемо неспадний потік $\sigma$-алгебр $\{F_t, t \geq 0\}$, $F_t \subset F$. Випадкова функція $u(t,x,\omega)$, визначена на $[t_0,T] \times E_n \times \Omega = \Pi_t \times \Omega$, є $F_t$ — вимірною відносно $\sigma$-алгебри борелівських множин при всіх $t$ і $x$. Вона задовольняє квазілінійне параболічне рівняння

$$d_t u = \left[ \sum_{|k|=2b} a_k(t,x) D_x^k u(t,x,\omega) + \right.$$

$$\left. + f(t,x,u,\cdots,u_x^{(s)}) \right] dt +$$

$$+ b(t,x,u,u',\cdots,u_x^{(s)}) dw(t,\omega), s \leq 2b-1 \quad (1)$$

та умову

$$u_{|t=t_0} = \varphi(x,\omega), x \in E_n, \omega \in \Omega. \quad (2)$$

Тут $w(t,\omega)$ — стандартний скалярний вінерівський процес.

Уведемо до розгляду простір $\Re_{[t_0,T]}^{(s)}$ функцій з скінченною спеціальною нормою з математичним сподіванням

$$\|u\|^2_{\Re_{[t_0,T]}^{(s)}} = \int_{t_0}^{T} \int_{E_n} M \left| \sum_{k \leq s} D_x^k u \right|^2 dx dt =$$

$$= \int_{t_0}^{T} \left\| \sum_{k \leq s} D_x^k u \right\|^2_{L_2} dt. \quad (3)$$

Нехай коефіцієнти рівняння $a_k(t,x), |k| = 2b$, задовольняють умови існування фундаментального розв'язку $Z(t,\tau,x,y)$ відповідного (1) детермінованого однорідного рівняння [1], випадкові функції $b(t,x,u,u',\cdots,u_x^{(s)})$, $f(t,x,u,u',\cdots,u_x^{(s)})$ узгоджені з потоком, $F_t$-вимірні і $\int_0^T |b|^2 dt < +\infty$. З допомогою $Z(t,\tau,x,y)$ поставимо у відповідність задачі (1), (2) інтегро-диференціальне рівняння

$$u(t,x,\omega) = \int_{E_n} Z(t,t_0,x,y)\varphi(y)dy +$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{E_n} Z(t,\tau,x,y)f(\tau,y,u,\cdots,u_y^{(s)})dyd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{E_n} Z(t,\tau,x,y)b(\tau,y,u,u',\cdots,u_y^{(s)})dydw, \tag{4}$$

за умови, що інтеграли в (4) існують.

Продиференціюємо (4) по $x$ до порядку $s<2b$. Тоді дістанемо систему стохастичних інтегральних рівнянь з невідомою одноколонною матрицею $v(t,x,\omega)$, яка містить похідні від функції $u(t,x,\omega)$:

$$v(t,x,\omega)=\int_{E_n} R(t,t_0,x,y)\varphi(y,\omega)dy+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{E_n} R(t,\tau,x,y)f(\tau,y,v)dyd\tau+$$

$$+\int_{t_0}^{t}\int_{E_n} R(t,\tau,x,y)b(\tau,y,v)dydw(\tau,\omega), \tag{5}$$

де $R(t,\tau,x,y)=\left\|D^kZ(t,\tau,x,y)\right\|$ — матриця з похідних $|k|\leq s$. Для норми матриці $Z$ справджується оцінка [1]

$$\left|D_x^kZ(t,\tau,x,y)\right|\leq C_k(t-\tau)^{-\frac{n+|k|}{2b}}\times$$

$$\times\exp\left\{-c\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^q(t-\tau)^{-\frac{1}{2b}}\right\}, \tag{6}$$

$q=\dfrac{2b}{2b-1}$, де $C_k$, $c$ — додатні сталі, $|k|<2b$.

Якщо існує в середньому квадратичному з імовірністю 1 розв'язок системи інтегральних рівнянь (5) вигляду $v=\begin{pmatrix} v_1\\ \cdots\\ v_s\end{pmatrix}$, то $v_1$ будемо називати узагальненим розв'язком задачі Коші (1),(2).

Для побудови розв'язку системи рівнянь (5), оцінимо інтеграли в правій частині системи (5), позначивши їх відповідно $I_0,I_1,I_2$. Використовуючи нерівність (6), отримаємо

$$\left|\int_{E_n} R(t,\tau,x,y)dy\right|=\left|\int_{E_n} D_x^kZ(t,\tau,x,y)dy\right|\leq$$

$$\leq\int_{E_n}|D_x^sZ(t,\tau,x,y)|\,dy\leq C_s(t-\tau)^{-\frac{s}{2b}}, \tag{7}$$

а також

$$\left|\int_{E_n} R(t,\tau,x,y)dx\right|\leq C_s(t-\tau)^{-\frac{s}{2b}}.$$

Розглянемо $L_2$-норму

$$\|I_0\|_{L_2}^2=\left\|\int_{E_n} R(t,t_0,x,y)\varphi(y)dy\right\|_{L_2}^2\leq$$

$$\leq\int_{E_n}\mathrm{M}\left|\int_{E_n} R(t,t_0,x,y)\varphi(y)dy\right|^2dx.$$

Зобразимо норму матриці $R(t,\tau,x,y)$ у вигляді $|R(t,\tau,x,y)|=|R(t,\tau,x,y)|^{\frac{1}{2}}\times|R(t,\tau,x,y)|^{\frac{1}{2}}$, використаємо нерівність Гельдера для інтегралів та оцінку (7), змінимо порядок інтегрування. Тоді

$$\|I_0\|_{L_2}^2\leq\int_{E_n}(\int_{E_n}|R(t,t_0,x,y)|\,dy\times$$

$$\times\int_{E_n}|R(t,t_0,x,y)|\,\mathrm{M}\,|\varphi(y)|^2\,dy)dx\leq$$

$$\leq C_s\int_{E_n}((t-t_0)^{-\frac{s}{2b}}\times$$

$$\times\int_{E_n}|R(t,t_0,x,y)|^2\mathrm{M}\,|\varphi(y)|^2\,dy)dx\leq$$

$$\leq C_s(t-t_0)^{-\frac{s}{2b}}\int_{E_n}\int_{E_n}|R(t,\tau,x,y)|dx\mathrm{M}\,|\varphi|^2\,dy=$$

$$=C_s^2(t-t_0)^{-\frac{2s}{2b}}\,\|\varphi\|_{L_2}^2\,, \tag{8}$$

де

$$\|\varphi\|_{L_2}^2=\int_{E_n}M\,|\varphi\,(x,\omega)|^2\,dx.$$

Використовуючи нерівність (8), оцінимо інтеграл

$$\|I_1\|^2_{L_2} = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} R(t,\tau,x,y) f(\tau,y,v) dy d\tau \right\|^2_{L_2} \leq$$

$$\leq C_s^2 \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2s}{2b}} \int\limits_{E_n} \mathrm{M} \left| f(\tau,y,v) \right|^2 dy d\tau =$$

$$= C_s^2 \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2s}{2b}} \|f(\tau,y,v)\|^2_{L_2} d\tau. \qquad (9)$$

Для оцінки потенціала $I_2$ скористаємось властивістю другого моменту інтеграла Вінера-Іто [4] та нерівністю (9). Отримуємо

$$\|I_2\|^2_{L_2} =$$

$$= \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R(t,\tau,x,y) b(\tau,y,v(\tau,y,\omega) dy dw \right\|^2_{L_2} \leq$$

$$\leq \int\limits_{E_n} \mathrm{M} \left| \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R(t,\tau,x,y) b(\tau,y,v) dy d\tau \right|^2 dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{t_0}^{t} d\tau \int\limits_{E_n} \mathrm{M} \left| \int\limits_{E_n} R(t,\tau,x,y) b(\tau,y,v) dy \right|^2 dx \leq$$

$$\leq C_s^2 \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2s}{2b}} \|b(\tau,y,v)\|^2_{L_2} d\tau. \qquad (10)$$

Об'єднавши оцінки (8), (9), (10), дістанемо, що

$$\|v\|^2_{L_2} \leq 3C_s^2 \Big\{ (t-t_0)^{-\frac{2s}{2b}} \|\varphi\|^2_{L_2} +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2s}{2b}} \left( \|f\|^2_{L_2} + \|b\|^2_{L_2} \right) d\tau \Big\} \qquad (11)$$

Зінтегруємо (11) у межах від $t_0$ до $T$. Отримаємо, що розв'язок системи (5) належить простору $\Re^{(0)}_{[t_0,T]}$ за умови, що $\|f\|^2_{L_2}$ і $\|b\|^2_{L_2}$ сумовні функції по $t$.

**Лема.** *Нехай функції $b(t,x,v)$ і $f(t,x,v)$ належать простору $\Re^{(0)}_{[t_0,T]}$, тоді майже при всіх $\omega$ потенціали $I_1, I_2$ належать простору $\Re^{(s)}_{[t_0,T]}$ і для суми справджується оцінка*

$$\|I_1\|^{(s)}_{\Re_{[t_0,T]}} + \|I_2\|^{(s)}_{\Re\left[t_0,T\right]} \leq$$

$$\leq C\,(T)\,(\|b\|^{(0)}_{\Re_{[t_0,T]}} + \|f\|^{(0)}_{L_2}). \qquad (12)$$

Існування розв'язку системи інтегральних стохастичних рівнянь (5) доведемо методом послідовних наближень, які визначаються за рекурентними формулами

$$v_m(t,x,\omega) = \int\limits_{E_n} R(t,t_0,x,y)\varphi(y) dy +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R(t,\tau,x,y) f(\tau,y,v_{m-1}) dy d\tau +$$

$$+ \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R\,(t,\tau,x,y) b\,(\tau,y,v_{m-1})\, dx dw,$$

$$m = 0, 1, \cdots \qquad (13)$$

де $v_0(t,x,\omega) = \int\limits_{E_n} R(t,t_0,x,y)\varphi(y)dy$.

Щоб встановити збіжність послідовності $\{v_m\}_{m=1}^{\infty}$ в $L_2$, оцінимо еквівалентний ряд за відповідною нормою

$$v_0 + (v_1 - v_0) + \cdots + (v_m - v_{m-1}) + \cdots \qquad (14)$$

За означенням послідовних наближень та нерівністю (8) маємо, що

$$\|v_0\|^2_{L_2} \leq C_s^2 (t-t_0)^{-\frac{2s}{2b}} \|\varphi\|^2_{L_2} \qquad (15_0)$$

Припустимо, що для функцій $b(t,\tau,v)$ та $f(t,\tau,v)$ виконуються умова Ліпшиця зі сталою $L_0$

$$\|b(\tau,y,v_m) - b(\tau,y,v_{m-1})\|^2_{L_2} \leq$$

$$\leq L_0 \|v_m - v_{m-1}\|^2_{L_2}$$

та умова

$$\|b\,(\tau,y,v_m)\|^2_{L_2} \leq C(1 + \|v_m\|^2_{L_2}).$$

Враховуючи останню нерівність, запишемо

$$\|v_1 - v_0\|^2_{L_2} = \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R \cdot b(\tau, y, v_0) dy dw + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R \cdot f(\tau, y, v_0) dy d\tau \right\|^2_{L_2} \leq$$

$$\leq 2C_s^2 \left( \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2s}{2b}} \left( \|b(\tau, y, v_0)\|^2_{L_2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \|f(\tau, y, v_0)\|^2_{L_2} \right) d\tau \right) \leq$$

$$\leq 4CC_s^2 \left( \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2s}{2b}} \left(1 + \|v_0\|^2_L\right) d\tau \right) \leq$$

$$\leq 4CC_s^2 \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2s}{2b}} (1 + C_s^2 \times$$

$$\times \|\varphi\|^2_{L_2} (\tau - t_0)^{-\frac{2s}{2b}}) d\tau =$$

$$= 4CC_s^2 \frac{(t-t_0)^{1-\frac{2s}{2b}}}{1-\frac{2s}{2b}} + 4CC_s^4 (t-t_0)^{1-\frac{4s}{2b}} \cdot \|\varphi\|^2_{L_2} \times$$

$$\times B(1 - \frac{2s}{2b}, 1 - \frac{2s}{2b}). \qquad (15_1)$$

Тут $B(a, b)$ — інтеграл Ейлера 1-го роду.

Користуючись умовою Ліпшиця і нерівністю $(15_1)$, оцінимо

$$\|v_2 - v_1\|^2_{L_2} \leq$$

$$\leq 2 \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R(t, \tau, x, y)[b(\tau, y, v_1) - \right.$$

$$\left. - b(\tau, y, v_0)] dy d\tau \right\|^2 +$$

$$+ 2 \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R(t, \tau, x, y)[f(\tau, y, v_1) - \right.$$

$$\left. - f(\tau, y, v_0)] dy d\tau \right\|^2 \leq$$

$$\leq 2C_s^2 L_0 \int\limits_{t_0}^{t} (t-\tau)^{-\frac{2s}{2b}} \|v_1 - v_0\|^2_{L_2} d\tau \leq$$

$$\leq 8C_s^4 C^2 L_0 [\|\varphi\|^2_{L_2} (t-t_0)^{2-\frac{6s}{2b}} \times$$

$$\times B\left(1 - \frac{2s}{2b}, 1 - \frac{2s}{2b}\right) B\left(1 - \frac{2s}{2b}, 2 - \frac{2s}{2b}\right) +$$

$$+ \frac{(t-t_0)^{2-\frac{2s}{2b}}}{\left(1-\frac{2s}{2b}\right)\left(2-\frac{2s}{2b}\right)}]. \qquad (15_2)$$

Повторюючи міркування з урахуванням попередньої нерівності, маємо

$$\|v_3 - v_2\|^2_{L_2} \leq 2 \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R(t, \tau, x, y) \times \right.$$

$$\left. \times [f(\tau, y, v_2) - f(\tau, y, v_1)] dy d\tau \right\|^2 +$$

$$+ 2 \left\| \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{E_n} R(t, \tau, x, y) \times \right.$$

$$\left. \times [b(\tau, y, v_2) - b(\tau, y, v_1)] dy d\tau \right\|^2 \leq 16 C_s^6 C^3 L_0^2 \times$$

$$\times [\|\varphi\|^2_{L_2} (t-t_0)^{3-\frac{6s}{2b}} B(1 - \frac{2s}{2b}, 1 - \frac{2s}{2b}) \times$$

$$\times B(1 - \frac{2s}{2b}, 2 - \frac{4s}{2b}) B(1 - \frac{2s}{2b}, 3 - \frac{4s}{2b}) +$$

$$+ \frac{(t-t_0)^{3-\frac{2s}{2b}}}{(1-\frac{2s}{2b})(2-\frac{2s}{2b})(3-\frac{2s}{2b})}]. \qquad (15_3)$$

За індукцією будемо мати

$$\|v_m - v_{m-1}\|^2_{L_2} =$$

$$= 2^{m+1} (C_s^2 C)^m L_0^{m-1} [\|\varphi\|^2_{L_2} (t-t_0)^{m(1-\frac{2s}{2b})} \times$$

$$\times \prod_{k=1}^{m} B(1 - \frac{2s}{2b}, k\left(1 - \frac{2s}{2b}\right)) + \frac{(t-t_0)^{m-\frac{2s}{2b}}}{\prod\limits_{k=1}^{m} (k - \frac{2s}{2b})}] \leq$$

$$\leq 2^{m+1} (C_s^2 C)^m L_0^{m-1} [(T-t_0)^{m(1-\frac{2s}{2b})} \times$$

$$\times \|\varphi\|^2_{L_2} \frac{\left(\Gamma\left(1-\frac{2s}{2b}\right)\right)^m}{\Gamma\left((m+1)\left(1-\frac{2s}{2b}\right)\right)} +$$

$$+\frac{(T-t_0)^{m-\frac{2s}{2b}}}{\prod\limits_{k=1}^{m}(k-\frac{2s}{2b})}].$$

Остання нерівність у ланцюжку оцінювання загального члена функціонального ряду є мажорантною.

Враховуючи її, а також $\|v_0\|^2_{L_2}$, можемо оцінити суму ряду (14). Для неї правильна оцінка

$$\frac{1}{2}\|v\|^2_{L_2}\leq\|v_0\|^2_{L_2}+\sum_{m=1}^{\infty}\|v_m-v_{m-1}\|^2_{L_2}\leq$$

$$\leq C_s^2\,(t-t_0)^{-\frac{2s}{2b}}\|\varphi\|^2_{L_2}+\sum_{m=1}^{\infty}2^{m+1}(C_s^2C)^m\times$$

$$\times[L_0^{m-1}(T-t_0)^{m(1-\frac{2s}{2b})}\|\varphi\|^2_{L_2}\times$$

$$\times\frac{\left(\Gamma\left(1-\frac{2s}{2b}\right)\right)^m}{\Gamma\left((m+1)\left(1-\frac{2s}{2b}\right)\right)}+\frac{(T-t_0)^{m-\frac{2s}{2b}}}{\prod\limits_{k=1}^{m}(k-\frac{2s}{2b})}].\quad(16)$$

Другий доданок у формулі (16) є збіжний числовий ряд, що можна встановити, наприклад, за ознакою Даламбера. Тому отримаємо таку оцінку суми ряду (14)

$$\|v\|^2_{L_2}\leq\|v_0\|^2_{L_2}+C(T).\qquad(17)$$

**Теорема.** *Нехай:*

*1) коефіцієнти $a_k(t,x)$ рівняння (1) визначені в шарі $\Pi_t$, неперервні по $t$ рівномірно щодо $x$, $a_k(t,x)\in C_x^{(\alpha)}(\Pi_t)$;*

*2) виконується умова параболічності*

$$(-1)^{b+1}\mathrm{Re}\sum_{|k|=2b}a_k(\sigma)^k\geq\delta_0\,|\sigma|^{2b},\sigma\in E_n,$$

$$\delta_0=const,\delta_0>0;$$

*3) функції $f(t,x,u,u_x^{'},\cdots,u_x^{(s)})$ та $b(t,x,u,u_x^{'},\cdots,u_x^{(s)})$ вимірні та узгоджені з потоком $\sigma$-алгебр $F_t$, з імовірністю 1 задовольняють умову Ліпшиця зі сталою $L_0$*

$$\|f(t,x,v_1)-f(t,x,v_2)\|^2_{L_2}\leq L_0\|v_1-v_2\|^2_{L_2}$$

*та умову*

$$\|f(t,x,v)\|^2_{L_2}\leq C(1+\|v\|^2_{L_2});$$

*4) початкова функція $\varphi(x,\omega)$ не залежить від потоку $F_t$ і належить $L_2(E_n\times\Omega)$.*

*Тоді існує єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності розв'язок задачі Коші (1),(2), для $L_2$-норми якого справджується нерівність*

$$\left\|D_x^ku\right\|_{L_2}\leq C(T)[\frac{\|\varphi\|_{l_2}}{(t-t_0)^{\frac{|k|}{2b}}}+1],|k|\leq s<2b.\qquad(18)$$

**Зауваження.** *Якщо функції $f$ і $b$ як функції змінної $x$ з імовірністю 1 задовольняють локальну умову Гельдера, початкова функція $\varphi(x,\omega)$ належить $C^{(2b+\alpha)}(E_n\times\Omega)$, то розв'язок системи інтегральних рівнянь (5) має стохастичний диференціал по $t$ та похідні до порядку $2b$ по $x$ і він є розв'язком задачі Коші (1), (2) і при цьому*

$$\sum_{|k|\leq 2b}\sup_{\Pi_t}\left(M\left|D_x^ku\right|^2\right)\leq$$

$$\leq C\sum_{|k|\leq 2b}\sup_{x\in E_n}\left(M\left|D_x^k\varphi\right|^2\right).$$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ


1. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы.— М.: Наука, 1964.— 445 с.

2. *Розовский Б.Л.* О стохастических дифференциальных уравнениях в частных производных // Мат. сб.— 1975.— **96**, N 11.— С.314—341.

3. *Перун Г.М.* Задача Коші для квазілінійного стохастичного рівняння параболічного типу при наявності пуассонових збурень // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб.наук. пр.— К.: Ін-т математики НАН України, 1995.— Вип. 9.— С.229—236.

4. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения.— К.: Наук. думка.— 1968.— 354 с.


Стаття надійшла до редколегії 18.02.2002