УДК 517.98

©2002 р. О.В. Маслюченко

Чернівецький національний університет імені Ю.Федьковича, Чернівці

ПОВНОТА ЗА ЧЕХОМ ТА ЇЇ ЗЛІЧЕННІ АНАЛОГИ

Отримано характеризацію зліченно повних за Чехом просторів і псевдоповних за Чехом просторів через G_δ-вкладення.

It is characterized countable Ĉech complete spaces and pseudo Ĉech complete spaces using G_δ-imbedings.

0. Добре відомо [1, с.297], що тихоновські повні за Чехом простори можна визначати як через покриття (див. нижче) так і через G_δ-вкладення у компакти. В цій роботі ми отримаємо аналогічні результати для регулярних (зліченно, псевдо-) повних за Чехом просторів. Нагадаємо означення цих просторів (див. [2-4]). Для $A \subseteq X$ і $\mathcal{B} \subseteq 2^X$ запис $A \prec \mathcal{B}$ означає, що $A \subseteq B$ для деякого $B \in \mathcal{B}$. Простір X називається *(зліченно, псевдо-) повним за Чехом*, якщо X – регулярний і існує послідовність $(\mathcal{U}_n)_{n=1}^\infty$ відкритих покриттів X, така, що відповідно:

довільна центрована система $\mathcal{F}$ замкнених підмножин X, така, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $F_n \in \mathcal{F}$ з $F_n \prec \mathcal{U}_n$, має непорожній перетин; (C)

довільна спадна послідовність непорожніх замкнених множин $F_n \prec \mathcal{U}_n$ має непорожній перетин; (C^ω)

довільна спадна послідовність непорожніх канонічно замкнених множин $F_n \prec \mathcal{U}_n$ має непорожній перетин. (C^p)

В [1] зліченно повні за Чехом простори називаються сильно зліченно повними, тільки там регулярність не вимагається.

1. Ми будемо користуватись означеннями зліченно компактних і псевдокомпактних просторів через послідовності замкнених множин. А саме, простір X називатимемо *зліченно (псевдо-) компактним*, якщо довільна спадна послідовність непорожніх (канонічно) замкнених множин F_n має непорожній перетин. Зрозуміло, що таке означення зліченної компактності рівносильне її означенню через відкриті покриття [1, с.304]. Що стосується псевдокомпактності, то наше означення рівносильне означенню через неперервні функції лише для тихоновських просторів [1, сс.310-311]. Крім того, має місце наступна характеризація.

Твердження 1. *Простір X буде зліченно (псевдо-) компактним тоді і тільки тоді коли кожна напівнеперервна зверху (і квазінеперервна) функція $f : X \to \mathbb{R}$ обмежена зверху.*

Доведення. Якщо X не є зліченно (псевдо-) компактним, то існує спадна послідовність непорожніх (канонічно) замкнених множин F_n, така, що $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$. Тоді функція $f = \sum_{n=1}^\infty \chi_{F_n}$ необмежена зверху напівнеперервна зверху (і квазінеперервна), що неможливо. Тепер навпаки, припустимо, що існує необмежена зверху напівнеперервна зверху (і квазінеперервна) функція $f : X \to \mathbb{R}$. Покладемо $F_n = f^{-1}([n, +\infty))$ (чи, відповідно, $F_n = \overline{\mathrm{int} f^{-1}((n, +\infty))}$). Оскільки $F_n \subseteq f^{-1}([n, +\infty))$, то $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$. А це неможливо, бо (F_n) – спадна послідовність непорожніх (канонічно) замкнених множин.

2. Для довільного топологічного простору X позначимо через $T_3(X)$ множину таких точок $x \in X$, всі замкнені околи яких утворюють базу. Наступна теорема узагальнює результат [1, с.277] на клас регулярних просторів.

Теорема 1. *Для довільного регулярного простору X наступні умови рівносильні:*

(i) X – повний за Чехом;

(ii) для довільного T_1-простору Y з $X \subseteq T_3(Y)$, X є G_δ-підмножиною свого замикання в Y;

(iii) існує компактний (і гаусдорфовий, якщо X – цілком регулярний) T_1-простір Y, з $X \subseteq T_3(Y)$, такий, що X – щільний G_δ-підпростір Y.

Доведення. (i) $\Rightarrow$ (ii). Нехай Y – T_1-простір з $X \subseteq T_3(Y)$. Будемо вважати, що $Y = \overline{X}$. Доведемо, що X – G_δ-підмножина Y. Нехай $(\mathcal{U}_n)$ забезпечує повноту за Чехом X. Покладемо $\mathcal{V}_n = \{V : V$ – відкрита в X і $\overline{V} \cap X \prec \mathcal{U}_n\}$ і $G_n = \bigcup \mathcal{V}_n$. Оскільки X – регулярний, то $X \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Доведемо зворотне включення. Нехай $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Візьмемо $V_n \in \mathcal{V}_n$ з $y \in V_n$. Покладемо $\mathcal{F} = \{\overline{V} \cap X : V$ – окіл y в $Y\}$. Оскільки $F_n = \overline{V_n} \cap X \in \mathcal{F}$ і $F_n \prec \mathcal{U}_n$, адже $V_n \in \mathcal{V}_n$, то, згідно з вибором $(\mathcal{U}_n)$, $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$. Візьмемо $x \in \bigcap \mathcal{F} \subseteq X$. Доведемо, що $x = y$. Нехай це не так, і $x \neq y$. Оскільки множина $\{y\}$ замкнена в Y і $x \in T_3(Y)$, то існує окіл U точки x в Y, такий, що $\overline{U} \not\ni y$. Тоді $V = Y \setminus \overline{U}$ – окіл y, причому $\overline{V} \not\ni x$, що суперечить тому, що $x \in \bigcap \mathcal{F}$. Отже, $y = x \in X$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Досить взяти в ролі Y розширення Волмена ωX [1, с.272] чи, у випадку, коли X – цілком регулярний, компактифікацію Стоуна-Чеха βX [1, с.260].

(iii) $\Rightarrow$ (i). Виберемо Y згідно з (iii). Візьмемо спадну послідовність спадних відкритих в Y множин G_n з $X = \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Покладемо $\mathcal{U}_n = \{U : U$ – відкрита в X і $\overline{U} \subseteq G_n\}$, де риска означає замикання в просторі Y. Оскільки $X \subseteq T_3(Y)$, то $\mathcal{U}_n$ – покриття X. Доведемо, що $(\mathcal{U}_n)$ забезпечує повноту за Чехом. Нехай $\mathcal{F}$ – така як в (C). Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ існує $F_n \in \mathcal{F}$ з $F_n \prec \mathcal{U}_n$. В такому разі $\overline{F}_n \subseteq G_n$. Тому $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = X$. Але $\bigcap_{F \in \mathcal{F}} \overline{F} \neq \emptyset$, внаслідок компактності Y. Тому і $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

3. Нехай E – підмножина топологічного простору X. Через $\mathcal{F}_p(E))$ позначимо систему всіх множин $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F}_n$, де (F_n) – така спадна послідовність канонічно замкнених в E множин, що $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset$. *Псевдозамиканням множини E в просторі X* будемо називати множину $[E]_p = E \cup \bigcup \mathcal{F}_p(E)$.

Лема 1. *Нехай E підмножина топологічного простору X. Тоді якщо замикання $\overline{E}$ псевдокомпактне, то і псевдозамикання $[E]_p$ є таким же.*

Доведення. Вважатимемо, що $\overline{E} = X$. Тоді простір X псевдокомпактний. Доведемо, що таким же є $[E]_p$. Нехай (F_n) – спадна послідовність непорожніх канонічно замкнених в $[E]_p$ множин. Якщо $\bigcap_{n=1}^{\infty}(F_n \cap E) \neq \emptyset$, то все ясно. Нехай $\bigcap_{n=1}^{\infty}(F_n \cap E) = \emptyset$. Тоді, оскільки $F_n \cap E$ канонічно замкнені в E, то $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{F_n \cap E} \in \mathcal{F}_p(E)$, причому $F \neq \emptyset$, адже X – псевдокомпактний і $\overline{F_n \cap E} = \overline{F}_n$ – канонічно замкнені в X. Отже, $F \subseteq [E]_p$. Тому $\emptyset \neq F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$.

Доведемо тепер аналог теореми 1 для псевдоповних за Чехом просторів.

Теорема 2. *Для довільного регулярного простору X наступні умови рівносильні:*

(i) X – псевдоповний за Чехом;

(ii) для довільного простору Y з $X \subseteq T_3(Y)$, X є G_δ-підмножиною свого псевдозамикання в Y;

(iii) існує псевдокомпактний (і цілком регулярний, якщо X є таким) T_1-простір Y з $X \subseteq T_3(Y)$, такий, що X – щільний G_δ-підпростір Y.

Доведення. (i) $\Rightarrow$ (ii). Нехай Y такий, що $X \subseteq T_3(Y)$. Будемо вважати, що $Y = \overline{X}$. Доведемо, що X є G_δ-підпростором $[X]_p$. Нехай $(\mathcal{U}_n)$ забезпечує псевдоповноту за Чехом X. Покладемо $\mathcal{V}_n = \{V : V$ – відкрита в X і $\overline{V} \cap X \prec \mathcal{U}_n\}$ і $G_n = \bigcup \mathcal{V}_n$. Оскільки X – регулярний, то $X \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$. Доведемо, що $\bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n \cap [X]_p) \subseteq X$. Нехай це не так, і існує $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(G_n \cap [X]_p) \setminus X$. Оскільки $y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$, то існує спадна послідовність відкритих околів $V_n \in \mathcal{V}_n$ точки y. Але $y \in [X]_p \setminus X$, тому $y \in \bigcup \mathcal{F}_p(X)$, тобто існує спадна послідовність канонічно замкнених в X множин F_n таких, що $\bigcap F_n = \emptyset$ і $y \in \bigcap \overline{F_n}$. Нехай $F_n' = \overline{F_n \cap V_n} \cap X$. Тоді спадна послідовність непорожніх канонічно замкнених в X множин $F_n' \prec \mathcal{U}_n$ має непорожній перетин, що неможливо.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Досить взяти за Y псевдозамикання X в ωX (чи βX) і скористатись лемою 1.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Доведення цілком аналогічне доведенню відповідної імплікації теореми 1.

4. Нехай E – підмножина топологічного простору X. Через $\mathcal{F}_\omega(E)$ позначимо систему всіх множин $F = \bigcap_{n=1}^\infty \overline{F}_n$, де (F_n) – така спадна послідовність замкнених в E множин, що $\bigcap_{n=1}^\infty F_n = \emptyset$. *Зліченним замиканням множини E в просторі X* називається множина $[E]_\omega = E \cup \bigcup \mathcal{F}_\omega(E)$. Нагадаємо, що множина E називається відносно зліченно компактною в X, якщо для довільної спадної послідовності замкнених множин F_n таких, що $F_n \cap E \neq \emptyset$, перетин $\bigcap_{n=1}^\infty F_n$ непорожній.

Лема 2. *Нехай E – відносно зліченно компактна підмножина топологічного простору X. Тоді E буде відносно зліченно компактною і в своєму зліченному замиканні $[E]_\omega$.*

Доведення. Нехай (F_n) – така спадна послідовність замкнених в X множин, що $F_n \cap E \neq \emptyset$ для кожного n. Доведемо, що $\bigcap_{n=1}^\infty (F_n \cap [E]_\omega) \neq \emptyset$. Якщо $\bigcap_{n=1}^\infty (F_n \cap E) \neq \emptyset$, то все ясно. Нехай $\bigcap_{n=1}^\infty (F_n \cap E) = \emptyset$. Тоді $F = \bigcap_{n=1}^\infty \overline{F_n \cap E} \in \mathcal{F}_0(E)$, причому $F \neq \emptyset$, адже E – відносно зліченно компактна в X. Отже, оскільки $F \subseteq [E]_\omega$, то $\emptyset \neq F \subseteq \bigcap_{n=1}^\infty (F_n \cap [E]_\omega)$.

Доведення наступної теореми цілком аналогічне доведенню теореми 2, тільки при доведенні імпікації (ii) $\Rightarrow$ (iii) замість леми 1 слід використати лему 2.

Теорема 3. *Для довільного регулярного простору X наступні умови рівносильні:*

(i) X – зліченно повний за Чехом;

(ii) для довільного простору Y з $X \subseteq T_3(Y)$, X є G_δ-підмножиною свого зліченного замикання в Y;

(iii) існує T_1-простір Y (цілком регулярний, якщо X є таким) з $X \subseteq T_3(Y)$, такий, що X є щільним відносно зліченно компактним G_δ-підпростором Y.

5. Як відомо [1, с.309], зліченна (псевдо-) компактність не є скінченно мультиплікативною. Проте з теореми Куратовського [1, с.200] негайно випливає, що якщо E відносно зліченно (псевдо-) компактна в X і Y – компактний, то $E \times Y$ відносно зліченно (псевдо-) компактна в $X \times Y$. Зокрема, добуток зліченно (псевдо-) компактного і компактного просторів є зліченно (псевдо-) компактним (див. також [1, с.308, 312]). Тому, використовуючи еквівалентність умов (i) і (iii) теорем 1, 2 і 3, одержимо наступний результат.

Теорема 4. *Нехай X – зліченно (псевдо-) повний за Чехом, а Y – повний за Чехом. Тоді добуток $X \times Y$ зліченно (псевдо-) повний за Чехом.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Энгелькинг Р.* Общая топология.— М.: Мир, 1986.— 752 с.

2. *Namioka I.* Separate continuity and joint continuity // Pacif. J. Math.— 1974.— **51**, N 2.— P.515—531.

3. *Hansel G., Troallic J.-P.* Quasicontinuity and Namioka's theorem // Topology Appl.— 1992.— **46**, N 2.— P.135—149.

4. *Маслюченко О.В.* Сукупна неперервність нарізно неперервних функцій на графіках многозначних відображень // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 111. Математика.— Чернівці: ЧНУ, 2001.— С.76—84.

5. *Архангельский А.В.* Топологические пространства функций.— Москва: Изд-во Московского ун-та, 1989.— 222 с.

Стаття надійшла до редколегії 9.01.2002