УДК 517.929

©2002 р. І.І. Клевчук

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

ІНТЕГРАЛЬНІ МНОЖИНИ ТА ПРИНЦИП ЗВЕДЕННЯ ДЛЯ ІМПУЛЬСНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Розглядається система нелінійних імпульсних диференціально- функціональних рівнянь. Доведено існування інтегральних множин та принцип зведення для дослідження стійкості в критичному випадку. Показано, що лінійну систему можна розщепити на дві незалежні системи.

We consider a system of nonlinear impulsive functional differential equations. We prove the existence of integral sets and reduction principle for investigation of stability in the critical case. It is shown that the linear system can be decomposed into two independent systems.

Для звичайних диференціальних рівнянь питання існування і стійкості інтегральних множин в критичному випадку розглядалися в працях [1,2], для диференціальних рівнянь з імпульсною дією – в [3,4], а для диференціально-функціональних рівнянь – в [5,6]. У цій статті досліджується стійкість тривіального розв'язку неавтономної імпульсної системи диференціально-функціональних рівнянь в критичному випадку.

Розглянемо систему

$$\frac{dx}{dt} = L(x_t) + f(t, x_t, y), \quad \frac{dy}{dt} = By+$$
$$+g(t, x_t, y), \quad t \neq t_i, \tag{1}$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = Ax + I_i(x_{t_i}, y), \quad \Delta y|_{t=t_i} = J_i(x_{t_i}, y),$$

де $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^q$, $y \in \mathbb{R}^p$, x_t – елемент простору $\mathbf{PC} = \mathbf{PC}([-\tau, 0], \mathbb{R}^q)=\{\varphi : [-\tau, 0] \to \mathbb{R}^q$, $\varphi(t)$ неперервна на $[-\tau, 0]$, за винятком скінченного числа точок $\tilde{t}$, в яких $\varphi(\tilde{t}^+)$ та $\varphi(\tilde{t}^-)$ існують, причому $\varphi(\tilde{t}^-) = \varphi(\tilde{t})\}$, заданий функцією $x_t(\theta) = x(t+\theta)$, $-\tau \leq \theta \leq 0$; $L(x_t)$ – лінійний неперервний функціонал, заданий в $\mathbf{PC}$; матриця $E + A$ – невироджена; B – стала квадратна матриця порядку p така, що

$$Re\lambda_j(B) = 0, \quad j = 1, 2, ..., p. \tag{2}$$

Через t_i тут позначені моменти часу імпульсної дії, занумеровані множиною цілих чисел $\mathbb{Z}$, причому припускається, що існує таке додатне число δ, при якому

$$0 < \delta < t_{i+1} - t_i \tag{3}$$

для всіх $i \in \mathbb{Z}$. Для $\varphi \in \mathbf{PC}$ визначимо норму $|\varphi| = \sup_{-\tau \leq s \leq 0} |\varphi(s)|$, а для пари $z = (\varphi, y)$, $\varphi \in \mathbf{PC}$, $y \in \mathbb{R}^p$, визначимо норму $|z| = |\varphi| + |y|$.

Відносно функціоналів $f(t, \varphi, y)$, $g(t, \varphi, y)$, $I_i(\varphi, y)$, $J_i(\varphi, y)$ припускається, що вони визначені для всіх $t \in \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathbf{PC}$, $y \in \mathbb{R}^p$, неперервні за всіма змінними і задовольняють умови

$$f(t, 0, 0) = g(t, 0, 0) = I_i(0, 0) = J_i(0, 0) = 0,$$
$$|f(t, \varphi, y) - f(t, \varphi', y')| + |g(t, \varphi, y) - g(t, \varphi', y')| +$$
$$+|I_i(\varphi, y) - I_i(\varphi', y')| + |J_i(\varphi, y) - \tag{4}$$
$$-J_i(\varphi', y')| \leq \nu(|\varphi - \varphi'| + |y - y'|)$$

при всіх $t \in \mathbb{R}$, $i \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbf{PC}$, $\varphi' \in \mathbf{PC}$, $y \in \mathbb{R}^p$, $y' \in \mathbb{R}^p$.

Припустимо, що

$$L(x_t) = A_0 x(t) + \sum_{i=1}^{l} A_i x(t - \tau_i), f(t, x_t, y) =$$
$$= f_1(t, x(t), x(t - \tau_1), ..., x(t - \tau_l), y),$$
$$g(t, x_t, y) = g_1(t, x(t), x(t - \tau_1), ..., x(t - \tau_l), y),$$
$$I_i(x_t, y) = I_i^{(1)}(x(t), x(t - \tau_1), ..., x(t - \tau_l), y),$$
$$J_i(x_t, y) = J_i^{(1)}(x(t), x(t - \tau_1), ..., x(t - \tau_l), y),$$

де $0 < \tau_1 < ... < \tau_l = \tau$.

Права частина системи (1) на кожному скінченному інтервалі може мати не більше, ніж скінченне число точок разриву першого роду (точок, в яких $t = t_i$ або $t - \tau_k = t_i$, $k = 1, ..., l$, $i \in \mathbb{Z}$). За допомогою методу кроків можна показати, що на кожному скінченному відрізку $[\sigma, T]$, $\sigma < T$, система (1) з початковою функцією $x_\sigma = \varphi \in \mathbf{PC}$ і початковим значенням $y(\sigma) = y_0$ має єдиний розв'язок, який неперервний на $[\sigma, T]$ за винятком точок разриву першого роду $t = t_i$ і неперервно диференційовний за винятком скінченного числа точок. В точках вигляду $t = t_i$ і $t = t_i + \tau_k$ під dx/dt і dy/dt будемо розуміти похідні зліва.

Питанням існування, єдиності та стійкості розв'язку основної початкової задачі для імпульсних диференціально-функціональних рівнянь присвячені праці [7, 8] та ін.

Нехай $T(t, s)$ – оператор зсуву за розв'язками лінійної системи

$$\frac{dx}{dt} = L(x_t), \quad t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = Ax. \qquad (5)$$

Рівняння для x в системі (1) еквівалентні рівнянню

$$x(t) = \bar{x}(t, x_\sigma) + \int_\sigma^t X(t, s) f(s, x_s, y(s)) ds +$$

$$+ \sum_{\sigma < t_i < t} X(t, t_i) I_i(x_{t_i}, y(t_i)),$$

де $\bar{x}(t, x_\sigma)$ – розв'язок системи (5) з початковою функцією x_σ, а $X(t, s)$ – фундаментальна матриця системи (5).

Враховуючи, що $X(t, s) = 0$ при $s > t$, а також співвідношення $X(t + \theta, s) = T(t, s) X_0(\theta)$, одержимо, що система (1) еквівалентна системі

$$x_t = T(t, \sigma) x_\sigma + \int_\sigma^t T(t, s) X_0 f(s, x_s, y(s)) ds +$$

$$+ \sum_{\sigma < t_i < t} T(t, t_i) X_0 I_i(x_{t_i}, y(t_i)), \quad \frac{dy}{dt} = By +$$

$$+ g(t, x_t, y), \quad t \neq t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = J_i(x_{t_i}, y), \qquad (6)$$

де $X_0(\theta) = 0$, $-\tau \leq \theta < 0$, $X_0(0) = E$.

Припустимо, що справджуються нерівності

$$|T(t, s)\varphi| \leq K |\varphi| exp[-(\alpha + \beta)(t - s)],$$

$$|T(t, s) X_0| \leq K exp[-(\alpha + \beta)(t - s)], \qquad (7)$$

де $K > 0$, $t \geq s$, $0 < \beta < \alpha$, $\varphi \in \mathbf{PC}$.

Згідно з припущенням відносно власних значень матриці B правильна також оцінка

$$|\exp(Bt)| \leq K \exp[(-\alpha + \beta)t], \quad t \leq 0. \qquad (8)$$

Теорема 1. *Нехай для системи (1) виконуються умови (2) – (4), (7), (8). Тоді при досить малій сталій Ліпшиця ν система (1) має інтегральну множину* $S^- = \{(t, \varphi, y) : t \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}^p, \varphi = h(t, y), \varphi \in \mathbf{PC}\}$, *де функція $h(t, y)$ задовольняє умови*

$$h(t, 0) = 0, \quad |h(t, y) - h(t, y')| \leq 0,5 |y - y'|. \qquad (9)$$

Для кожного розв'язку $z_t = (h(t, y(t)), y(t))$ *системи (1), що належить S^-, справджується оцінка*

$$|z_t| \leq 2K |y(\sigma)| exp[-\alpha(t - \sigma)], \quad t \leq \sigma. \qquad (10)$$

Доведення. Поряд із системою (6) розглянемо систему інтегральних рівнянь

$$x_t = \int_{-\infty}^t T(t, s) X_0 f(s, x_s, y(s)) ds +$$

$$+ \sum_{t_i < t} T(t, t_i) X_0 I_i(x_{t_i}, y(t_i)),$$

$$y(t) = e^{B(t-\sigma)} c - \int_t^\sigma e^{B(t-s)} g(s, x_s, y(s)) ds -$$

$$- \sum_{t < t_i < \sigma} e^{B(t - t_i)} J_i(x_{t_i}, y(t_i)), \quad t \leq \sigma. \qquad (11)$$

Будемо розв'язувати систему (11) методом послідовних наближень, вважаючи $x_t^{(0)} = 0$, $y_0(t) = 0$,

$$x_t^{(n+1)} = \int_{-\infty}^t T(t, s) X_0 f(s, x_s^{(n)}, y_n(s)) ds +$$

$$+\sum_{t_i<t} T(t,t_i)X_0 I_i(x_{t_i}^{(n)}, y_n(t_i)), \quad y_{n+1}(t) =$$

$$= e^{B(t-\sigma)}c - \int_t^{\sigma} e^{B(t-s)} g(s, x_s^{(n)}, y_n(s))ds -$$

$$-\sum_{t<t_i<\sigma} e^{B(t-t_i)} J_i(x_{t_i}^{(n)}, y_n(t_i)), \quad n = 0,1,...$$

Індукцією доведемо нерівність

$$|z_t^{(m)} - z_t^{(m-1)}| \le K|c|(\nu\gamma)^{m-1} exp[-\alpha(t-\sigma)], \tag{12}$$

де $z_t^{(m)} = (x_t^{(m)}, y_m(t))$, $\gamma = 2K(1/\beta + 1/(1 - exp(-\beta\delta)))$, $m = 1,2,...,t \le \sigma$. При $m = 1$ нерівність (12) випливає із (8). Нехай нерівність (12) справджується при $m = n$. Тоді, враховуючи (4), (7), (8), одержимо

$$|z_t^{(n+1)} - z_t^{(n)}| = |x_t^{(n+1)} - x_t^{(n)}| + |y_{n+1}(t) -$$

$$-y_n(t)| \le \int_{-\infty}^{t} K exp[-(\alpha+\beta)(t-s)]\nu|z_s^{(n)} -$$

$$-z_s^{(n-1)}|ds + \int_t^{\sigma} K exp[(-\alpha+\beta)(t-s)]\nu|z_s^{(n)} -$$

$$-z_s^{(n-1)}|ds + \sum_{t_i<t} K exp[-(\alpha+\beta)(t-t_i)] \times$$

$$\times \nu|z_{t_i}^{(n)} - z_{t_i}^{(n-1)}| + \sum_{t<t_i<\sigma} K exp[(-\alpha+\beta)(t-t_i)] \times$$

$$\times \nu|z_{t_i}^{(n)} - z_{t_i}^{(n-1)}| \le K|c|(\nu\gamma)^n exp[-\alpha(t-\sigma)],$$

звідки випливає нерівність (12) при $m = n+1$. Отже, вона справджується при всіх натуральних m.

Із (12) випливає, що при $\nu\gamma < 1$ послідовність функцій $z_t^{(n)}$ збігається до деякої функції $z_t(\sigma, c)$, яка є розв'язком системи (11). Оскільки всі функції $x_t^{(n)}$, $n = 0,1,2,...$, належать простору **PC**, то і їх границя належить **PC**. Вибираючи в системі (11) замість c іншу сталу c', одержимо розв'язок $z_t(\sigma, c')$. Аналогічно нерівності (12) можна довести, що при $\nu\gamma < 0,5$ правильна нерівність $|z_t^{(m)}(\sigma,c) - z_t^{(m)}(\sigma,c')| \le 2K|c - c'|exp[-\alpha(t-\sigma)]$, $m = 1,2,...$, $t \le \sigma$. Отже,

$$|z_t(\sigma,c) - z_t(\sigma,c')| \le 2K|c-c'|exp[-\alpha(t-\sigma)],$$

$$t \le \sigma. \tag{13}$$

Будемо вважати в (11) $t = \sigma$ і позначимо

$$h(\sigma, c) = \int_{-\infty}^{\sigma} T(\sigma,s)X_0 f(s, x_s, y(s))ds +$$

$$+\sum_{t_i<\sigma} T(\sigma,t_i)X_0 I_i(x_{t_i}, y(t_i)).$$

Доведемо оцінку (9):

$$|h(\sigma,c) - h(\sigma,c')| \le \int_{-\infty}^{\sigma} K exp[-(\alpha+\beta)(\sigma-s)] \times$$

$$\times \nu|z_s(\sigma,c) - z_s(\sigma,c')|ds + \sum_{t_i<\sigma} K exp[-(\alpha +$$

$$+\beta)(\sigma - t_i)]\nu|z_{t_i}(\sigma,c) - z_{t_i}(\sigma,c')| \le \gamma_1|c-c'|,$$

$$\gamma_1 = 2K^2\nu(1/\beta + 1/(1-exp(-\beta\delta))).$$

Оскільки при досить малому ν маємо $\gamma_1 \le 0,5$, то звідси випливає нерівність (9). Оцінка (10) випливає із (13), якщо вважати $c' = 0$. Теорему доведено.

Теорема 2. *Нехай для системи (1) виконуються умови (2)-(4), (7), (8). Тоді при досить малій сталій Ліпшиця ν система (1) має інтегральну множину $S^+ = \{(t,\varphi,y) : t \in \mathbb{R}, \varphi \in$ **PC**$, y = r(t,\varphi), y \in \mathbb{R}^p\}$, де функція $r(t,\varphi)$ задовольняє умови $r(t,0) = 0$, $|r(t,\varphi) - r(t,\varphi')| \le 0,5|\varphi - \varphi'|$. Для кожного розв'язку $z_t = (x_t, r(t,x_t))$ системи (1), що належить S^+, справджується оцінка $|z_t| \le 2K|x_\sigma|exp[-\alpha(t-\sigma)]$, $t \ge \sigma$.*

Теорема 2 доводиться аналогічно теоремі 1.

Розглянемо тепер систему

$$\frac{dw}{dt} = Bw + g(t, h(t,w), w), \quad t \ne t_i,$$

$$\Delta w|_{t=t_i} = J_i(h(t_i,w), w), \tag{14}$$

яка описує поведінку розв'язків системи (1) на інтегральній множині $x_t = h(t,y)$.

Теорема 3. *Нехай виконуються умови теорем 1 і 2. Якщо $z_t = (x_t, y(t))$ $(t \ge \sigma)$ –*

довільний розв'язок системи (1) з початковою функцією z_σ при $t=\sigma$, то існує розв'язок $\xi_t=(h(t,w(t)),w(t))$, що належить S^- і такий, що справджується оцінка

$$|z_t-\xi_t|\le 2K|x_\sigma-h(\sigma,w(\sigma))|exp[-\alpha(t-\sigma)],$$
$$t\ge\sigma. \tag{15}$$

Доведення. Позначимо через $w(t)$ розв'язок системи (14) з початковою умовою $w(\sigma)=a$. Тоді ξ_t буде залежати від a і визначатися початковою функцією $\xi_\sigma=(h(\sigma,a),a)$. Заміною змінних $v_t=x_t-h(t,w(t))$, $u(t)=y(t)-w(t)$ систему (6) зведемо до вигляду

$$v_t=T(t,\sigma)v_\sigma+\int\limits_\sigma^t T(t,s)X_0[f(s,\eta_s+\xi_s)-$$
$$-f(s,\xi_s)]ds+\sum_{\sigma<t_i<t}T(t,t_i)X_0[I_i(\eta_{t_i}+\xi_{t_i})- \tag{16}$$
$$-I_i(\xi_{t_i})],\quad \frac{du}{dt}=Bu+g(t,\eta_t+\xi_t)-g(t,\xi_t),$$
$$t\ne t_i,\quad \Delta u|_{t=t_i}=J_i(\eta_{t_i}+\xi_{t_i})-J_i(\xi_{t_i}),$$

де $\eta_t=(v_t,u(t))$. Функції $f(t,\eta+\xi)-f(t,\xi)$, $g(t,\eta+\xi)-g(t,\xi)$, $I_i(\eta+\xi)-I_i(\xi)$, $J_i(\eta+\xi)-J_i(\xi)$ задовольняють за змінною η умову Ліпшиця з сталою ν.

Згідно з теоремою 2 система (16) має інтегральну множину S^+, яку можна зобразити у вигляді $u=r(t,v_t,a)$, де функція r задовольняє умови

$$r(t,0,a)=0,\quad |r(t,\zeta,a)-r(t,\zeta',a)|\le$$
$$\le 0,5|\zeta-\zeta'|. \tag{17}$$

Для кожного розв'язку $\eta_t=(v_t,u(t))$ системи (16) з початковими даними $v_\sigma=\zeta$, $u(\sigma)=r(\sigma,\zeta,a)$, $\zeta\in\mathbf{PC}$ правильна нерівність $|\eta_t|\le 2K|v_\sigma|exp[-\alpha(t-\sigma)]$, $t\ge\sigma$.

Доведемо тепер існування таких ζ і a, що для розв'язку $z_t=(x_t,y(t))$ системи (1) і розв'язку $\eta_t=(v_t,u(t))$ системи (16) при всіх $t\ge\sigma$ виконуються рівності

$$u(t)=y(t)-w(t),\quad v_t=x_t-h(t,w(t)), \tag{18}$$

звідки й буде випливати оцінка (15).

Згідно з теоремою єдиності, якщо рівності (18) виконуються при $t=\sigma$, то вони виконуються і при всіх $t\ge\sigma$. При $t=\sigma$ ці рівності мають вигляд

$$r(\sigma,\zeta,a)=y(\sigma)-a,\quad \zeta=x_\sigma-h(\sigma,a). \tag{19}$$

Будемо розглядати (19) як систему рівнянь відносно ζ і a, маємо

$$a=y(\sigma)-r(\sigma,x_\sigma-h(\sigma,a),a). \tag{20}$$

Покажемо, що це рівняння має розв'язок при довільних $y(\sigma)$ і x_σ. Розглянемо відображення $q(a)=y(\sigma)-r(\sigma,x_\sigma-h(\sigma,a),a)$. Використовуючи властивості (17) функції r, знаходимо оцінку $|q(a)-y(\sigma)|\le 0,5|x_\sigma-h(\sigma,a)|$, звідки $|q(a)-y(\sigma)|\le 0,5|x_\sigma-h(\sigma,y(\sigma))|+0,5|h(\sigma,y(\sigma))-h(\sigma,a)|$. Враховуючи умову (9), одержимо $|q(a)-y(\sigma)|\le 0,5|x_\sigma-h(\sigma,y(\sigma))|+0,25|y(\sigma)-a|$.

Розглянемо в p – вимірному просторі кулю H, що визначається нерівністю (відносно a) $|a-y(\sigma)|\le|x_\sigma-h(\sigma,y(\sigma))|$. Із нерівності

$$|q(a)-y(\sigma)|\le 0,75|x_\sigma-h(\sigma,y(\sigma))| \tag{21}$$

випливає, що відображення $q(a)$ переводить кулю H в себе, тому згідно з теоремою Брауера це відображення має нерухому точку a^*.

Отже, рівняння (20) має розв'язок $a=a^*$, для якого згідно з (21) виконується оцінка

$$|a^*-y(\sigma)|\le 0,75|x_\sigma-h(\sigma,y(\sigma))|. \tag{22}$$

Підставляючи розв'язок a^* у друге рівняння (19), переконуємося, що пара a^*, ζ^*, де $\zeta^*=x_\sigma-h(\sigma,a^*)$, задовольняє систему (19). Теорему доведено.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теорем 1 і 2. Якщо нульовий розв'язок системи (14) стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий, то і нульовий розв'язок системи (1) відповідно стійкий, асимптотично стійкий або нестійкий.*

Доведення. Нехай нульовий розв'язок системи (14) стійкий. Возьмемо довільне $\varepsilon>0$. Згідно з означенням стійкості знайдеться

$\delta > 0$ таке, що якщо $|a| < \delta$, то розв'язок $w(t)$ системи (14) з початковою умовою $w(\sigma) = a$ при $t \geq \sigma$ задовольняє нерівність $|w(t)| \leq \varepsilon/(2K + 1,5)$.

Розглянемо розв'язок $z_t = (x_t, y(t))$ системи (1) з початковою функцією $z_\sigma = (x_\sigma, y(\sigma))$, що задовольняє оцінку $|x_\sigma| + |y(\sigma)| < \delta/2$. Із оцінки (22) випливає нерівність $|a^*| < \delta$, а із нерівності (15) випливає, що $|z_t| < \varepsilon$. Це і доводить стійкість нульового розв'язку системи (1).

Завершується доведення теореми аналогічно [6].

Нехай система (1) є лінійною, тобто функціонали $I_i(\varphi, y)$, $J_i(\varphi, y)$, $f(t, \varphi, y)$, $g(t, \varphi, y)$ лінійні відносно φ, y. У цьому випадку функція $h(t, w)$ і функціонал $r(t, \varphi)$ також є лінійними.

Розглянемо систему

$$v_t = T(t,\sigma)v_\sigma + \int_\sigma^t T(t,s)X_0 f(s, v_s, r(s, v_s))ds +$$
$$+ \sum_{\sigma < t_i < t} T(t, t_i) X_0 I_i(v_{t_i}, r(t_i, v_{t_i})),$$
$$\frac{dw}{dt} = Bw + g(t, h(t,w), w), \quad t \neq t_i, \quad (23)$$
$$\Delta w|_{t=t_i} = J_i(h(t_i, w), w),$$

де $w \in \mathbb{R}^p$, $v_t \in \mathbf{PC}$.

Функція $h(t, w)$ та функціонал $r(t, v_t)$ задовольняють систему

$$h(t, w(t)) = T(t,\sigma)h(\sigma, w(\sigma)) + \int_\sigma^t T(t,s)X_0 \times$$
$$\times f(s, h(s, w(s)), w(s))ds + \sum_{\sigma < t_i < t} T(t, t_i) X_0 \times$$
$$\times I_i(h(t_i, w(t_i)), w(t_i)), \quad \frac{dr(t, v_t)}{dt} = \quad (24)$$
$$= Br(t, v_t) + g(t, v_t, r(t, v_t)), \quad t \neq t_i,$$
$$\Delta r(t, v_t)|_{t=t_i} = J_i(v_{t_i}, r(t_i, v_{t_i})).$$

Додаючи рівності (23), (24) і виконуючи заміну

$$y_t = v_t + h(t, w), \quad x = w + r(t, v_t), \quad (25)$$

одержимо систему (6).

Отже, правильне наступне твердження.

Теорема 5. *За допомогою заміни (25) лінійна система (23) зводиться до вигляду (6).*

На підставі лінійності $h(t, w)$ і $r(t, \varphi)$ система (25) однозначно розв'язна відносно w та v_t. Отже, визначаючи із (25) w та v_t, знаходимо заміну, яка розщеплює лінійну систему (6) на дві незалежні системи (23).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 502 с.
2. *Плисс В.А.* Интегральные множества периодических систем дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1977. – 304 с.
3. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – К.: Выща школа, 1987. – 287 с.
4. *Черникова О.С.* Принцип сведения для систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием// Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 5. – С. 601 - 607.
5. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
6. *Фодчук В.И., Клевчук И.И.* Интегральные множества и принцип сведения для дифференциально-функциональных уравнений// Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 3. – С. 334 - 340.
7. *Shen J.H.* Existence and uniqueness of solutions for impulsive functional differential equations on the PC space with applications// Acta. Sci. Nat. Uni. Norm. Hunan. – 1996. – **24**. – P. 285 - 291.
8. *Shen J.H., Yan J.* Razumikhin type stability theorems for impulsive functional differential equations// Nonlinear Analysis. – 1998. – **33**, № 5. – P. 519 - 531.

Стаття надійшла до редколегії 29.11.2001