УДК 517.956

©2002 р. О.В. Мартинюк

Чернівецький національний університет ім. Ю.Федьковича, Чернівці

ЗАДАЧА КОШІ ДЛЯ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ НЕСКІНЧЕННОГО ПОРЯДКУ

Встановлена коректна розв'язність задачі Коші для еволюційних рівнянь з оператором Бесселя нескінченного порядку у просторах узагальнених функцій типу W'.

The correct solvability of the Cauchy problem is established for evolutional equations with Bessel's operator of infinite order in the spaces of generalized functions of type W'.

1. Простори типу W, $\overset{0}{W}$ та $(\overset{0}{W})'$

Розглянемо функцію

$$\omega:\,[0,+\infty)\to[0,+\infty),$$

яка є неперервною і зростаючою, причому $\omega(0)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\omega(x)=+\infty$.

Для $x\geq 0$ покладемо $\Omega(x)=\int\limits_0^x\omega(\xi)d\xi$.

Функція Ω володіє такими властивостями:

1) Ω є диференційовною, зростаючою на $[0,+\infty)$ функцією, причому $\Omega(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\Omega(x)=+\infty$;

2) Ω - опукла функція, тобто:

а) $\forall\{x_1,x_2\}\subset[0,+\infty)$:

$$\Omega(x_1)+\Omega(x_2)\leq\Omega(x_1+x_2);$$

б) $\forall x\in[0,+\infty)\ \forall n\in\mathbb{N}$: $n\Omega(x)\leq\Omega(nx)$.

Довизначимо функцію Ω на $(-\infty,0]$ парним чином. Отже, Ω зростає на $[0,+\infty)$ швидше за довільну лінійну функцію.

Поруч розглянемо функцію $\mu:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$, яка володіє такими ж властивостями, що і функція ω. Для $x\geq 0$ покладемо $M(x)=\int\limits_0^x\mu(\xi)d\xi$, $M(-x)=M(x)$. Функція M аналогічна за своїми властивостями до функції Ω. За допомогою функцій M і Ω Г.М.Гуревич ввів серію просторів, названих ним просторами типу W (див. [1]). Означимо деякі з них.

а) Простір W_M^Ω будується за двома функціями M та Ω і визначається як сукупність цілих функцій $\varphi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, для яких

$$\exists c>0\,\exists a>0\,\exists b>0\,\forall z=x+iy\in\mathbb{C}:$$

$$|\varphi(z)|\leq c\exp\{-M(ax)+\Omega(by)\}.$$

W_M^Ω можна подати як об'єднання зліченно нормованих просторів $W_{M,a}^{\Omega,b}$, де $W_{M,a}^{\Omega,b}$ складається з тих функцій $\varphi\in W_M^\Omega$, для яких правильні нерівності

$$|\varphi(x+iy)|\leq c\exp\{-M(\overline{a}x)+\Omega(\overline{b}y)\},$$

$$z=x+iy\in\mathbb{C},$$

де $\overline{a}$ - довільна стала, менша за a, $\overline{b}$ - довільна стала, більша за b. Якщо для $\varphi\in W_{M,a}^{\Omega,b}$ покласти

$$\|\varphi\|_{\delta\rho}=\sup_{z\in\mathbb{C}}[|\varphi(z)|\exp\{-\Omega(b(1+\rho)y)+$$

$$+M(a(1-\delta)x)\}],\ \{\delta,\rho\}\subset\{1/n,n\geq 2\},$$

то з цими нормами простір $W_{M,a}^{\Omega,b}$ стає повним досконалим зліченно нормованим простором.

Збіжність в просторі W_M^Ω (в об'єднанні зліченно нормованих просторів) визначається так [1]: *послідовність $\{\varphi_n,n\geq 1\}\subset W_M^\Omega$ збігається в W_M^Ω до нуля тоді і тільки тоді, коли вона:*

1) правильно збігається до нуля;

2) обмежена.

Послідовність $\{\varphi_n,n\geq 1\}\subset W_M^\Omega$ правильно збігається до нуля в W_M^Ω, якщо вона рівномірно збігається до нуля на кожній *обмеженій множині $Q \subset \mathbb{C}$. Множина $A \subset W_M^\Omega$ називається обмеженою, якщо $A \subset W_{M,a}^{\Omega,b}$ з деякими a, $b > 0$ і для всіх $\varphi \in A$ виконуються оцінки $|\varphi(z)| \leq \leq c \exp\{-M(ax) + \Omega(by)\}$ з одними і тими ж сталими a, b, $c > 0$.*

б) Символом $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$ позначатимемо сукупність усіх цілих *парних* функцій з простору W_M^Ω. Оскільки $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$ утворює підпростір W_M^Ω, то в $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$ природним способом вводиться топологія. Цей простір з відповідною топологією називатимемо основним простором або простором типу $\overset{0}{W}$, а його елементи - основними функціями.

в) Сукупність функцій, заданих на $\mathbb{R}$, які допускають аналітичне продовження у всю комплексну площину $\mathbb{C}$ і як функції комплексної змінної є елементами простору $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$, позначимо через $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$. Отже, $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$ можна розуміти як сукупність функцій з простору $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$, заданих на $\mathbb{R}$ (звужених на $\mathbb{R}$).

Нехай P - деякий фіксований многочлен. Тоді у просторах W_M^Ω визначена і неперервна операція множення на $P(z)$, $z \in \mathbb{C}$ (зокрема, операція множення на незалежну змінну z), а у просторах $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$, $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$ - на $P(z^2)$ та $P(x^2)$ відповідно.

Мультиплікатором у просторі W_M^Ω буде кожна ціла однозначна функція $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists c_\varepsilon > 0\, \forall z = x + iy \in \mathbb{C} :$$

$$|\varphi(z)| \leq c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)\}. \qquad (1)$$

Кожна ціла парна функція, яка задовольняє умову (1), буде мультиплікатором у просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$, а її звуження на $\mathbb{R}$ - мультиплікатором у просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$. У просторах типу W визначені і є неперервними лінійні диференціальні оператори вигляду $\sum_{k=0}^{m} a_k(\omega)\frac{d^k}{d\omega^k}$, де a_k - деякі поліноми. У праці [2] доведено також, що у просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$ коректно визначений і є неперервним оператор Бесселя

$$B_{\nu,z} := \frac{d^2}{dz^2} + \frac{2\nu+1}{z}\frac{d}{dz},$$

де $\nu > -1/2$ - фіксований параметр.

Нехай $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} z^{2n}$ - деяка ціла парна функція. Говоритимемо, що *в просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$ задано оператор Бесселя нескінченного порядку $f(B_{\nu,z}) := \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}(-B_{\nu,z})^n$, якщо для довільної основної функції $\varphi \in \overset{0}{W}{}_M^\Omega$ ряд*

$$(f(B_{\nu,z})\varphi)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_{2n}(-1)^n (B_{\nu,z}^n \varphi)(z)$$

зображає деяку основну функцію з простору $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$. В [2] доведено, що *якщо функція f є мультиплікатором у просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega$, то у просторі $\overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}$ визначений і є неперервним оператор Бесселя нескінченного порядку $f(B_{\nu,z})$ (тут Ω_1 та M_1 - функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω)*, причому якщо A_f - звуження оператора $f(B_{\nu,z})$ на простір $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$, то для довільної функції $\varphi \in \overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$ правильною є рівність

$$(A_f\varphi)(x) = F^{-1}[f(\xi)F[\varphi](\xi)](x), \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}.$$

У просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$ можна користуватися прямим і оберненим перетворенням Фур'є-Бесселя [3]:

$$\psi(\sigma) \equiv F_B[\varphi](\sigma) := \int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx,$$

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R}),$$

$$\varphi(x) \equiv F_B^{-1}[\psi](x) := c_\nu \int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

де $c_\nu = (2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1))^{-1}$, $\nu > -1/2$ - фіксований параметр, j_ν - нормована функція Бесселя порядку ν. Простори типу $\overset{0}{W}(\mathbb{R})$ перетворенням Фур'є-Бесселя відображаються у простори типу $\overset{0}{W}(\mathbb{R})$:

$$F_B[\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})] = \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$$

(тут $F_B[X]$ позначає простір Фур'є-образів функцій простору X); при цьому оператор F_B є неперервним (див. [4]). Якщо $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, то функція $F_B[\varphi]$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину $\mathbb{C}$ і $F_B[\varphi] \in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$.

Символом $\left(\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\right)'$ позначатимемо простір усіх лінійних неперервних функціоналів над відповідним простором основних функцій зі слабкою збіжністю, а його елементи називатимемо узагальненими функціями. Регулярними узагальненими функціями або регулярними функціоналами називатимемо лінійні неперервні функціонали, дія яких на основні функції $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ визначається формулою

$$< f, \varphi > = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx.$$

Кожна локально інтегровна парна на $\mathbb{R}$ функція f, яка задовольняє умову

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists c_\varepsilon > 0\, \forall x \in \mathbb{R}:\ |f(x)| \le c_\varepsilon e^{M(\varepsilon x)} \quad (2)$$

породжує регулярну узагальнену функцію $F_f \in \left(\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\right)'$:

$$< F_f, \varphi > = \int_0^\infty f(x)\varphi(x)x^{2\nu+1}dx,$$

$$\forall \varphi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}).$$

Має місце наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо локально інтегровні парні на $\mathbb{R}$ функції f і g, які задовольняють умову (2), не збігаються на множині додатної міри Лебега, то існує функція $\varphi_0 \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ така, що $< f, \varphi_0 > \ne < g, \varphi_0 >$, тобто $F_f \ne F_g$. Навпаки, якщо $F_f \ne F_g$, то функції f і g не збігаються на множині додатної міри Лебега.*

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми з [5].

Ця теорема дозволяє ототожнювати локально інтегровні функції, що задовольняють умову (2), з породжуваними ними узагальненими функціями F_f з простору $\left(\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\right)'$. З властивостей інтеграла Лебега випливає, що вкладення

$$\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}) \ni f \longrightarrow F_f \in \left(\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\right)'$$

є неперервним.

У просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$ визначена і є неперервною операція узагальненого зсуву $\varphi \to T_x^\xi \varphi$, де T_x^ξ - оператор узагальненого зсуву, який відповідає оператору Бесселя [6]:

$$T_x^\xi \varphi(x) = b_\nu \int_0^\pi \varphi(\sqrt{x^2 + \xi^2 - 2x\xi\cos\omega}) \times$$

$$\times \sin^{2\nu}\omega d\omega, \varphi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}),$$

де $b_\nu = \Gamma(\nu+1)/(\Gamma(1/2)\Gamma(\nu+1/2))$, $\nu > -1/2$. У зв'язку з цим згортку узагальненої функції $f \in \left(\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\right)'$ з основною функцією задамо формулою

$$(f * \varphi)(x) := < f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) > = < f_\xi, T_\xi^x \varphi(\xi) >$$

(тут f_ξ позначає дію функціоналу f по змінній ξ). Із властивості неперервності операції узагальненого зсуву у просторах типу $\overset{0}{W}$ випливає властивість неперервності згортки $f * \varphi$, $\forall f \in \left(\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})\right)'$, $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$.

Якщо $f \in (\overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R}))'$ і

$$(f * \varphi)(x) =< f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) >\in \overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R}),$$

$$\forall \varphi \in \overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R}),$$

то функціонал f називається *згортувачем у просторі* $\overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$.

Оскільки $F_B[\varphi] \in \overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$, якщо $\varphi \in \overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то перетворення Фур'є-Бесселя узагальненої функції $f \in (\overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R}))'$ визначимо за допомогою співвідношення

$$< F_B[f], \varphi >=< f, F_B[\varphi] >,$$

$$\forall \varphi \in \overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Із (3) та властивостей лінійності і неперервності функціоналу f та перетворення Фур'є-Бесселя основних функцій випливає лінійність і неперервність функціоналу $F_B[f]$ над простором основних функцій $\overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$. Отже, перетворення Фур'є-Бесселя узагальненої функції f, заданої на $\overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$, є узагальненою функцією на просторі $\overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.

Теорема 2. *Якщо узагальнена функція* $f \in (\overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R}))'$ *є згортувачем у просторі* $\overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$, *то для довільної функції* $\varphi \in \overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$ *має місце формула*

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] F_B[\varphi].$$

Доведення. Згідно з умовою теореми $f*\varphi \in \overset{0}{W}{}_{M}^{\Omega}(\mathbb{R})$. Тоді, скориставшись означенням перетворення Фур'є-Бесселя, а також означенням згортки узагальненої функції з основною, запишемо такі співвідношення:

$$\forall \psi \in \overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}) :$$

$$< F_B[f * \varphi], \psi >=< f * \varphi, F_B[\psi] >=$$

$$= \int_0^\infty (f * \varphi)(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int_0^\infty < f_\xi, T_x^\xi \varphi(x) > F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \left\langle f_\xi, \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx \right\rangle \tag{4}$$

(зазначимо, що остання рівність записана, поки-що, формально).

Нехай

$$J(\xi) := \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx.$$

Тоді, внаслідок теореми Фубіні,

$$J(\xi) = \int_0^\infty T_x^\xi \varphi(x) \left(\int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} d\sigma \right) \times$$

$$\times x^{2\nu+1} dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(x) \psi(\sigma) T_x^\xi j_\nu(\sigma x) \sigma^{2\nu+1} \times$$

$$\times x^{2\nu+1} d\sigma dx = \int_0^\infty \psi(\sigma) j_\nu(\sigma \xi) \sigma^{2\nu+1} \times$$

$$\times \left(\int_0^\infty \varphi(x) j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx \right) d\sigma =$$

$$= \int_0^\infty \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma \xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma =$$

$$= F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi](\xi).$$

Отже,

$$< F_B[f * \varphi], \psi >=< f, F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi] >=$$

$$=< F_B[f], F_B[\varphi] \cdot \psi >=< F_B[f] \cdot F_B[\varphi], \psi >,$$

$$\forall \psi \in \overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}).$$

Звідси дістаємо рівність

$$F_B[f * \varphi] = F_B[f] \cdot F_B[\varphi].$$

Залишається обґрунтувати коректність співвідношень (4). Введемо позначення:

$$J_r(\xi) := \int\limits_0^r T_x^\xi \varphi(x) F_B[\psi](x) x^{2\nu+1} dx =$$

$$= \int\limits_0^r \psi(\sigma) F_B[\varphi](\sigma) j_\nu(\sigma\xi) \sigma^{2\nu+1} d\sigma.$$

Для доведення (4) досить показати, що $J_r \to J$ при $r \to +\infty$ у просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$, тобто, що $\gamma_r := J - J_r \to 0$, $r \to +\infty$, за топологією простору $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$. Із інтегрального зображення Пуассона нормованої функції Бесселя

$$j_\nu(z) = \frac{2\Gamma(\nu+1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)} \int\limits_0^{\pi/2} \cos(z\cos t)\sin^{2\nu} t dt,$$

$$z \in \mathbb{C},$$

випливає оцінка:

$$|j_\nu(z)| \leq c_\nu e^{|\omega|}, \quad \forall z = \xi + i\omega \in \mathbb{C}.$$

Тоді

$$|\gamma_r(z)| \leq \int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)| \cdot |F_B[\varphi](\sigma)| \cdot |j_\nu(\sigma z)| \times$$

$$\times \sigma^{2\nu+1} d\sigma \leq c_\nu \cdot \int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)| \cdot |F_B[\varphi](\sigma)| e^{\sigma|\omega|} \times$$

$$\times \sigma^{2\nu+1} d\sigma.$$

Якщо $z \in \mathbb{K} \subset \mathbb{C}$, де $\mathbb{K}$ - обмежена область, то $|\omega| \leq c_0$. Отже,

$$|\gamma_r(z)| \leq c_\nu \cdot \int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)| \cdot |F_B[\varphi](\sigma)| \cdot e^{c_0\sigma} \cdot \sigma^{2\nu+1} d\sigma,$$

$$\forall z \in \mathbb{K}.$$

Оскільки функція $\psi \cdot F_B[\varphi] \in \overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$, то інтеграл

$$\int\limits_0^\infty |\psi(\sigma)| \cdot |F_B[\varphi](\sigma)| e^{c_0\sigma} \cdot \sigma^{2\nu+1} d\sigma$$

збіжний, тобто

$$\int\limits_r^{+\infty} |\psi(\sigma)| \cdot |F_B[\varphi](\sigma)| e^{c_0\sigma} \cdot \sigma^{2\nu+1} d\sigma \to 0$$

при $r \to +\infty$ (як залишок збіжного інтеграла). Цим доведено, що $\gamma_r(z)$ збігається до нуля при $r \to +\infty$ рівномірно по z у кожній обмеженій області $\mathbb{K} \subset \mathbb{C}$. Доведемо тепер, що має місце нерівність

$$|\gamma_r(z)| \leq c e^{-M(a\xi)+\Omega(b\omega)}, \tag{5}$$

де сталі a, b, $c > 0$ не залежать від r. Оскільки $\gamma_r(\xi) = J(\xi) - J_r(\xi)$, то $|\gamma_r(\xi)| \leq |J(\xi)| + |J_r(\xi)|$. Розглянемо функції $J_{r,+}(\xi) := \max\limits_{\xi\in\mathbb{R}}(J_r(\xi), 0)$, $J_{r,-}(\xi) = -\min\limits_{\xi\in\mathbb{R}}(J_r(\xi), 0)$, які є невід'ємними і врахуємо те, що

$$|J_r(\xi)| = J_{r,+}(\xi) + J_{r,-}(\xi) \leq 2|J(\xi)|.$$

Отже,

$$|\gamma_r| \leq 3|J| = 3|F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi]|, \quad \forall r > 0.$$

Звідси вже випливає нерівність (5), оскільки $F_B[F_B[\varphi] \cdot \psi] \in \overset{0}{W}{}_M^\Omega$, якщо $\psi \in \overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}$. Теорема доведена.

Теорема 3. *Якщо узагальнена функція f є мультиплікатором у просторі $\overset{0}{W}{}_M^\Omega(\mathbb{R})$, то її перетворення Фур'є-Бесселя - згортувач у просторі $\overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R})$.*

Доведення. Згідно з означенням згортки узагальненої функції з основною маємо, що

$$F_B[f] * \varphi = < F_B[f], T_x^\xi \varphi >, \quad \forall \varphi \in \overset{0}{W}{}_{M_1}^{\Omega_1}(\mathbb{R}).$$

Оскільки

$$F_B[T_x^\xi \varphi(x)] = j_\nu(\sigma\xi) F_B[\varphi](\sigma),$$

то

$$F_B[f] * \varphi = < f, j_\nu(\sigma\xi) F_B[\varphi](\sigma) > =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(\sigma) j_\nu(\sigma\xi) F_B[\varphi](\sigma) \sigma^{2\nu+1} d\sigma = F_B[f F_B[\varphi]].$$

Звідси випливає, що $F_B[fF_B[\varphi]] \in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, бо $fF_B[\varphi] \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ (тут враховано, що $F_B[\varphi] \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, а f - мультиплікатор у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$). Теорема доведена.

Отже,*для того, щоб узагальнена функція $f \in (\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R}))'$ була згортувачем у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$, необхідно і досить, щоб її перетворення Фур'є-Бесселя було мультиплікатором у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$.*

2. Попередні відомості

Символом $\overset{0}{P}{}^{\Omega}_{M}$ позначимо клас цілих парних однозначних функцій $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, які є мультиплікаторами в просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$ і такими, що $e^{\varphi} \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$. Наприклад, нехай $\varphi(z) = P(z)$, $z = \sigma + i\tau$, - парний поліном степеня $2b$, $b \in \mathbb{N}$, над полем комплексних чисел, який задовольняє умову:

$$\exists c > 0\, \forall \sigma \in \mathbb{R} : \, \mathrm{Re}P(\sigma) \le -c|\sigma|^{2b}.$$

Очевидно, що P є мультиплікатором у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$. Крім того,

$$|e^{tP(\sigma)}| = e^{\mathrm{Re}P(\sigma)} \le e^{-c|\sigma|^{2b}}, \quad \sigma \in \mathbb{R};$$

$$\exists c_1 > 0\, \forall z = \sigma + i\tau \in \mathbb{C} :$$
$$|e^{P(z)}| \le e^{|P(z)|} \le e^{c_1|z|^{2b}}.$$

Тоді, скориставшись рядом теорем з [7], які є узагальненнями теореми Фрагмена-Ліндельофа одержимо, що функція $e^{P(z)}$ в комплексній площині $\mathbb{C}$ задовольняє також нерівність

$$|e^{P(z)}| \le c_0 e^{-c_2|\sigma|^{2b} + c_3|\tau|^{2b}},$$

$$c_0 > 0, c_2 > 0, c_3 > 0,$$

тобто $e^P \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$, де $M(\sigma) = \sigma^{2b}$, $\Omega(\tau) = \tau^{2b}$. Простір $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$ із вказаними функціями M та Ω збігається з підпростором $\overset{0}{S}{}^{1-1/2b}_{1/2b}$, який складається з парних функцій простору $S^{1-1/2b}_{1/2b}$ (див. [7]).

Нехай $\varphi \in \overset{0}{P}{}^{\Omega}_{M}$, $Q(t,z) := e^{t\varphi(z)}$, $t \in (0,T]$, $z \in \mathbb{C}$. При фіксованому $t \in (0,T]$ функція $Q(t,z)$, як функція z, належить до простору $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$, при цьому

$$|Q(t,z)| \le c e^{-tM(ax) + t\Omega(by)}, \quad c > 0. \qquad (6)$$

Введемо позначення:

$$G(t,\sigma) = F_B^{-1}[Q(t,x)](\sigma) =$$

$$= c_\nu \int_0^\infty e^{t\varphi(x)} j_\nu(\sigma x) x^{2\nu+1} dx, \; t \in (0,T], \sigma \in \mathbb{R}.$$

Має місце наступне твердження.

Лема 1. *$G(t,\cdot) \in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$ при кожному фіксованому $t \in (0,T]$, де M_1 - функція, двоїста за Юнгом до Ω, а Ω_1 - функція, двоїста за Юнгом до M; при цьому*

$$\forall k \in \mathbb{Z}_+ \, \exists a_1 : 0 < a_1 < a \, \exists b_1 > b \, \exists d_{k\nu} > 0 :$$
$$|B^k_{\nu,s} G(t, \sigma + i\tau)| \le d_{k\nu} t^{-(2k+2(\nu+1/2)+1)} \times$$
$$\times \exp\left\{ -tM_1\left(\frac{\sigma}{b_1 t}\right) + t\Omega_1\left(\frac{\tau}{a_1 t}\right) \right\},$$
$$\{\sigma, \tau\} \subset \mathbb{R}, s = \sigma + i\tau,$$

(тут a, $b > 0$ - сталі з нерівності (6)).

Доведення. З властивостей перетворення Фур'є-Бесселя випливає, що

$$B^k_\nu G(t,\sigma) = B^k_\nu [c_\nu F_B[Q(t,x)](\sigma)] =$$
$$= c_\nu B^k_\nu F_B[Q(t,x)](\sigma) =$$
$$= c_\nu F_B[(-x^2)^k Q(t,x)](\sigma) =$$
$$= (-1)^k c_\nu \int_0^\infty e^{t\varphi(x)} j_\nu(\sigma x) x^{2k+2\nu+1} dx.$$

Оскільки функція $\psi(x) = (-x^2)^k Q(t,x) \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}(\mathbb{R})$ (при кожному $t \in (0,T]$), то функція $F_B[\psi](\sigma) = F_B[(-x^2)^k Q(t,x)](\sigma) = \dfrac{1}{c_\nu} B^k_\nu G(t,\sigma)$ допускає аналітичне продовження у всю комплексну площину і $F_B[\psi] \in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$. Отже, має місце формула

$$\gamma(s) := B^k_\nu G(t, \sigma + i\tau)) =$$

$$= (-1)^k c_\nu \int\limits_0^\infty e^{t\varphi(x)} j_\nu((\sigma+i\tau)x) x^{2k+2\nu+1} dx,$$

$$s = \sigma + i\tau \in \mathbb{C}. \qquad (7)$$

Із інтегральної формули Пуассона для нормованої функції Бесселя

$$j_\nu(s) = A_\nu \int\limits_0^{\pi/2} \cos(s\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega d\omega, \quad \nu > -\frac{1}{2},$$

та теореми про середнє значення випливає, що

$$j_\nu(s) = \frac{\pi}{2} A_\nu \cos(s\cos\omega_0)\sin^{2\nu}\omega_0 =$$

$$= \tilde{A}_\nu \left[e^{is\cos\omega_0} + e^{-is\cos\omega_0} \right],$$

$$\omega_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \qquad (8)$$

де $\tilde{A}_\nu = \dfrac{\pi}{4} A_\nu \sin^{2\nu}\omega_0$. Отже, внаслідок (7) та (8) маємо, що

$$\gamma(s) = \tilde{c}_\nu \left[\int\limits_0^\infty \Psi_1(s,x)dx + \int\limits_0^\infty \Psi_2(s,x)dx \right],$$

де

$$\Psi_1(s,x) = e^{t\varphi(x)+isx\cos\omega_0} x^{2k+2\nu+1},$$

$$\Psi_2(s,x) = e^{t\varphi(x)-isx\cos\omega_0} x^{2k+2\nu+1}.$$

Здійснимо оцінку інтеграла

$$J_1(s) = \int\limits_0^\infty \Psi_1(s,x)dx.$$

На підставі інтегральної теореми Коші інтегрування по дійсній піввісі замінимо інтегруванням вздовж півпрямої $z = x + iy$, $0 < x < \infty$, y - фіксоване, яка паралельна дійсній піввісі, тобто

$$J_1(s) := \int\limits_0^\infty \Psi_1(s, x+iy)dx =$$

$$= \int\limits_0^\infty e^{t\varphi(x+iy)+is(x+iy)\cos\omega_0} (x+iy)^{2k+2\nu+1} dx.$$

Тоді

$$|J_1(s)| \le \int\limits_0^\infty |\Psi_1(s, x+iy)| dx \le$$

$$\le e^{t\Omega(by)-\sigma y\cos\omega_0} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{-tM(ax)+|\tau|x} |x+iy|^{2k+2\nu+1} dx \le$$

$$\le \tilde{\tilde{c}}_\nu e^{t\Omega(by)-\sigma y\cos\omega_0} (\Phi_1(\tau) + \Phi_2(\tau, y)),$$

де $\tilde{\tilde{c}}_\nu = 2^{k+\nu+1/2}$,

$$\Phi_1(\tau) = \int\limits_0^\infty e^{-tM(ax)+|\tau|x} x^{2k+2\nu+1} dx,$$

$$\Phi_2(\tau, y) = |y|^{2k+2\nu+1} \int\limits_0^\infty e^{-tM(ax)+|\tau|x} dx.$$

Оцінимо вираз $-tM(ax) + x|\tau|$. Оскільки Ω_1 - функція, двоїста за Юнгом до функції M, то

$$-tM(ax) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{ax\varepsilon|\tau|}{\sqrt{\varepsilon}at} \le$$

$$\le -tM(ax) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \left[M\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right) \right]$$

для довільного фіксованого $\varepsilon > 1$. Із нерівності $ax \ge \dfrac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}$, $x \ge 0$, випливає нерівність $M(ax) \ge M\left(\dfrac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ (M - зростаюча функція), тому

$$-tM(ax) \le -tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right), \quad t > 0.$$

Отже,

$$-tM(ax) + |\tau|x \le -tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right) +$$

$$+ \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} M\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right) \le$$

$$\le -\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}} tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}} \Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right).$$

Звідси випливає наступна оцінка:

$$\Phi_1(\tau) \le \exp\left\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}} tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\} x^{2k+2\nu+1} dx.$$

Розглянемо інтеграл

$$J := \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}} tM\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\} x^{2k+2\nu+1} dx.$$

Оцінимо J, виділивши при цьому явну залежність від параметра t. Оскільки функція M зростає при $x \ge 0$ швидше за будь-яку лінійну функцію, то $M\left(\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \ge \frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}} - \varepsilon_0$, $x \ge 0$, $\varepsilon_0 > 0$, тобто

$$J \le \alpha_0 \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}} t\frac{ax}{\sqrt{\varepsilon}}\right\} x^{2k+2\nu+1} dx,$$

$$\alpha_0 = \exp\left\{\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}} \cdot T \cdot \varepsilon_0\right\}.$$

У останньому інтегралі здійснимо заміну змінної інтегрування: $\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\varepsilon}tax = v$. В результаті дістанемо, що

$$J \le \alpha_0 \left(\frac{\varepsilon}{(\sqrt{\varepsilon}-1)at}\right)^{2k+2\nu+2} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty e^{-v} v^{2k+2\nu+1} dv = c_{k\nu} t^{-(2k+2(\nu+1/2)+1)},$$

$$c_{k\nu} = \alpha_0 \left(\frac{\varepsilon}{(\sqrt{\varepsilon}-1)a}\right)^{2k+2\nu+2} \cdot \Gamma(2k+2\nu+1).$$

Отже, для Φ_1 маємо наступну оцінку:

$$\Phi_1(\tau) \le c_{k\nu} t^{-(2k+2(\nu+1/2)+1)} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\}.$$

Аналогічно дістаємо, що

$$\int\limits_0^\infty \exp\left\{-tM(ax) + |\tau|x\right\} dx \le$$

$$\le \exp\left\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\} \times$$

$$\times \int\limits_0^\infty \exp\left\{-\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\varepsilon} tax\right\} dx =$$

$$= \frac{\varepsilon}{(\sqrt{\varepsilon}-1)a} t^{-1} \exp\left\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\}.$$

Тоді

$$\Phi_2(\tau, y) \le b_{k\nu} t^{-(2k+2\nu+2)} \times$$

$$\times \exp\left\{t\Omega(by) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\},$$

де

$$b_{k\nu} = \frac{\varepsilon(2k+[2\nu]+2)!}{(\sqrt{\varepsilon}-1)a} b^{-(2k+2\nu+1)}.$$

З урахуванням оцінок функцій Φ_1 та Φ_2 маємо, що

$$|J_1(s)| \le d_{k\nu} t^{-(2k+2(\nu+1/2)+1)} \times$$

$$\times \exp\{2t\Omega(by) - \sigma y \cos\omega_0\} \times$$

$$\times \exp\left\{\frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega_1\left(\frac{\varepsilon|\tau|}{at}\right)\right\}, d_{k\nu} = \tilde{\tilde{c}}_\nu (c_{k\nu} + b_{k\nu}).$$

Оцінимо вираз

$$\alpha := 2t\Omega(by) - \sigma y \cos\omega_0 =$$

$$= \cos\omega_0 \left[-\sigma y + \frac{2t}{\cos\omega_0}\Omega(by)\right], 0 < \cos\omega_0 < 1.$$

Для цього підберемо знак y і величину y так, щоб $\sigma y = |\sigma||y|$, а нерівність Юнга перетворилась у рівність вигляду

$$|\sigma||y| = \frac{2t}{\cos\omega_0}\left[\frac{\cos\omega_0|\sigma|}{2tb} \cdot b|y|\right] =$$

$$= \frac{2t}{\cos\omega_0}\left[M_1\left(\frac{\cos\omega_0 \sigma}{2tb}\right) + \Omega(by)\right]$$

(тут M_1 - функція, двоїста за Юнгом до Ω). Тоді

$$\alpha = -2tM_1\left(\frac{\cos\omega_0\sigma}{2tb}\right) - 2t\Omega(by) + 2t\Omega(by) =$$

$$= -2tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right),$$

де $b_1 = \dfrac{2b}{\cos\omega_0} > 2b > b$. Отже,

$$|J_1(s)| \le d_{k\nu} t^{-(2k+2(\nu+1/2)+1)} \times$$
$$\times \exp\left\{-2tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right) + \frac{t}{\sqrt{\varepsilon}}\Omega\left(\frac{\varepsilon\tau}{at}\right)\right\} \le$$
$$\le d_{k\nu} t^{-(2k+2(\nu+1/2)+1)} \times$$
$$\times \exp\left\{-tM_1\left(\frac{\sigma}{tb_1}\right) + t\Omega\left(\frac{\tau}{ta_1}\right)\right\},$$

де $0 < a_1 = \dfrac{a}{\varepsilon} < a$. Аналогічно оцінюється інтеграл $J_2(s) := \int\limits_0^\infty \Psi_2(s,x)dx$ (при цьому інтегрування по дійсній піввісі замінюємо інтегруванням вздовж півпрямої $z = x - iy$, $0 < x < \infty$, y - фіксоване).

Лема доведена.

Лема 2. *Функція $G(t,\cdot)$, $t \in (0,T]$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$, диференційовна по t.*

Наведемо схему доведення цього твердження. Із властивості неперервності перетворення Фур'є-Бесселя (як прямого, так і оберненого) у просторах типу $\overset{0}{W}$ випливає, що для доведення твердження досить показати, що функція $F_B[G(t,\cdot)] = e^{t\varphi(\cdot)}$, як абстрактна функція параметра t із значеннями в просторі $F_B[\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}] = \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$, диференційовна по t. Отже, досить довести, що граничне співвідношення

$$\Phi_{\Delta t}(z) := \frac{1}{\Delta t}[\exp\{(t+\Delta t)\varphi(z)\} -$$
$$- \exp\{t\varphi(z)\}] \longrightarrow \varphi(z)\exp\{t\varphi(z)\},$$
$$\Delta t \to 0, z = x + iy \in \mathbb{C},$$

виконується у тому розумінні, що сім'я функцій $\{\Phi_{\Delta t}\}$ рівномірно (по z) збігається до нуля при $\Delta t \to 0$ в будь-якій обмеженій області $Q \subset \mathbb{C}$ і при цьому має місце оцінка

$$|\Phi_{\Delta t}(z)| \le ce^{-M(ax)+\Omega(by)} \tag{9}$$

зі сталими a, b, $c > 0$, не залежними від Δt.

Зупинимось детальніше на доведенні оцінки (9). Оскільки $\varphi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$, то φ є мультиплікатором у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega}_{M}$, тобто

$$\forall\varepsilon > 0\, \exists c_\varepsilon > 0\, \forall z \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \le$$
$$\le c_\varepsilon \exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y)\}. \tag{10}$$

Оскільки

$$\Phi_{\Delta t}(z) = \varphi(z)e^{(t+\theta\Delta t)\varphi(z)},$$
$$0 < \theta < 1, t + \theta\Delta t \le T,$$

то з урахуванням (6) та (10) дістаємо, що

$$|\Phi_{\Delta t}(z)| \le \tilde{c}\exp\{M(\varepsilon x) + \Omega(\varepsilon y) -$$
$$-(t+\theta\Delta t)M(ax) + (t+\theta\Delta t)\Omega(by)\}.$$

Скористаємось тепер тим, що для досить малих за модулем значень Δt справджується нерівність: $t + \theta\Delta t \ge \dfrac{t}{2}$. Тоді

$$|\Phi_{\Delta t}(z)| \le$$
$$\le \tilde{c}\exp\left\{M(\varepsilon x) - \frac{t}{2}M(ax) + \nu_0\Omega((b+\varepsilon)y)\right\},$$

де $\nu_0 = 2\max\{1,T\}$. Оцінимо вираз $\exp\left\{-\dfrac{t}{2}M(ax) + M(\varepsilon x)\right\}$. Із властивості опуклості функції M випливає нерівність $M(\varepsilon x) \le \dfrac{1}{p}M(\varepsilon px)$, $p \in \mathbb{N}$. Передусім підберемо $p \in \mathbb{N}$ так, щоб виконувалась нерівність $\dfrac{1}{p} \le \dfrac{t}{2}$. Далі візьмемо $\varepsilon > 0$ таке, що $\varepsilon p < a$, тобто $\varepsilon \in \left(0, \dfrac{a}{p}\right)$. Тоді

$$\exp\left\{-\frac{t}{2}M(ax) + M(\varepsilon x)\right\} \le$$
$$\le \exp\left\{-\frac{t}{2}M(ax) + \frac{1}{p}M(\varepsilon px)\right\} \le$$
$$\le \exp\left\{\frac{t}{2}(M(\varepsilon px) - M(ax))\right\}.$$

Із нерівності опуклості для функції M випливає, що

$$M(\varepsilon px) - M(ax) \le -M((a-\varepsilon p)x) \equiv -M(\tilde{a}x).$$

Отже,

$$|\Phi_{\Delta t}(z)| \le \tilde{c} \exp\left\{-\frac{t}{2}M(\tilde{a}x) + \nu_0\Omega(\tilde{b}y)\right\},$$

$$\tilde{b} = b + \varepsilon,$$

причому сталі $\tilde{c}, \tilde{a}, \tilde{b} > 0$ не залежать від Δt, якщо Δt досить мала за модулем величина. Таким чином, оцінка (9) має місце.

Наслідок 1. *Правильною є формула*

$$\frac{\partial}{\partial t}(f * G)(t, \cdot) = (f * \frac{\partial}{\partial t}G)(t, \cdot),$$

$$\forall f \in (\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1})', t \in (0, T].$$

Лема 3. *Нехай узагальнена функція* $f \in \in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$ *- згортувач у просторі* $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$,

$$\omega(t, x) := (f * G)(t, x), \quad t \in (0, T], x \in \mathbb{R}.$$

Тоді граничне співвідношення

$$\omega(t, \cdot) \to f, \quad t \to +0,$$

виконується у просторі $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$.

Доведення твердження використовує властивості згортувачів у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ та властивість неперервності перетворення Фур'є-Бесселя у просторах типу $\overset{0}{W}$ та $(\overset{0}{W})'$.

3. Про оператор, спряжений до оператора Бесселя нескінченного порядку

Розглянемо оператор $A_f = f(B_\nu)$, побудований за функцією f. Передусім зазначимо, що

$$|(A_f\varphi)(x)| \le c_\varphi,$$

$$\forall \varphi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}), \quad x \in \mathbb{R}, \tag{11}$$

де c_φ - додатна стала, не залежна від x. З лінійності та неперервності оператора A_f випливає лінійність і неперервність спряженого оператора A_f^*, який діє у просторі $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$ за формулою:

$$< A_f^* g, \varphi > = < g, A_f\varphi >, \quad g \in (\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))',$$

$$\varphi \in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}). \tag{12}$$

З'ясуємо, який вигляд має звуження оператора A_f^* на простір $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \subset (\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$, тобто в (12) вважаємо, що $\{g, \varphi\} \subset \subset \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. На підставі (11) твердимо, що інтеграл $\int_0^\infty g(x)(A_f\varphi)(x)dx$ є абсолютно збіжним для довільної основної функції $g \in \in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Тому, внаслідок теореми Фубіні, справедливі перетворення:

$$< g, A_f\varphi > = \int_0^\infty g(x)(A_f\varphi)(x)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= c_\nu \int_0^\infty g(x)\left(\int_0^\infty f(\xi)F_B[\varphi](\xi)j_\nu(x\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\right) \times$$

$$\times x^{2\nu+1}dx = c_\nu \int_0^\infty \int_0^\infty f(\xi)g(x)j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1} \times$$

$$\times F_B[\varphi](\xi)\xi^{2\nu+1}dxd\xi =$$

$$= \int_0^\infty f(\xi)F_B^{-1}[g](\xi)F_B[\varphi](\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi =$$

$$= \int_0^\infty f(\xi)F_B^{-1}[g](\xi)\left(\int_0^\infty \varphi(x)j_\nu(x\xi)x^{2\nu+1}dx\right) \times$$

$$\times \xi^{2\nu+1}d\xi = \int_0^\infty \varphi(x) \times$$

$$\times \left(\int_0^\infty f(\xi)F_B^{-1}[g](\xi)j_\nu(x\xi)\xi^{2\nu+1}d\xi\right)x^{2\nu+1}dx =$$

$$= \int_0^\infty \varphi(x)F_B[f(\xi)F_B^{-1}[g](\xi)](x)x^{2\nu+1}dx \equiv$$

$$\equiv \int_0^\infty (A_f^* g)(x)\varphi(x)dx = < A_f^* g, \varphi >,$$

$$\{g,\varphi\}\subset \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}).$$

Отже,

$$\forall g\in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}):\quad A_f^* g = F_B[f(\xi)F_B^{-1}[g]].$$

4. Основні результати

Нехай $\varphi\in \overset{0}{P}{}^{\Omega}_{M}$, A_φ - оператор Бесселя нескінченного порядку, побудований за функцією φ. Розглянемо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=A_\varphi u,$$

$$(t,x)\in(0,T]\times(0,\infty)\equiv\Omega_+. \qquad (13)$$

Під розв'язком рівняння (13) розумітимемо функцію

$$u:(0,T]\ni t\to u(t,\cdot)\in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),$$

яка диференційовна по t і задовольняє рівняння (13) (Ω_1 та M_1 - функції, двоїсті за Юнгом відповідно до функцій M та Ω).

У пункті 2 вивчались властивості функції

$$\omega(t,x):=(f*G)(t,x),\quad (t,x)\in\Omega_+,$$

$$f\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))', G(t,x)=F_B^{-1}[e^{t\varphi(\sigma)}](x).$$

Символом $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*$ позначимо сукупність усіх узагальнених функцій з простору $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$, які є згортувачами у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Отже, якщо $f\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*$, то $\omega(t,\cdot)\in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ при кожному $t\in(0,T]$. Із властивості функції $G(t,\cdot)$ як абстрактної функції параметра t із значеннями в просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}$ (див. наслідок 1 з леми 2) випливає, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(f*G)(t,\cdot)=\left(f*\frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,\cdot).$$

Крім того,

$$A_\varphi\omega(t,x)=F_B^{-1}[\varphi(\sigma)F_B[(f*G)(t,x)](\sigma)](x).$$

Оскільки f - згортувач у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, то

$$F_B[(f*G)(t,x)](\sigma)=F_B[f]F_B[G(t,x)](\sigma)=$$
$$=F_B[f]e^{t\varphi(\sigma)}.$$

Отже,

$$A_\varphi\omega(t,x)=F_B^{-1}[\varphi(\sigma)e^{t\varphi(\sigma)}F_B[f](\sigma)](x)=$$
$$=F_B^{-1}\left[\frac{\partial}{\partial t}e^{t\varphi(\sigma)}F_B[f](\sigma)\right](x)=$$
$$=F_B^{-1}\left[F_B\left[\frac{\partial}{\partial t}G(t,x)\right](\sigma)F_B[f](\sigma)\right](x)=$$
$$=F_B^{-1}\left[F_B\left[\left(f*\frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,x)\right](\sigma)\right](x)=$$
$$=\left(f*\frac{\partial}{\partial t}G\right)(t,x).$$

Таким чином, функція $\omega(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_+$ задовольняє рівняння (13) у звичайному розумінні. Лема 3 дозволяє поставити задачу Коші для рівняння (13) так. Для (13) задамо початкову умову

$$u(t,\cdot)|_{t=0}=f, \qquad (14)$$

де $f\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$. *Під розв'язком задачі Коші (13), (14) розумітимемо розв'язок рівняння (13), який задовольняє початкову умову (14) у тому сенсі, що $u(t,\cdot)\to f$ при $t\to+0$ у просторі* $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$. Основна мета цього пункту полягає у встановленні розв'язності задачі Коші (13), (14) у випадку, коли початкова умова - узагальнена функція f - є елементом простору $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*$. Має місце наступне твердження.

Теорема 4. *Задача Коші (13), (14) коректно розв'язна в класі узагальнених функцій $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*$. Розв'язок є функцією, диференційовною по t і подається у вигляді*

$$u(t,x)=(f*G)(t,x),$$

$$f\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*, (t,x)\in\Omega_+,$$

причому $u(t,\cdot)\in \overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ *при кожному* $t\in(0,T]$.

Доведення. Доведення вимагає лише властивість єдиності розв'язку задачі Коші (13), (14). Для встановлення єдиності розв'язку цієї задачі розглянемо задачу Коші

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-A^*_\varphi v,$$

$$(t,x)\in(0,t_0]\times(0,\infty)\equiv\Omega'_+, \qquad (15)$$

$$v|_{t=t_0}=f,\quad f\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*,$$

$$0<t\le t_0\le T, \qquad (16)$$

де A^*_φ - звуження спряженого оператора до оператора A_φ на простір $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})\subset$ $\subset(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$. Умова (16) розуміється у слабкому сенсі. Задачу (15), (16) надалі називатимемо спряженою до задачі (13), (14). Розглянемо функцію

$$G^*(t_0-t,x)=F_B[e^{(t_0-t)\varphi(\sigma)}](x).$$

Аналогічно тому, як це було зроблено у випадку задачі Коші (13), (14) доводимо, що $G^*(t-t_0,x)$, як абстрактна функція параметра t із значеннями у просторі $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$, диференційовна по t $(0<t\le t_0\le T)$; розв'язок задачі (15), (16) дається формулою

$$v(t,x)=(f*G^*)(t_0-t,x),\quad (t,x)\in\Omega'_+,$$

при цьому $v(t,\cdot)\in\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ для кожного t, $0<t\le t_0\le T$.

Нехай $Q^t_{t_0}:(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*\to\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ – оператор, який зіставляє елементу $f\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*$ розв'язок $v(t,\cdot)\in\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$ задачі (15), (16):

$$\forall f\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*:$$

$$Q^t_{t_0}f=(f*G^*)(t_0-t,x)\equiv v(t,x),$$

$$v(t,\cdot)\in\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}),\quad (t,x)\in\Omega'_+.$$

Оператор $Q^t_{t_0}$ - лінійний і неперервний, оскільки такими властивостями володіє операція згортки. Він визначений для довільних t і t_0 таких, що $0<t\le t_0\le T$, причому

$$\forall f\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*:\ \frac{dQ^t_{t_0}f}{dt}=-A^*_\varphi Q^t_{t_0}f,$$

$$\lim_{t\to t_0}Q^t_{t_0}f=f$$

(тут розглядається слабка границя).

Розглянемо тепер розв'язок $u(t,x)$, $(t,x)\in\Omega_+$, задачі (13), (14), який трактуватимемо як функціонал з простору $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'\supset\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Доведемо, що задача Коші (13), (14) може мати лише єдиний розв'язок у просторі $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'$. Для цього досить довести, що єдиним розв'язком рівняння (13) при нульовій початковій умові може бути лише функціонал $u(t,x)\equiv 0$ (бо u неперервно залежить від початкової функції $f\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*$, оскільки операція згортки володіє властивістю неперервності). Зафіксуємо довільним чином t_0, $0<t_0\le T$, і застосуємо функціонал $u(t,x)$ до функції $Q^t_{t_0}\psi$, $0<t\le t_0\le T$, де ψ - довільний функціонал з простору $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*$. Диференціюючи по t і використовуючи рівняння (13) та (15) знаходимо, що

$$\frac{\partial}{\partial t}<u(t,x),Q^t_{t_0}\psi>=$$

$$=\left\langle\frac{\partial u}{\partial t},Q^t_{t_0}\psi\right\rangle+\left\langle u,\frac{\partial Q^t_{t_0}\psi}{\partial t}\right\rangle=$$

$$=<A_\varphi u,Q^t_{t_0}\psi>-<u,A^*_\varphi Q^t_{t_0}\psi>=$$

$$=<A_\varphi u,Q^t_{t_0}\psi>-<A_\varphi u,Q^t_{t_0}\psi>=0,$$

$$\psi\in(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*.$$

Звідси випливає, що $<u(t,x),Q^t_{t_0}\psi>$ є сталою величиною. Використовуючи початкову умову $u|_{t=0}=0$ знаходимо, що ця величина при всіх t, $0<t\le t_0$, рівна нулю.

Зокрема, при $t \to t_0$ (у слабкому розумінні границі) дістаємо, що $< u(t_0, x), \psi >= 0$. Оскільки ψ - довільний елемент з простору $(\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*$, а $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}) \subset (\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R}))'_*$, то $< u(t_0, x), \psi >= 0$ для всіх ψ з простору $\overset{0}{W}{}^{\Omega_1}_{M_1}(\mathbb{R})$. Отже, $u(t_0, x)$ є нульовим функціоналом. Оскільки t_0 вибране довільно між 0 і T, то $u(t, x) \equiv 0$ для всіх $t \in (0, T]$. Теорема доведена.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений. - М.: Физматгиз, 1958. - 274 с.

2.*Городецький В.В., Мартинюк О.В., Шевчук Н.М.* Оператори Бесселя нескінченного порядку // Крайові задачі для диференціальних рівнянь: Зб. наук. пр. - Чернівці, Прут, 2001. - Вип. 7. - С. 61 - 70.

3. *Житомирский В.В.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальным оператором Бесселя // Матем. сб. - 1955. - Т. 36, N 2. - С. 299 - 310.

4. *Крехивский В.В.* Преобразования Фурье-Бесселя классов целых функций, убывающих на действительной оси // Нелинейн. дифференц. уравнения в прикладных задачах: Сб. науч. тр. - К., 1984. - С. 124 - 128.

5. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Преобразования Фурье быстро растущих функций и вопросы единственности задачи Коши // Успехы мат. наук. - 1953. - Т. 8, вып. 6. - С. 3 - 54.

6. *Левитан Б.И.* Разложение по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье // Успехи мат. наук. - 1951. - Т. 6, вып. 2. - С. 102 - 143.

7. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. - М.: Физматгиз, 1958. - 307 с.

Стаття надійшла до редколегії 10.02.2002