УДК 517.53

©2002 р. Н.Є.Лінчук, С.С.Лінчук

Чернівецький національний університет ім.Ю.Федьковича, Чернівці

ПРО ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ОПЕРАТОРІВ ПОММ'Є В ПРОСТОРІ АНАЛІТИЧНИХ В ОБЛАСТІ ФУНКЦІЙ

Одержано критерій еквівалентності загального оператора Помм'є скінченного порядку до оператора Помм'є в просторі функцій, аналітичних в області комплексної площини.

The criterion of equivalence of an operator Pomme of the finite order to an operator Pomme in space of functions, analytical in the field of complex plane is obtained.

Нехай G – довільна область комплексної площини, а $H(G)$ – простір усіх аналітичних в області G функцій, що наділений топологією компактної збіжності. Через $\mathcal{L}(H(G))$ позначатимемо множину всіх лінійних неперервних операторів, які діють в $H(G)$. Якщо $0 \in G$, то через Δ позначатимемо оператор Помм'є , який неперервно діє в $H(G)$ за правилом: $(\Delta f)(z) = (f(z)-f(0))/z$. Нагадаємо, що лінійні неперервні оператори A та B, що діють в $H(G)$, називаються еквівалентними в $H(G)$, якщо існує ізоморфізм T простору $H(G)$, для якого $TA = BT$. У цій статті досліджуються умови еквівалентності в $H(G)$ операторів Δ^n та L, де

$$(Lf)(z) = (\Delta^n f)(z) + \varphi_1(z)(\Delta^{n-1} f)(z) + ...$$

$$+\varphi_{n-1}(z)(\Delta f)(z) + \varphi_n(z)f(z),$$

$\varphi_k, k = \overline{1,n}$ – функції з простору $H(G)$, n – фіксоване натуральне число. Зауважимо, що випадок кругової області G розглянуто в [1], а в [2]– випадок довільної області G і $n = 1$.

Нехай n – фіксоване натуральне число. Область комплексної площини G називається $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною, якщо вона інваріантна відносно повороту навколо початку координат на кут $\frac{2\pi}{n}$. Для області G через $G^{(n)}$ позначатимемо область виду $G^{(n)} = \{z^n; z \in G\}$.

Надалі в цій статті вважатимемо, що G – однозв'язна, $\frac{2\pi}{n}$- інваріантна область комплексної площини, яка містить початок координат і відмінна від $\mathbf{C}$, а n – фіксоване натуральне число.

Лема 1. *Існують функції φ та ψ, які конформно відображають відповідно області G і $G^{(n)}$ на одиничний круг $\{w : |w| < 1\}$, такі, що $\varphi(0) = 0$ і для $z \in G$:*

$$\psi(z^n) = [\varphi(z)]^n. \tag{2}$$

Доведення. За теоремою Рімана про конформні відображення існує єдина аналітична на G функція, яка конформно відображає G на одиничний круг $K = \{w : |w| < 1\}$ і задовольняє умови: $\varphi(0) = 0, arg\varphi'(0) = 0$. Оскільки область G –$\frac{2\pi}{n}$-інваріантна, то функцію $\varphi(z)$ при $z \in G$ можна подати у вигляді

$$\varphi(z) = \varphi_0(z^n) + z\varphi_1(z^n) + ...+$$

$$+z^{n-1}\varphi_{n-1}(z^n), \tag{2}$$

де $\varphi_i, i = \overline{0, n-1}$, – деякі функції, які аналітичні на $G^{(n)}$, і визначаються однозначно за функцією $\varphi(z)$ (див., наприклад, [3]).

Розглянемо функцію $\tilde{\varphi}(z) = \frac{\varphi(\omega z)}{\omega}$, де $\omega = exp\frac{2\pi i}{n}$. Зрозуміло, що функція $\tilde{\varphi}$ конформно відображає область G на одиничний круг K і задовольняє умови: $\tilde{\varphi}(0) = 0, \tilde{\varphi}'(0) = \varphi'(0)$. За теоремою про єдиність конформних відображень звідси випливає, що $\tilde{\varphi}(z) = \varphi(z)$, тобто,

$$\varphi(\omega z) = \omega\varphi(z), \tag{3}$$

при $z \in G$. Скориставшись зображенням (2), співвідношенням (3) і тим, що функції φ_i в

(2) однозначно визначаються за функцією φ, одержуємо, що $\varphi_0(z) \equiv \varphi_2(z) \equiv \varphi_3(z) \equiv ... \equiv \varphi_n(z) \equiv 0$ в G^n. Тому з (2) одержуємо, що при $z \in G$:

$$\varphi(z) = z\varphi_1(z^n). \tag{4}$$

Розглянемо далі функцію

$$\psi(z) = z\varphi_1^n(z) \tag{5}$$

і покажемо, що вона здійснює конформне відображення області $G^{(n)}$ на одиничний круг K. Зрозуміло, що функція $\psi(z)$ є аналітичною на $G^{(n)}$. Далі, якщо $z \in G^{(n)}$, то існує $\zeta \in G$ таке, що $z = \zeta^n$. Тоді $\psi(z) = [\zeta\varphi_1(\zeta^n)]^n = [\varphi(\zeta)]^n$ і тому $|\psi(z)| < 1$. Оскільки функція φ конформно відображає область G на одиничний круг K, то для довільної точки $w \in K$ існує точка $\zeta \in G$, для якої $[\varphi(\zeta)]^n = w$. Але тоді $\psi(\zeta^n) = w$. Таким чином, функція ψ відображає область $G^{(n)}$ на одиничний круг. Покажемо далі, що функція ψ є однолистною в $G^{(n)}$. Допустимо, що $\psi(z_1) = \psi(z_2)$, де z_1 і $z_2 \in G^{(n)}$. Виберемо точки $\zeta_k \in G$ такими, щоб $\zeta_k^n = z_k, k = 1, 2$. Тоді з рівності $[\varphi(\zeta_1)]^n = [\varphi(\zeta_2)]^n$ випливає, що існує ціле $p, 0 \le p \le n-1$, для якого $\varphi(\zeta_1) = w^p\varphi(\zeta_2)$. Використовуючи (3), одержуємо, що $\varphi(\zeta_1) = \varphi(w^p\zeta_2)$, де $w^p\zeta_2 \in G$, оскільки область G є $\frac{2\pi}{n}$-інваріантною. Оскільки φ – однолистна в G, то $\zeta_1 = w^p\zeta_2$, і тому $z_1 = \zeta_1^n = \zeta_2^n = z_2$. Отже, функція ψ дійсно є однолистною в G.

Таким чином, функція $\psi(z)$ здійснює конформне відображення області $G^{(n)}$ на одиничний круг K_1. Співвідношення (1) випливає з (4) і (5).

Лема 2. *Якщо для деякої аналітичної в області G функції $h(z)$ виконуються умови*

$$h(0) = 1 \ i \ \{z^n h(z) : z \in G\} = G^{(n)}, \tag{6}$$

то $h(z) \equiv 1$ в G.

Доведення. Нехай φ та ψ – функції, що побудовані згідно леми 1. Тоді з (6) випливає, що функція $g(w) = \psi((\varphi^{-1}(w))^n h(\varphi^{-1}(w)))$ відображає одиничний круг K на себе і крім того точка $w = 0$ буде n-кратним нулем для функції $g(w)$. Використовуючи послідовно n разів лему Шварца до функцій $g(w), \frac{g(w)}{w}, ..., \frac{g(w)}{w^{n-1}}$ ми на останньому кроці одержимо, що $|g(w)| \le |w|^n$ при $|w| < 1$. Тому $|\psi(z^n h(z))| \le |\varphi(z)|^n$ при $z \in G$. Враховуючи (1), одержуємо, що

$$|\psi(z^n h(z))| \le |\psi(z^n)| \tag{7}$$

при $z \in G$. Розглянемо допоміжну функцію $f(z) = \frac{\psi(z^n h(z))}{\psi(z^n)}$. Оскільки $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = h(0) = 1$, то точка $z = 0$ є усувною особливістю для функції $f(z)$. Тому функція $f(z)$ є аналітичною в області G (точніше продовжується до функції, яка аналітична в G, якщо покласти $f(0) = 1$) і $|f(z)| \le 1$ при $z \in G$. Але $f(0) = 1$. Отже, згідно принципа максимума модуля для аналітичних функцій, звідси одержуємо, що $f(z) \equiv 1$ при $z \in G$. Тому $\psi(z^n h(z)) = \psi(z^n)$, а, отже, і $z^n h(z) = z^n$ при $z \in G$. Таким чином, $h(z) \equiv 1$ в G.

Дослідимо деякі необхідні умови еквівалентності операторів L та Δ в $H(G)$.

Лема 3. *Якщо для деяких аналітичних в області G функцій $\varphi_k(z), k = \overline{1, n}$ оператори L та Δ^n еквівалентні в $H(G)$, то при $z \in G$ виконується рівність:*

$$\sum_{k=1}^{n} z^{k-1}\varphi_k(z) = 0. \tag{8}$$

Доведення. Допустимо, що оператори L та Δ^n еквівалентні в $H(G)$. Використаємо далі той факт, що у еквівалентних операторів збігаються множини їхніх власних значень, а також кратності однакових власних значень. Оскільки для довільної функції $f \in H(G)$

$$\Delta^n f(z) = \frac{f(z) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{f^k(0)}{k!} z^k}{z^n},$$

то множина власних значень оператора Δ^n в $H(G)$ збігається з множиною $\mathbf{C} \setminus (G^{(n)})^{-1}$. При цьому кожне власне значення оператора Δ^n є n-кратним, оскільки власний підпростір, що відповідає власному значенню

λ, збігається з n-вимірним підпростором

$$\{(\sum_{k=0}^{n-1}{}_k z^k)/(1-\lambda z) : c_k \in C, k=\overline{0,n-1}\}$$

простору $H(G)$.

Знайдемо далі множину n-кратних власних значень оператора L. Позначаючи для зручності $\varphi_0(z)\equiv 1$, одержимо, що для довільного $\lambda \in \mathbf{C}$ і $f \in H(G)$ співвідношення $Lf=\lambda f$ рівносильне тому, що при $z \in G$

$$f(z)(\sum_{k=0}^{n} z^k\varphi_k(z)-\lambda z^n)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n-1}{}_m z^m \sum_{k=0}^{n-m-1} z^k\varphi_k(z), \qquad (9)$$

де $c_m, m=\overline{0,n-1}$–деякі сталі.

Позначимо

$$G_1=\{z^{-n}\sum_{k=0}^{n} z^k\varphi_k(z) : z\in G\backslash\{0\}\}$$

і розглянемо два випадки:

1) Якщо $\lambda\notin G_1$, то з (9) випливає, що λ є n-кратним власним значенням для оператора L.

2) Якщо ж $\lambda \in G_1$, то існує точка $z_0\in G$, для якої $\sum\limits_{k=0}^{n} z_0\varphi_k(z_0)-\lambda z_0^n=0$. З (9) в цьому випадку одержуємо, що

$$\sum_{m=0}^{n-1} c_m z_0^m \sum_{k=0}^{n-m-1} z_0^k\varphi_k(z_0)=0.$$

Тому відповідне λ може бути щонайбільше $(n-1)$-кратним власним значенням оператора L і не може бути n-кратним власним значенням цього оператора.

Оскільки у еквівалентних операторів збігаються не лише множини власних значень, а також і кратності однакових власних значень, то

$$(G^{(n)})^{-1}=G_1 \qquad (10).$$

З рівності (10) випливає, що $0\notin G_1$. Тому функція $h(z)=(\sum\limits_{k=0}^{n} z^k\varphi_k(z))^{-1}$ є аналітичною в G, причому $h(0)=1$. Рівність (10) означає, що для функції $h(z)$ виконуються умови леми 2. Тому $h(z)\equiv 1$ в G. Оскільки $\varphi_0(z)\equiv 1$, то рівність (8) виконується в G. Лему 3 доведено.

Якщо (8) виконується в G, то дію оператора L на довільну функцію $f\in H(G)$ можна подати у вигляді

$$(Lf)(z)=(\Delta^n f)(z)+$$

$$+\sum_{m=0}^{n-2}(\sum_{k=0}^{m} z^k\varphi_{k+n-m}(z))\frac{f^m(0)}{m!},$$

тобто $L=M$, де M–лінійний неперервний оператор, що діє в $H(G)$ за правилом

$$(Mf)(z)=(\Delta^n f)(z)+\sum_{m=0}^{n-1}\psi_m(z))\frac{f^m(0)}{m!}, \qquad (11)$$

причому

$$\psi_m(z)=\sum_{k=0}^{m} z^k\varphi_{k+n-m}(z), \qquad (12)$$

$m=\overline{0,n-2}$; $\psi_{n-1}(z)\equiv 0$.

Лема 4. *Нехай $\psi_m\in H(G), m=\overline{0,n-1}$. Для того, щоб лінійний неперервний оператор $T: H(G)\longrightarrow H(G)$ був розв'язком операторного рівняння $T\Delta^n=MT$ необхідно і досить, щоб $T=T_1T_2$, де T_1–лінійний неперервний в $H(G)$ оператор, що переставний з U_{z^n} і для якого $T_1z^m=z^m-z^n\psi_m(z), m=\overline{0,n-1}$, а T_2–довільний лінійний неперервний в $H(G)$ оператор, що переставний з Δ^n.*

Доведення.Необхідність. Допустимо, що лінійний неперервний оператор $T: H(G)\longrightarrow H(G)$ з характеристичною функцією $t(\lambda,z)$ [4] задовольняє співвідношення $T\Delta^n=MT$. Подіявши обома частинами останньої рівності на функцію $\frac{1}{\lambda-z}$ одержимо, що на множині F (див.[5]) виконується рівність

$$t(\lambda,z)=\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(z^m-z^n\psi_m(z))\lambda^n l_m(\lambda)}{\lambda^n-z^n}, \qquad (13)$$

де $l_m(\lambda)=\frac{\partial^m t}{\partial z^m}(\lambda,0), m=\overline{0,n-1}$. Зрозуміло, що функції $l_m(\lambda), m=\overline{0,n-1}$ – аналітичні на $\mathcal{C}G$. Оскільки функції

$$t_1(\lambda, z) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda^{n-1-i}(z^i - z^n\psi_i(z))}{\lambda^n - z^n}, \quad (14)$$

$$t_2(\lambda, z) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{z^m\lambda^n l_m(\lambda)}{\lambda^n - z^n}, \quad (15)$$

є локально аналітичними на множині $\mathcal{C}G \times G$, то вони є характеристичними функціями відповідно операторів T_1 і T_2, які лінійно і неперервно діють в $H(G)$, причому T_1 переставний з U_{z^n} і $T_1 z^m = z^m - z^n\psi_m(z), m = \overline{0, n-1}$ [2], а T_2–переставний з оператором Δ^n([6]). Оскільки характеристична функція оператора T_1T_2 збігається з функцією $t(\lambda, z)$, то $T = T_1T_2$.

Достатність умов леми 4 випливає з рівності $T_1\Delta^n = MT_1$, яка одержується, наприклад, з того, що характеристичні функції операторів $T_1\Delta^n$ і MT_1 збігаються.

Дослідимо далі умови еквівалентності операторів виду (11) та Δ^n.

Нагадаємо, що формулами

$$(P_k f)(z) = n^{-1} \sum_{i=0}^{n-1} \omega^{-ki} f(\omega^i z), k = \overline{0, n-1},$$

де $\omega = exp\frac{2\pi i}{n}$, визначаються проектори, які лінійно і неперервно діють в $H(G)$.

Теорема 1. *Нехай $\psi_m \in H(G), m = \overline{0, n-1}$. Для того, щоб оператор M був еквівалентним в просторі $H(G)$ до оператора Δ^n, необхідно і досить, щоб*

$$det \parallel z^{-k} P_k[z^m - z^n\psi_m(z)] \parallel_{k,m=0}^{n-1} \neq 0 \quad (16)$$

при $z \in G$.

Доведення. Необхідність. Допустимо, що оператори M та Δ еквівалентні в $H(G)$. Тоді існує ізоморфізм T простору $H(G)$, для якого $TM = \Delta^n T$. За лемою 4 T можна подати у вигляді $T = T_1T_2$, де $T_i \in \mathcal{L}(H(G)), i = 1, 2$, причому T_1 переставний з U_{z^n}, і $Tz^m = z^m - z^n\psi_m(z), m = \overline{0, n-1}$, а T_2– переставний з Δ^n. Оскільки T– ізоморфізм, то оператор T_1 є сюр'єктивним, а, отже [2], виконується умова (16).

Достатність. При виконанні умови (16) оператор T_1 є ізоморфізмом простору $H(G)$, що задовольняє співвідношення $T_1M = \Delta^n T_1$.

З використанням леми 3 і теореми 1 одержується основний результат цієї статті.

Теорема 2. *Нехай $\varphi_m \in H(G), m = \overline{1, n-1}$. Для того, щоб оператор L був еквівалентним в просторі $H(G)$ до оператора Δ^n, необхідно і досить, щоб при $z \in G$ виконувалися умови (8) і (16), де $\psi_m, m = \overline{0, n-1}$, визначаються формулами (12).*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Линчук С.С., Нагнибида Н.И.* Об эквивалентности операторов Поммье в пространстве аналитических в круге функций// Сиб. мат. журн.–1990.–31, N3.–С.55–61.

2. *Лінчук Н.Є., Лінчук С.С.* Про еквівалентність операторів першого порядку відносно оператора Помм'є// Науковий вісник Чернівецького університету. – Вип.111.–2001.–С.66-69.

3.*Березовская Г.И.,Березовский Н.И.* Описание изоморфизмов пространства голоморфных функций, перестановочных с кратным умножением// Укр.матем.ж.–1984.–36,N.5.– С.611-615.

4.*Köthe G.* Dualinät in der Funktionentheorie// J. reine und angew. Math.– 1953.– **191**.- S.30-49.

5.*Линчук Н.Е.,Линчук С.С.* Об одном классе операторных уравнений в аналитических пространствах// Укр. мат. журн.–1983.–Т.35, N4.–С.510–515.

6.*Линчук Н.Е.* Представление коммутантов операторов умножения на полиномы в аналитических пространствах./ Черновицкий ун-т.–Черновцы,1985.– 17с.–Деп. в УкрНИИНТИ 08.01.86, N 189.

Стаття надійшла до редколегії 11.10.2001