УДК 517.955

©2002 р. В.А. Літовченко

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці

БЕССЕЛЕВЕ ДРОБОВЕ ІНТЕГРОДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ З ДОДАТНИМ ПАРАМЕТРОМ

Побудовано обернений оператор до бесселевого потенціалу з додатним параметром у просторах типу S і продовжено його на узагальнені функції повільного зростання.

The inverse operator to Bessel potential with positive parameter is constructed in the space S. This operator is continued on generalized functions of low decreasing.

Дробові степені оператора $(E-\Delta)^{-1/2}$, де E — одиничний оператор, а Δ — лапласіан, одержали назву бесселевих потенціалів після робіт N. Aronszajn, K.T. Smith, A.P. Calderon, R. Adams [1—3]. Бесселеве ядро як прообраз Фур'є у розумінні узагальнених функцій для $(1+\|\cdot\|^2)^{-\alpha/2}$, $\alpha>0$, розглядалося у Л.Шварца [4]. Оборотність бесселевих потенціалів у просторах $L_p(\mathbb{R}^n)$ (див. п.1) вивчалася В.А. Ногіним і Б.С. Рубіним [5—7].

У даній роботі мова йде про побудову оберненого оператора до дробового степеня $(aE-\Delta)^{-1/2}$, $a>0$, у просторі Л. Шварца та продовження його на простір узагальнених функцій повільного зростання.

п.1. Простори основних і узагальнених функцій. Нехай $\mathbb{R}^n$ — n-вимірний евклідовий простір, $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)$ — його елементи (вектори), $(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ — скалярний добуток у $\mathbb{R}^n$, $\|x\|=(x,x)^{1/2}$ — норма елемента x у цьому просторі.

Позначимо через $S_\gamma, S^\beta, S_\gamma^\beta$, $\gamma>0$ і $\beta>0$ простори типу S, означення яких див. у [8] (тут S — відомий простір Л. Шварца [8]).

Послідовність функцій φ_ν, $\nu\in\mathbb{N}$ з S_γ^β збігається в S_γ^β до функції $\varphi\in S_\gamma^\beta$ (позначається $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\overset{S_\gamma^\beta}{\to}} \varphi$) тоді і тільки тоді, коли [8]:

1) $\forall\, k\in\mathbb{Z}_+^n$: $D^k\varphi_\nu(x) \underset{\nu\to\infty}{\overset{x\in\mathbb{K}}{\rightrightarrows}} D^k\varphi(x)$, де $\mathbb{K}$ — довільна компактна множина з $\mathbb{R}^n$;

2) $\exists\, c>0\ \exists\, A>0\ \exists\, B>0\ \forall\,\{q;k\}\subset\mathbb{Z}_+^n\ \forall\,\nu\in\mathbb{N}\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n$: $|x^q D^k\varphi_\nu(x)|\le cA^{|k|}B^{|q|}k^{\beta k}q^{\gamma q}$, де $|m|=m_1+...+m_n$, $m\in\mathbb{Z}_+^n$.

Далі, нехай $\Phi\in\{S;S_\gamma;S_\gamma^\beta\}$, $\gamma>0$, $\beta\ge1$, а $L_p(\mathbb{R}^n)$ — множина всіх вимірних на $\mathbb{R}^n$ функцій f, для яких

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx<+\infty,$$

де $1\le p<+\infty$. Покладемо

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}=\left\{\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p}.$$

Для $p=\infty$ простір $L_p(\mathbb{R}^n)$ визначається як сукупність усіх вимірних функцій зі скінченною нормою

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R}^n)}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|,$$

де $\operatorname{ess\,sup}|f(\cdot)|$ — істотний супремум функції $|f(\cdot)|$.

Зауважимо, що $\Phi\subset L_p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le+\infty$.

Згорткою функції $\varphi\in L_1(\mathbb{R}^n)$ із функцією $\psi\in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1\le p\le+\infty$ (позначається $\varphi*\psi$), називається такий інтегральний оператор:

$$\varphi*\psi=(\varphi*\psi)(x)=\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x-t)\psi(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Згідно з відомою теоремою Юнга (про обмеженість у просторах $L_p(\mathbb{R}^n)$), якщо $\varphi\in$

$L_1(\mathbb{R}^n)$, а $\psi \in L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, то $(\varphi * \psi) \in L_p(\mathbb{R}^n)$, причому

$$\|\varphi * \psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \|\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \|\psi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Перетворення Фур'є функції $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ визначається формулою

$$F[\varphi](x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \varphi(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Дія ж оберненого перетворення Фур'є на елементах з простору $L_1(\mathbb{R}^n)$ задається так:

$$F^{-1}[\varphi](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,\xi)} \varphi(\xi) d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Відзначимо також формулу перетворення Фур'є від згортки:

$$F[\varphi * \psi](x) = F[\varphi](x) F[\psi](x),$$
$$\{\varphi, \psi\} \subset L_1(\mathbb{R}^n). \qquad (1)$$

Символом Φ' позначимо простір, топологічно спряжений до Φ.

Зауважимо тут, що пряме перетворення Фур'є узагальненої функції $f \in \Phi'$ визначається співвідношенням

$$< F[f], F[\varphi] >= (2\pi)^n < f, \varphi >, \quad \varphi \in \Phi,$$

а обернене —

$$< F^{-1}[f], F^{-1}[\varphi] >= (2\pi)^{-n} < f, \varphi >, \varphi \in \Phi.$$

І, якщо f — згортувач у просторі Φ, тобто така узагальнена функція з Φ', що:

1) $\forall \varphi \in \Phi\ \forall x \in \mathbb{R}^n : (f * \varphi)(x) = < f, \varphi(\cdot + x) > \in \Phi$;

2) $\forall \{\varphi; \varphi_\nu, \nu \in \mathbb{N}\} \subset \Phi$ $\varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\overset{\Phi}{\to}} \varphi$: $f * \varphi_\nu \underset{\nu\to\infty}{\overset{\Phi}{\to}} f * \varphi$,

то [8]

$$\forall g \in \Phi'\ \forall \varphi \in \Phi : < f * g, \varphi >=< g, f * \varphi > .$$

п.2. Бесселеве ядро з додатним параметром та його властивості. Розглянемо функцію $(a + \|\xi\|^2)^{-\alpha/2}$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, $a > 0$, і обчислимо її прообраз Фур'є використовуючи формулу Бохнера (25.11) з [9]. У результаті одержимо, що

$$F^{-1}[(a + \|\xi\|^2)^{-\alpha/2}](x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \|x\|^{(n-2)/2}} \times$$
$$\times \int\limits_0^\infty (a + \rho^2)^{-\alpha/2} \rho^{n/2} j_{\frac{n}{2}-1}(\rho\|x\|) d\rho, \ x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

де $j_{\frac{n}{2}-1}(\cdot)$ — функція Бесселя 1-го роду порядку $(n/2 - 1)$. Для забезпечення збіжності інтеграла вважатимемо, що $\alpha > (n-1)/2$.

Далі, згідно з формулою 6.565(4) з [10], остання рівність набуде вигляду

$$F^{-1}[(a + \|\xi\|^2)^{-\alpha/2}](x) =$$
$$= \frac{a^{\frac{n-\alpha}{4}} K_{\frac{n-\alpha}{2}}(a^{\frac{1}{2}} \|x\|)}{(2\pi)^{n/2} 2^{\frac{\alpha-2}{2}} \Gamma(\alpha/2) \|x\|^{\frac{n-\alpha}{2}}},$$
$$\alpha > (n-1)/2, \ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \qquad (2)$$

Тут $K_\nu(\cdot)$ — функція Макдональда (модифікована функція Бесселя 2-го роду порядку ν), а $\Gamma(\cdot)$ — гама-функція Ейлера.

Покладемо за означенням

$$G_\alpha(a, x) := \frac{a^{\frac{n-\alpha}{4}} K_{\frac{n-\alpha}{2}}(a^{\frac{1}{2}} \|x\|)}{(2\pi)^{n/2} 2^{\frac{\alpha-2}{2}} \Gamma(\alpha/2) \|x\|^{\frac{n-\alpha}{2}}},$$
$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Не важко замітити, що функція $G_\alpha(a, \cdot)$ має зміст уже при довільному $\alpha > 0$. І оскільки

$$G_\alpha(a, \cdot)|_{a=1} = G_\alpha(\cdot), \quad \alpha > 0,$$

де $G_\alpha(\cdot)$ — звичайне бесселеве ядро (див. [5]), то надалі $G_\alpha(a, \cdot)$ називатимемо бесселевим ядром з додатним параметром.

З'ясуємо деякі його властивості.

Виходячи з відомих властивостей функції Макдональда [9]:

$$K_\nu(y) \sim 2^{\nu-1} \Gamma(\nu) y^{-\nu}, \quad \nu \ne 0,$$
$$K_0(y) \sim \ln(1/y) \ \ y \to 0$$

і

$$K_\nu(y) \sim \left(\frac{\pi}{2y}\right)^{1/2} e^{-y} \ \ y \to \infty,$$

приходимо до такого твердження.

Лема 1. *Функція* $G_\alpha(a,\cdot)$ *нескінченно диференційовна поза початком координат, причому*

$$G_\alpha(a,x) \sim \begin{cases} \dfrac{\Gamma((n-\alpha)/2)}{\pi^{n/2}2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha/2)\|x\|^{\frac{n-\alpha}{2}}}, \\ \qquad\qquad 0<\alpha<n, \\ \dfrac{\ln(1/(a^{1/2}\|x\|))}{\pi^{n/2}2^{n-1}\Gamma(n/2)}, \quad \alpha=n, \\ \dfrac{\Gamma((\alpha-n)/2)}{\pi^{n/2}2^{n-1}\Gamma(\alpha/2)}, \quad \alpha>0 \end{cases}$$

при $\|x\|\to 0$ *і*

$$G_\alpha(a,x) \sim \frac{a^{\frac{n-\alpha-1}{4}}e^{-a^{\frac12}\|x\|}}{\pi^{(n-1)/2}2^{\frac{n+\alpha-1}{2}}\Gamma(\alpha/2)\|x\|^{\frac{n-\alpha-1}{2}}}$$

при $\|x\|\to\infty$.

Наслідок 1. $G_\alpha(a,\cdot)\in L_1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha>0$, $a>0$.

Наступна властивість функції $G_\alpha(a,\cdot)$ така:

$$F[G_\alpha(a,\xi)](x) = (a+\|x\|^2)^{-\alpha/2},$$

$$\alpha>0, \quad a>0, \quad x\in\mathbb{R}^n. \qquad (3)$$

Доведемо рівність (3). Для цього, згідно з тією ж формулою Бохнера одержуємо, що

$$F[G_\alpha(a,\xi)](x) = \frac{a^{\frac{n-\alpha}{4}}}{2^{\frac{\alpha-2}{2}}\Gamma(\alpha/2)\|x\|^{(n-2)/2}}\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \rho^\alpha K_{\frac{n-\alpha}{2}}(a^{\frac12}\rho)j_{\frac{n}{2}-1}(\rho\|x\|)d\rho,$$

$$x\in\mathbb{R}^n, \quad \alpha>0, \quad a>0. \qquad (4)$$

Звідси, врахувавши інтегральне зображення функції Макдональда (див. наприклад [10], формула 8.432(6)):

$$K_\nu(z) = K_{-\nu}(z) = \frac12\left(\frac{z}{2}\right)^\nu\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty x^{-\nu-1}\exp\left(-x-\frac{z^2}{4x}\right)dx, z\neq 0,$$

на підставі теореми Фубіні про заміну порядку інтегрування, приходимо до наступної рівності:

$$\int\limits_0^\infty \rho^\alpha K_{\frac{n-\alpha}{2}}(a^{\frac12}\rho)j_{\frac{n}{2}-1}(\rho\|x\|)d\rho =$$

$$= \frac12\left(\frac{a^{\frac12}}{2}\right)^{\frac{n-\alpha}{2}}\int\limits_0^\infty \tau^{-\frac{n-\alpha}{2}-1}e^{-\tau}\times$$

$$\times\left(\int\limits_0^\infty \rho^{\frac{n+\alpha}{2}}j_{\frac{n}{2}-1}(\rho\|x\|)e^{-\frac{a\rho^2}{4\tau}}d\rho\right)d\tau,$$

$$a>0, \quad \alpha>0, \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

Звідси, взявши до уваги формулу 6.631(4) з [10], а також рівність (4), одержуємо (3).

Далі,

$\forall\, a>0\ \forall\,\alpha>0\ \forall\,\beta>0\ \forall\, x\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$:

$$G_\alpha(a,x)*G_\beta(a,x) = G_{\alpha+\beta}(a,x). \qquad (5)$$

Дійсно, згідно з наслідком 1 та рівністю (1):

$$F[G_\alpha(a,\xi)*G_\beta(a,\xi)](x) =$$
$$= F[G_\alpha(a,\xi)]F[G_\beta(a,\xi)](x), x\in\mathbb{R}^n.$$

Отже, на підставі властивості (3), маємо

$$F[G_\alpha(a,\xi)*G_\beta(a,\xi)](x) = (a+\|x\|^2)^{-\frac{(\alpha+\beta)}{2}} =$$

$$= F[G_{\alpha+\beta}(a,\xi)](x), \alpha>0, \beta>0, a>0, x\in\mathbb{R}^n.$$

Звідси, з урахуванням леми 1, приходимо до твердження (5).

Оскільки

$$F[G_\alpha(a,\xi)](0) = (a+\|x\|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}|_{x=0} = a^{-\frac{\alpha}{2}},$$

$$a>0, \alpha>0,$$

то одержуємо ще одну властивість функції $G_\alpha(a,\cdot)$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(a,\xi)d\xi = a^{-\frac{\alpha}{2}}, a>0, \alpha>0. \qquad (6)$$

Означимо тепер бесселів потенціал з додатним параметром рівністю

$$G_a^\alpha\varphi = G_\alpha(a,\cdot)*\varphi, \quad \alpha>0, a>0.$$

Виходячи з твердження леми 1, а також з теореми Юнга (див. п.1), одержуємо, що

$$G_a^\alpha : L_p(\mathbb{R}^n) \to L_p(\mathbb{R}^n),$$

$$1 \le p \le \infty, \quad \alpha > 0, \quad a > 0,$$

причому

$$\forall\, \varphi \in L_p(\mathbb{R}^n): \ \|G_a^\alpha \varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \|G_\alpha(a,\cdot) * \varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le \|G_\alpha(a,\cdot)\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \times$$

$$\times \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}, \quad \alpha > 0, \quad a > 0.$$

Звідси, з урахуванням властивості (6) та додатності ядра $G_\alpha(a,\cdot)$ (бо $K_\nu(\|\cdot\|) > 0, \nu \in \mathbb{R}$), одержуємо, що

$$\|G_a^\alpha \varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \le a^{-\alpha/2} \|\varphi\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\alpha > 0, \quad a > 0, \quad \varphi \in L_p(\mathbb{R}^n), \quad 1 \le p \le \infty,$$

тобто, G_a^α породжує у $L_p(\mathbb{R}^n)$, $1 \le p \le \infty$, обмежений оператор.

Правильне твердження.

Теорема 1. $\forall \varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$: $F[G_a^\alpha \varphi](\xi) = (a + \|\xi\|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} F[\varphi](\xi)$, $\alpha > 0$, $a > 0$.

Доведення цієї теореми одержується з рівності (1) та властивості (3).

Безпосередньо з (3) і (5) випливає півгрупова властивість бесселевого потенціалу з додатним параметром:

$$G_a^\alpha G_a^\beta \varphi = G_a^{\alpha+\beta} \varphi, \alpha > 0, \beta > 0, \varphi \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Прозорою є, особливо на функціях φ з простору Φ, наступна властивість цього потенціалу:

$$(aE - \Delta)^k G_a^\alpha \varphi = G_a^{\alpha-2k} \varphi, a > 0, \alpha \ge 2k, k \in \mathbb{N}$$

(тут $G_a^0 \equiv E$), яка, зокрема, вказує на те, що дробовий степінь оператора $(aE - \Delta)^{1/2}$ слід будувати, як обернений оператор до потенціалу G_a^α.

п.3. Бесселеве дробове диференціювання з додатним параметром. У цьому пункті мова йтиме про побудову оберненого оператора $T_a^\alpha f$ до бесселевого потенціалу з додатним параметром $f = G_a^\alpha \varphi$, $\alpha > 0$, $a > 0$, $\varphi \in \Psi$. Зрозуміло, що існування такого оператора, його структура великою мірою залежатимуть від простору Ψ.

Нехай $\Psi = S$, тоді згідно з теоремою 1, а також з тим, що функція $(a + \|\cdot\|^2)^{\alpha/2}$, $a > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, є мультиплікатором у просторі S, а $F(F^{-1}) : S \to S$ (див. [8]),

$$G_a^\alpha \varphi = F^{-1}[(a + \|\xi\|^2)^{-\frac{\alpha}{2}} F[\varphi]],$$

$$\alpha > 0, \quad a > 0, \quad \varphi \in S,$$

причому

$$G_a^\alpha : S \to S, \ \alpha > 0, \ a > 0.$$

Звідси приходимо до такого твердження.

Теорема 2.
$\forall\, f \in S\ \forall\, \alpha > 0\ \forall\, a > 0:$

$$T_a^\alpha f = F^{-1}[(a + \|\xi\|^2)^{\frac{\alpha}{2}} F[f]]. \qquad (7)$$

Зваживши на те, що функція $(a + \|\cdot\|)^{\frac{\alpha}{2}}$, при $\alpha > 0$ і $a > 0$ є мультиплікатором у просторі Φ, з теореми 2 одержуємо

Наслідок 2. $T_a^\alpha : F[\Phi] \to F[\Phi]$, $\alpha > 0$, $a > 0$.

Зауважимо, що форма оператора T_a^α, яка описана рівністю (7), не придатна для функцій, наприклад, з $L_1(\mathbb{R}^n)$. Отже, є потреба у відшуканні такої форми цього оператора, яка б дозволила продовжити дію оператора T_a^α на ширший клас функцій.

Для цього скористаємось теоремою 1 з [8, с.179], бо функція $(a + \|\cdot\|^2)^{\frac{\alpha}{2}}$, $a > 0$, $\alpha > 0$ — мультиплікатор у просторі Φ, а, отже, її обернене перетворення Фур'є $\widetilde{(a + \|\cdot\|^2)}^{\frac{\alpha}{2}}$ у сенсі узагальнених функцій $((a + \|\cdot\|^2)^{\frac{\alpha}{2}} \in \Phi')$ — згортувач у $F[\Phi]$. Тоді з (7) випливає, що для $f \in F[\Phi]$, $a > 0$ і $\alpha > 0$:

$$T_a^\alpha f = \widetilde{(a + \|\cdot\|^2)}^{\frac{\alpha}{2}} * f,$$

або, що те ж саме,

$$(T_a^\alpha f)(x) = < \widetilde{(a + \|\xi\|^2)}^{\frac{\alpha}{2}}, f(\xi + x) >, \quad x \in \mathbb{R}^n. \qquad (8)$$

Обчислимо згортку у правій частині рівності (8) шляхом продовження потенціалу G_a^α на від'ємні значення α, використавши при цьому поняття регуляризатора.

Означення 1. *Регуляризацією функції* $G_{-\alpha}(a,\cdot)$, $\alpha > 0$, $a > 0$, *у просторі* $(F[\Phi])'$ *називатимемо функціонал* $j_a^\alpha \in (F[\Phi])'$, *значення якого на всіх функціях* $\varphi \in F[\Phi]$, *що тотожньо рівні нулеві в околі початку координат, визначається формулою*

$$< j_a^\alpha, \varphi >= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{-\alpha}(a,x)\varphi(x)dx.$$

Знайдемо явний вигляд регуляризатора j_a^α. Для цього скористаємося ідеєю, яку реалізовано в [5] при побудові оберненого оператора T^α до бесселевого потенціалу G^α у просторі S.

Розглянемо для $-n < \beta < l$, $\beta \neq 2k$, $k \in \mathbb{Z}_+$ (l — найменше з цілих чисел, більших за α), функціонал

$$< G_{-\beta}(a,x), \varphi(x) > \overset{def}{=} \sum_{j\in\Lambda_\beta} c_{\beta,j}(D^j\varphi)(0) +$$

$$+ d_\beta \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{[\varphi(x) - (R_x^{[\beta]}\varphi)(0)]}{\|x\|^{n+\beta}} \lambda_\beta(a^{\frac{1}{2}}\|x\|)dx,$$

$$a > 0, \quad \varphi \in F[\Phi], \tag{9}$$

де $(R_x^{[\beta]}\varphi)(\cdot) = \sum\limits_{|j|\le[\beta]} \dfrac{x^j}{j!}(D^j\varphi)(\cdot)$, Λ_β — множина мультиіндексів з парними компонентами, довжина яких не перевищує $[\beta]$, $[\cdot]$ — ціла частина числа;

$$d_\beta = \frac{2^\beta}{x^{n/2}\Gamma(-\beta/2)}, \lambda_\beta(a^{1/2}\|x\|) = 2^{1-\frac{n+\beta}{2}} \times$$

$$\times (a^{\frac{1}{2}}\|x\|)^{\frac{n+\beta}{2}} K_{\frac{n+\beta}{2}}(a^{1/2}\|x\|),$$

$$c_{\beta,j} = \frac{d_\beta 2^{-\beta+|j|-1}\Gamma\left(\frac{n+|j|}{2}\right)\Gamma\left(\frac{|j|-\beta}{2}\right)}{j! a^{\frac{1+|j|-\beta}{2}}}\omega_j,$$

$$\omega_j = \int\limits_{|\sigma|=1} \sigma^j d\sigma. \tag{10}$$

Очевидно, що це лінійний, неперервний функціонал. Оскільки інтеграл у правій частині (9) аналітичний по β в області $-n < \beta < l$, то функціонал (9) аналітичний в області $-n < \beta < l$, $\beta \neq 2k$, $k \in \mathbb{Z}_+$.

Далі, завдяки безпосереднім обчисленням у правій частині (9) легко переконуємося у тому, що для $-n < \beta < 0$, $a > 0$, $\varphi \in F[\Phi]$

$$< G_{-\beta}(a,x), \varphi(x) >= \int\limits_{\mathbb{R}^n} G_{-\beta}(a,x)\varphi(x)dx. \tag{11}$$

З останньої рівності, згідно з (2), робимо висновок, що для $-n < \beta < 0$, $a > 0$

$$< G_{-\beta}(a,x), \varphi(x) >=< \widetilde{(a+\|x\|^2)^{\frac{\beta}{2}}}, \varphi(x) >,$$

$$\varphi \in F[\Phi]. \tag{12}$$

Але функціонал у правій частині рівності (12) аналітичний по β в комплексній площині, оскільки

$$< \widetilde{(a+\|x\|^2)^{\frac{\beta}{2}}}, \varphi(x) >= \frac{1}{(2\pi)^n} < (a+\|x\|^2)^{\frac{\beta}{2}},$$

$$F^{-1}[\varphi](x) >, \quad a > 0, \quad \varphi \in F[\Phi],$$

а всі числові функції $< (a + \|x\|^2)^{\frac{\beta}{2}}, F^{-1}[\varphi](x) >$ аналітичні по β. Отже, рівність (12) має місце і для $0 < \beta < l$, $\beta \neq 2k$, $k \in \mathbb{N}$, зокрема і для $\beta = \alpha$, якщо $\alpha \neq 2k$, $k \in \mathbb{N}$.

Звідси вже з урахуванням (10), а також з означення 1, рівностей (11), (9) і (8) приходимо до такого твердження.

Теорема 3. *Нехай* $\varphi \in F[\Phi]$, $a > 0$, $\alpha > 0$ *і* $\alpha \neq 2k$, $k \in \mathbb{N}$. *Тоді для* $x \in \mathbb{R}^n$:

1) $< j_a^\alpha, \varphi >= \sum\limits_{j\in\Lambda_\alpha} c_{\alpha,j}(D^j\varphi)(0) +$

$$+ d_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{[\varphi(x) - (R_x^{[\alpha]}\varphi)(0)]}{\|x\|^{n+\alpha}} \lambda_\alpha(a^{\frac{1}{2}}\|x\|)dx;$$

2) $(T_a^\alpha\varphi)(x) =< j_a^\alpha, \varphi(\cdot + x) >$, тобто

$$(T_a^\alpha\varphi)(x) = \sum_{j\in\Lambda_\alpha} c_{\alpha,j}(D^j\varphi)(x) +$$

$$+ d_\alpha \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{[\varphi(x+y) - (R_y^{[\alpha]}\varphi)(x)]}{\|y\|^{n+\alpha}} \lambda_\alpha(a^{\frac{1}{2}}\|y\|)dy.$$

Зауваження 1. Оскільки $(a+\|\cdot\|^2)^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i}\|\cdot\|^{2i}$, $k\in\mathbb{N}$, $a>0$, то при $\alpha=2k$ оператор T_a^α має вигляд

$$T_a^\alpha\varphi = \sum_{i=0}^{k} C_k^i a^{k-i}(-\Delta)^i\varphi, \quad \varphi\in C^\alpha(\mathbb{R}^n)$$

(тут $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ — простір неперервно диференційовних функцій до порядку α, визначених на $\mathbb{R}^n$).

З твердження 2) цієї теореми, а також з рівності (8), одержуємо, що

$$\widetilde{(a+\|\cdot\|^2)}^{\frac{\alpha}{2}} = j_a^\alpha, a>0, \alpha>0, \alpha\neq 2k, k\in\mathbb{N}.$$

Отже,

$$T_a^\alpha\varphi = j_a^\alpha * \varphi, \quad \varphi\in F[\Phi],$$
$$a>0, \quad \alpha>0, \quad \alpha\neq 2k, \quad k\in\mathbb{N}. \qquad (13)$$

Така форма дії оператора T_a^α на функціях з $F[\Phi]$ дозволяє, згідно з методом Л. Шварца [9, с.126] продовжити цей оператор на простір $(F[\Phi])'$ так:

$$\forall\, f\in(F[\Phi])' : \ \hat{B}_a^\alpha f = j_a^\alpha * f,$$
$$a>0, \quad \alpha>0, \quad \alpha\neq 2k, \quad k\in\mathbb{N} \qquad (14)$$

(тут $\hat{B}_a^\alpha$ — продовження оператора T_a^α). Це продовження має сенс, оскільки j_a^α — згортувач у просторі $F[\Phi]$.

Оператор $\hat{B}_a^\alpha$ називатимемо узагальненим оператором бесселевого дробового диференціювання з додатним параметром у просторі $(F[\Phi])'$.

Правильне наступне твердження.

Теорема 4. $\forall\, f\in(F[\Phi])'\ \forall\,\varphi\in F[\Phi] : <\hat{B}_a^\alpha f,\varphi>=<f,T_a^\alpha\varphi>$, $a>0,\alpha>0$ і $\alpha\neq 2k, k\in\mathbb{N}$.

Доведення. З (14), а також з (13) одержуємо, що $<\hat{B}_a^\alpha f,\varphi>=<j_a^\alpha * f,\varphi>=<f, j_a^\alpha*\varphi>=<f,T_a^\alpha\varphi>$, $\varphi\in F[\Phi]$, $f\in(F[\Phi])'$, де $a>0,\alpha>0$ і $\alpha\neq 2k, k\in\mathbb{N}$, що й потрібно було довести.

Нарешті сформулюємо ще одне твердження, яке доводиться аналогічно, як і теорема 3.3 з [11] для оператора Рісса дробового диференціювання.

Теорема 5. *Нехай B_a^α, $a>0,\alpha>0$ і $\alpha\neq 2k, k\in\mathbb{N}$, звуження оператора $\hat{B}_a^\alpha$ на простір $L_1(\mathbb{R}^n)$. Тоді:*

а) область визначення $D(B_a^\alpha)$ оператора B_a^α щільна в $L_1(\mathbb{R}^n)$, причому $S\subset D(B_a^\alpha)$;

б) B_a^α — замкнений оператор у $L_1(\mathbb{R}^n)$;

в) $\forall\,\varphi\in S:\ B_a^\alpha\varphi = T_a^\alpha\varphi$.

Зауваження 2. Урахувавши твердження в) теореми 5, оператор B_a^α називатимемо псевдодиференціальним бесселевим оператором з додатним параметром.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Aronszajn N., Smith K.* Theory of Bessel potentials. I // Ann. del'Institute Fourier.— 1961.— **11**.— p.385—475.

2. *Calderon A.P.* Lebesque spaces of differential functions and distributions // Sympos. on Pure Math.— 1961.— 4.— p.33—49.

3. *Adams R., Aronszajn N., Smith K.T.* Theory of Bessel potentials. II // Ann. del'Institute Fourier.— 1967.— **17**, N 2.— p.385—475.

4. *Schwartz L.* Théorie des distributions. In 2 vlms.— Vol.2. Paris: Hermann, 1951.— 169 p.

5. *Ногин В.А.* Об обращении бесселевых потенциалов // Дифференц. уравнения.— 1982.— **18**, N 8.— С.1407—1411.

6. *Ногин В.А.* Обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов // Изв. вузов. Математика.— 1985.— N 9.— С.57—65.

7. *Рубин Б.С.* Описание и обращение бесселевых потенциалов с помощью гиперсингулярных интегралов со взвешенными разностями // Дифференц. уравнения.— 1986.— **22**, N 10.— С.1805—1818.

8. *Гельфанд И.М., Шилов Г.Е.* Пространства основных и обобщенных функций. М.: Физматгиз, 1958.— 308 с.

9. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.— Минск: Наука и техника, 1987.— 688 с.

10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Физматгиз, 1971.— 1108 с.

11. *Городецький В.В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу.— Чернівці: Рута, 1998.— 225 с.

Стаття надійшла до редколегії 22.10.2001