УДК 517.948

©2002 р. Л.П. Костишин

Прикарпатський університет імені В. Стефаника, Івано-Франківськ

ЗАСТОСУВАННЯ ОДНОПАРАМЕТРИЧНОГО МЕТОДУ ІТЕРАТИВНОГО АГРЕГУВАННЯ ДО ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ

Для крайової задачі $x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=f(t)$, $x(a)=A$, $x(b)=B$ побудовано однопараметричний метод ітеративного агрегування та досліджено умови збіжності розглянутого агрегативно-ітераційного алгоритму.

The monoparametric method of iteration aggregation is constructed for the boundary value problem $x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=f(t)$, $x(a)=A$, $x(b)=B$ and the conditions of the convergence of this aggregation-iterational algorithm are investigated.

Методи ітеративного агрегування, як зазначено в [1], досліджені недостатньо. Пропонована замітка присвячена застосуванню методики з [2,3] до дослідження однопараметричного методу ітеративного агрегування в застосуванні до рівняння

$$x''(t)+p(t)x'(t)+q(t)x(t)=f(t) \tag{1}$$

з крайовими умовами

$$x(a)=A, \quad x(b)=B. \tag{2}$$

Усі функції є неперервно-диференційовними достатню кількість разів.

При $p(t)=p_0-p_1(t)$, $q(t)=q_0-q_1(t)$, подавши (1) у вигляді

$$x''(t)+p_0x'(t)+q_0x(t)=$$
$$=f(t)+p_1(t)x'(t)+q_1(t)x(t), \tag{3}$$

задачу (1), (2) можна звести до інтегрального рівняння

$$x(t)=\int\limits_a^b\Big[G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1'(s)-$$
$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Big]x(s)ds+b(t). \tag{4}$$

Тут

$$G_0(t,s)=\frac{e^{-\lambda_1(s-t)}}{2\sqrt{D}(e^{\sqrt{D}(b-a)}-1)}\times$$
$$\times\Big[\operatorname{sign}(t-s)(e^{\sqrt{D}(t-s)}-1)(e^{\sqrt{D}(b+a)}-e^{\sqrt{D}(t-a)})+$$
$$+(e^{\sqrt{D}(b-s)}-1)(1-e^{\sqrt{D}(t-a)})-$$
$$-(e^{\sqrt{D}(a-s)}-1)(e^{\sqrt{D}(t-a)}-e^{-\sqrt{D}(a+b)})\Big]$$

— функція Гріна задачі (3) з однорідними крайовими умовами, а

$$b(t)=\frac{Ae^{-\lambda_2(a-t)}}{(e^{\sqrt{D}(b-a)}-1)}(e^{\sqrt{D}b}-1)+$$
$$+\frac{Ae^{-\lambda_1(b-t)}}{(e^{\sqrt{D}(b-a)}-1)}(e^{\sqrt{D}a}-1)+$$
$$+\int\limits_a^b G_0(t,s)f(s)ds+G_0(t,s)p_1(s)x(s)\Big|_a^b,$$

де $\lambda_1=-\frac{p_0}{2}-\frac{\sqrt{D}}{2}$, $\lambda_2=-\frac{p_0}{2}+\frac{\sqrt{D}}{2}$, $D=p_0^2-4q_0$. Припускатимемо задля зручності, що $D>0$.

Приєднаємо до рівняння (4) рівняння

$$y=\int\limits_a^b\alpha(s)x(s)ds+\lambda y. \tag{5}$$

Означимо функцію $\alpha(t)$ за допомогою рівності

$$\alpha(t)=\lambda\varphi(t)-\int\limits_a^b\Big[G_0(t,s)q_1(s)-$$

$$-G_0(t,s)p_1^{'}(s)-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Big]\varphi(s)ds. \quad (6)$$

Застосуємо до системи (4), (5) агрегаційно-ітеративний алгоритм [2]. Розглянемо ітераційний процес

$$x_{n+1}(t)=\int_a^b\Big[G_0(t,s)q_1(s)-$$

$$-G_0(t,s)p_1^{'}(s)-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Big]x_n(s)ds+$$

$$+a^{(n)}(t)(y_n-y_{n+1})+b(t), \quad (7)$$

$$y_{n+1}=\int_a^b\alpha(s)x_nds+\alpha_0^{(n)}(y_n-y_{n+1})+\lambda y_{n+1}, \quad (8)$$

де $a^{(n)}(t)$ визначають за формулами

$$a^{(n)}(t)=\Big(\int_a^b\Big[G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1^{'}(s)-$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Big]x_n(s)ds\Big)\times$$

$$\times\Big(y_n+\int_a^b\varphi(s)x_n(s)ds\Big)^{-1}, \quad (9)$$

задавши, взагалі кажучи, довільним способом неперервну функцію $\varphi(t)$ та дійсне число λ. Означимо $\alpha_0^{(n)}$ за допомогою рівності

$$\int_a^b\varphi(s)a^{(n)}(s)ds+\alpha_0^{(n)}=\lambda. \quad (10)$$

Нехай $\{x^*(t),y^*\}$ розв'язок системи (4), (5). Тоді

$$\int_a^b\varphi(s)x^*(s)ds+y^*=$$

$$=\int_a^b\varphi(s)\int_a^b\Big[G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1^{'}(s)-$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Big]x^*(s)dsdt+$$

$$+\int_a^b\alpha(s)x^*(s)ds+\lambda y^*+\int_a^b\varphi(t)b(t)dt=$$

$$=\int_a^b\varphi(t)b(t)dt+\lambda y^*+$$

$$+\int_a^b x^*(t)\int_a^b\Big(\Big[G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1^{'}(s)-$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Big]\varphi(s)ds+\alpha(s)\Big)dsdt=$$

$$=\int_a^b\varphi(t)b(t)dt+\lambda\Big(\int_a^b\varphi(t)x^*(t)dt+y^*\Big).$$

Отже, справджується рівність

$$\int_a^b\varphi(s)x(s)ds+y=\frac{\int_a^b\varphi(s)b(s)ds}{1-\lambda}, \quad (11)$$

при $x(t)=x^*(t)$, $y=y^*$.

Вибираючи початкове наближення так, щоб справджувалась рівність (11) при $x(t)=x_0(t)$, $y=y_0$, можна довести, що для $x(t)=x_{n+1}(t)$, $y=y_{n+1}$ виконується рівність (11). Дійсно, з (7), (8) отримаємо

$$\int_a^b\varphi(s)x_{n+1}(s)ds+y_{n+1}=$$

$$=\int_a^b\varphi(t)\int_a^b\Big[G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1^{'}(s)-$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Big]x_n(s)dsdt+$$

$$+\int_a^b\varphi(t)a^{(n)}(t)(y_n-y_{n+1})dt+\int_a^b\varphi(t)b(t)dt+$$

$$+\int\limits_a^b \alpha(s)x_n(s)ds+\alpha_0^{(n)}(y_n-y_{n+1})+\lambda y_{n+1}=$$

$$=\int\limits_a^b x_n(t)\biggl(\int\limits_a^b\Bigl[G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1'(s)-$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Bigr]\varphi(s)ds+\alpha(t)\biggr)dt+$$

$$+(y_n-y_{n+1})\biggl(\int\limits_a^b\varphi(t)a^{(n)}(t)dt+\alpha_0^{(n)}\biggr)+$$

$$+\int\limits_a^b\varphi(t)b(t)dt+\lambda y_{n+1}=$$

$$\lambda\biggl(\int\limits_a^b\varphi(s)x_{n+1}(s)ds+y_{n+1}\biggr)+\int\limits_a^b\varphi(t)b(t)dt.$$

Припустивши, що для n-го наближення рівність (11) справджується, отримаємо, що

$$\int\limits_a^b\varphi(s)x_{n+1}(s)ds+y_{n+1}=\lambda\frac{\int\limits_a^b\varphi(s)b(s)ds}{1-\lambda}+$$

$$+\int\limits_a^b\varphi(s)b(s)ds=\frac{\int\limits_a^b\varphi(s)b(s)ds}{1-\lambda}.$$

Отже, для $x(t)=x_{n+1}(t)$, $y=y_{n+1}$ маємо рівність (11).

Оцінюючи збіжність ітерацій (7), (8) для системи (4), (5), отримаємо

$$y_{n+1}-y^*=\frac{1}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}\int\limits_a^b\alpha(s)(x_n(s)-x^*(s))ds+$$

$$+\frac{1}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}(y_{n+1}-y^*).$$

Враховуючи те, що для $\{x^*(t),y^*\}$ та $\{x_n(t),y_n\}$ справджується рівність (11), одержимо

$$y_n-y^*=-\int\limits_a^b\varphi(t)(x_n(t)-x^*(t))dt.$$

Отже,

$$y_{n+1}-y^*=$$

$$=\frac{1}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}\int\limits_a^b(\alpha(s)-\alpha_0^{(n)}\varphi(s))\times$$

$$\times(x_n(s)-x^*(s))ds, \tag{12}$$

$$x_{n+1}(t)-x^*(t)=$$

$$=\int\limits_a^b\biggl(\Bigl[G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1'(s)-$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Bigr]-$$

$$-\frac{a^{(n)}(t)(\alpha(s)+(1-\lambda)\varphi(s))}{1-\lambda+\alpha_0^{(n)}}\biggr)\times$$

$$\times(x_n(t)-x^*(t))ds.$$

Нехай

$$\int\limits_a^b|\varphi(s)|ds=1,$$

$$\int\limits_a^b|\varphi(s)x_n(s)|ds\le c_0(b-a),$$

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b\Bigl|G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1'(s)-$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Bigr||\varphi(s)|dsdt\le c_1(b-a)^2,$$

$$\int\limits_a^b\int\limits_a^b\Bigl|G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1'(s)-$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Bigr||\varphi(s)||\varphi(t)|dsdt\le c_2(b-a)^2,$$

$$\int\limits_a^b\Bigl|G_0(t,s)q_1(s)-G_0(t,s)p_1'(s)-$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Bigg|ds \le g_1(t)(b-a),$$

$$\int\limits_a^b \Bigg|G_0(t,s)q_1(s) - G_0(t,s)p_1'(s) -$$

$$-\frac{dG_0(t,s)}{ds}p_1(s)\Bigg||\varphi(s)|ds \le g_2(t)(b-a).$$

Звідси

$$|x_{n+1}(t) - x^*(t)| \le (b-a)\Bigg(g_1(t) +$$

$$+\frac{c_0 g_2(t)(b-a)^2}{c_0 - c_2(b-a)}(1-c_1)(b-a)\Bigg)\times$$

$$\times \int\limits_a^b |x_n(s) - x^*(s)|ds,$$

$$|y_{n+1} - y^*| \le \frac{c_0(c_2(b-a)+c_1)(b-a)}{c_0 - c_2(b-a)}\times$$

$$\times \int\limits_a^b |x_n(s) - x^*(s)|ds.$$

Нерівність

$$q = (b-a)\Bigg(g_1(t) + \frac{c_0 g_2(t)(b-a)^2}{c_0 - c_2(b-a)}\times$$

$$\times(1-c_1)(b-a)\Bigg) < 1$$

забезпечує збіжність ітерацій (7), (8) із швидкістю геометричної прогресії зі знаменником q.

Отримані результати можна поширити на випадок кратного агрегування. Ці результати є новими як для однопараметричного випадку, так і для кратного різновиду багатопараметричного агрегування.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы: метод положительных операторов.— М.: Наука, 1985.— 256 с.

2. *Шувар Б.А.* Обобщение метода итеративного агрегирования. Львов. политехн. ин-т.— Львов, 1992.— 21 с.— Деп. в УкрНИИНТИ 15.01.92 N 43-Ук92.

3. *Гук В.М., Костишин Л.П.* Кратні різновиди багатопараметричних агрегативно-ітераційних методів для систем лінійних алгебраїчних рівнянь // Вісник Націон. ун-ту "Львівська політехніка". Прикладна математика.— 2000.— N 411.— С.99—101.

Стаття надійшла до редколегії 28.11.2001