

**ОДНОВИМІРНІ ПРОЦЕСИ ДИФУЗІЇ В ОБМЕЖЕНИХ ОБЛАСТЯХ З
КРАЙОВИМИ УМОВАМИ ТА УМОВОЮ СПРЯЖЕННЯ ТИПУ
ФЕЛЛЕРА-ВЕНТЦЕЛЯ**

Використовуючи аналітичний метод, знайдено інтегральне зображення двопараметричної напівгрупи операторів, яка описує неоднорідний процес Феллера на відрізку, поведінка якого в точках межі, а також в деякій внутрішній точці визначається крайовими умовами та умовою спряження типу Феллера-Вентцеля відповідно.

Using an analytic method we obtain an integral representation of the two-parameter operator semigroup associated with the inhomogeneous Feller process on a closed interval whose behavior at the points of boundary as well as at some interior point is determined by the boundary conditions and the conjugation condition of Feller-Wentzell's type, respectively.

Загальний вигляд крайових умов для одновимірних дифузійних процесів було встановлено у роботах В. Феллера [1] і А.Д. Вентцеля [2] (див. також [3], де розглядався багатовимірний випадок). Там доведено твердження, з яких випливає, що якщо $\{T_t, t \geq 0\}$ — феллерівська напівгрупа в $C[r_1, r_2]$, $-\infty < r_1 < r_2 < \infty$) і її генератор A є звуженням $(L, C^2[r_1, r_2])$, де L — еліптичний диференціальний оператор другого порядку, то функції з $D(A) \subset C^2[r_1, r_2]$ мають задовольняти крайові умови, які, взагалі кажучи, мають нелокальний характер.

Дослідженню питання побудови марковських процесів з крайовими умовами Феллера-Вентцеля присвячено багато робіт (див., наприклад, різні підходи в [1],[2],[4]-[8], а також посилання в них).

Відомо (див., наприклад, [9]-[14]), що узагальненням описаної нами проблеми є так звана задача про склеювання двох дифузійних процесів, яка є об'єктом дослідження також і в даній статті. У розглянутому нами випадку ставиться питання про побудову напівгрупи Феллера, якій відповідає неоднорідний марковський процес (не обов'язково неперервний) на відрізку $[r_1, r_2]$ такий, що його частини у внутрішніх точках відповідних проміжків даного відрізка, розділених між собою деякою фіксованою точкою $r \in (r_1, r_2)$, збігаються із заданими там не-

однорідними дифузійними процесами, а поведінка шуканого процесу в точках r_1, r_2 та r описується заданими в них крайовими умовами та умовою спряження типу Феллера-Вентцеля відповідно. Ще одна умова спряження, яка задається в точці r , є відображенням властивості феллеровості шуканого процесу. Для розв'язання даної задачі в роботі застосовано аналітичний метод. За такого підходу питання про існування потрібної напівгрупи практично зводиться до дослідження відповідної задачі спряження для лінійного параболічного рівняння другого порядку з розривними коефіцієнтами. Класичну розв'язність останньої задачі встановлено нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайних параболічних потенціалів простого шару. Мабуть, у запропонованій тут постановці задача про склеювання дифузійних процесів, а також відповідна їй параболічна задача спряження розглядаються вперше. Зауважимо, що у відзначених нами працях [9], [11]-[14] задача про склеювання двох одновимірних дифузійних процесів (як однорідних так і неоднорідних) з різними варіантами загальної умови спряження типу Феллера-Вентцеля розглядалася в припущенні, коли проміжки, в яких задаються склеювані дифузійні процеси, є півпрямими. Що стосується праці [10], в якій за аналогією з працями [1], [2] було

встановлено загальний вигляд умови спряження в точці склеювання дифузійних процесів, то там деякі з досліджуваних нами питань вивчалися за допомогою методів теорії напівгруп і функціонального аналізу.

1. Постановка задачі. Нехай $C(\overline{D})$ — банахів простір неперервних функцій на відрізку $\overline{D} = [r_1, r_2]$. Позначимо через D_i , $i = 1, 2$, два інтервали (r_1, r) і (r, r_2) відповідно, де $-\infty < r_1 < r < r_2 < \infty$, а через φ_i — звуження будь-якої функції φ заданої на \overline{D} на замикання \overline{D}_i .

Припустимо, що в D_i задано неоднорідний дифузійний процес, який визначається диференціальним оператором другого порядку $A_s^{(i)}$, $s \in [0, T]$ ($T > 0$ — фіксоване), що діє на множині $C^2(\overline{D}_i)$, $i = 1, 2$:

$$A_s^{(i)}\varphi_i(x) = \frac{1}{2}b_i(s, x)\frac{d^2\varphi_i(x)}{dx^2} + a_i(s, x)\frac{d\varphi_i(x)}{dx},$$

де коефіцієнти дифузії $b_i(s, x)$ і коефіцієнти переносу $a_i(s, x)$ задовольняють такі умови:

- 1) існують сталі b і B такі що $0 < b \leq b_i(s, x) \leq B$ для всіх $(s, x) \in [0, T] \times \overline{D}_i$;
- 2) для всіх $s, t \in [0, T]$, $x, y \in \overline{D}_i$ виконуються нерівності

$$|b_i(t, x) - b_i(s, y)| \leq c(|t - s|^{\frac{\alpha}{2}} + |x - y|^\alpha),$$

$$|a_i(t, x) - a_i(s, y)| \leq c(|t - s|^{\frac{\alpha}{2}} + |x - y|^\alpha),$$
 де c і α додатні сталі, $0 < \alpha < 1$.

Розглянемо диференціальний оператор \tilde{A}_s , $s \in [0, T]$, який діє на множині $\vartheta(\tilde{A}_s) = \{\varphi \in C(\overline{D}) : \varphi_i \in \vartheta(A_s^{(i)}), i = 1, 2, A_s^{(1)}\varphi(r) = A_s^{(2)}\varphi(r)\}$ за таким правилом:

$$\tilde{A}_s\varphi(x) = \begin{cases} A_s^{(1)}\varphi_1(x), & x \in \overline{D}_1, \\ A_s^{(2)}\varphi_2(x), & x \in \overline{D}_2. \end{cases}$$

Припустимо також, що в точках r , r_i , $i = 1, 2$, задано оператор спряження L_s та два крайові оператори $L_s^{(i)}$ типу Феллера-Вентцеля, які при дії на функцію $\varphi \in C(\overline{D})$

визначаються рівностями

$$L_s\varphi(r) = \tilde{A}_s\varphi(r) + q_1(s)\varphi'(r-) - q_2(s) \times \varphi'(r+) + \int_{D_1 \cup D_2} [\varphi(r) - \varphi(y)]\mu(s, dy), \quad (1)$$

$$L_s^{(1)}\varphi(r_1) = -\varphi'(r_1) + \int_{D_1} [\varphi(r_1) - \varphi(y)]\pi_1(s, dy), \quad (2)$$

$$L_s^{(2)}\varphi(r_2) = \int_{D_2} [\varphi(r_2) - \varphi(y)]\pi_2(s, dy), \quad (3)$$

де функції q_1 , q_2 та міри μ , π_1 , π_2 задовольняють наступні умови:

- а) функції $q_1(s)$, $q_2(s)$ невід'ємні та неперервні на відрізку $[0, T]$, до того ж $q_1(s) + q_2(s) > 0$ для всіх $s \in [0, T]$;
- б) $\mu(s, \cdot)$, $\pi_i(s, \cdot)$ — невід'ємні міри на $D_1 \cup D_2$, D_i відповідно. При цьому для всіх обмежених вимірних на \overline{D} функцій f інтеграли $\int_{D_1 \cup D_2} |y - r|f(y)\mu(s, dy)$ та $\int_{D_2} f(y)\pi_2(s, dy)$ неперервні в розумінні Гельдера як функції змінної $s \in [0, T]$ з показниками $\frac{\alpha}{2}$ та $\frac{1+\alpha}{2}$ відповідно, а інтеграл $\int_{D_1} |y - r_1|f(y)\pi_1(s, dy)$ неперервний на відрізку $[0, T]$;
- в) $\pi_2(s, D_2) = 1$ для всіх $s \in [0, T]$.

Відомо, що крайові умови

$$L_s\varphi(r) = 0, \quad L_s^{(i)}\varphi(r_i) = 0, \quad i = 1, 2, \quad (4)$$

звужують диференціальний оператор \tilde{A}_s до інфінітезимального генератора деякої феллерівської напівгрупи на \overline{D} . З іншого боку умови в (4) визначають всеможливі типи поведінки дифундууючої частинки при її потраплянні в точки r , r_i , $i = 1, 2$, відповідно. В точці r такими типами поведінки є затримка, часткове відбиття і стрибок, в точці r_1 — часткове відбиття і стрибок, а в точці r_2 — лише стрибок.

Наша задача полягає в тому, щоб знайти інтегральне зображення двопараметричної феллерівської напівгрупи T_{st} , $0 \leq s < t \leq T$, генератор A_s якої є звуженням оператора \tilde{A}_s на множину всіх функцій $\varphi \in \vartheta(\tilde{A}_s)$, для яких виконуються співвідношення (4).

Дану задачу називають задачею про склеювання двох дифузійних процесів на відрізку ([9-14]). При її дослідженні ми використовуємо аналітичний метод. За такого підходу шукана напівгрупа операторів визначається за допомогою розв'язку наступної параболічної задачі спряження:

$$\frac{\partial u(s, x, t)}{\partial s} + A_s^{(i)} u(s, x, t) = 0, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x \in D_i, \quad (5)$$

$$\lim_{s \uparrow t} u(s, x, t) = \varphi(x), \quad x \in \bar{D}, \quad (6)$$

$$u(s, r-, t) = u(s, r+, t), \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad (7)$$

$$L_s u(s, r, t) = 0, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad (8)$$

$$L_s^{(i)} u(s, r_i, t) = 0, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad (9)$$

де $i = 1, 2$, $\varphi \in C(\bar{D})$ — задана функція.

Класичну розв'язність задачі (5)-(9) встановлено нами методом граничних інтегральних рівнянь з використанням звичайних потенціалів простого шару, побудованих за допомогою фундаментальних розв'язків рівномірно параболічних операторів $\frac{\partial}{\partial s} + A_s^{(i)}$.

Необхідно зауважити, що подібна задача розглядалася у роботі [13], в якій було побудовано процес Феллера на прямій, що є результатом склеювання двох неоднорідних дифузійних процесів заданих в областях $(-\infty, 0)$ і $(0, \infty)$ відповідно. Поведінка такого процесу в точці нуль описувалася загальною умовою спряження типу Феллера-Вентцеля.

2. Розв'язання задачі спряження. В цьому параграфі буде встановлено класичну розв'язність задачі (5)-(9). Під класичним розв'язком цієї задачі будемо розуміти той розв'язок, який при всіх $t \in (0, T]$ належить до класу

$$C^{1,2}([0, t) \times D_1 \cup D_2) \cap C([0, t] \times \bar{D}). \quad (10)$$

В першу чергу доведемо, що задача (5)-(9) не може мати більше одного класичного розв'язку. Нехай $u^{(1)}(s, x, t)$ та $u^{(2)}(s, x, t)$ — два розв'язки задачі (5)-(9) з класу (10). Тоді різниця $\omega(s, x, t) = u^{(1)}(s, x, t) - u^{(2)}(s, x, t)$

задовольняє рівняння (5), початкову умову

$$\lim_{s \uparrow t} \omega(s, x, t) = 0, \quad x \in \bar{D},$$

і крайові умови (7)-(9). Припустимо, що $\omega(s, x, t)$ набуває додатних значень в області $[0, t] \times \bar{D}$ і позначимо через ω_{max} її максимум в цій області. Тоді, згідно з принципом максимуму ([15, Гл. II]), значення ω_{max} досягається в деякій точці $(s_0, x_0) \in (0, t) \times \{r_1, r, r_2\}$. У випадку, коли $x_0 = r_1$ (тобто $\omega(s_0, r_1, t) = \omega_{max} > 0$) виконуються нерівності

$$\frac{\partial \omega(s_0, r_1, t)}{\partial x} \leq 0,$$

$$\int_{D_1} [\omega(s_0, r_1, t) - \omega(s_0, y, t)] \pi_1(s, dy) \geq 0.$$

(11)

Більше того, з теореми 14 у [15, стор. 69] випливає, що

$$\frac{\partial \omega(s_0, r_1, t)}{\partial x} < 0. \quad (12)$$

Співвідношення (11), (12) означають, що $L_{s_0}^{(1)} \omega(s_0, r_1, t) > 0$. Отже, ми отримали суперечність з (9). Використовуючи аналогічні міркування, у випадках, коли $x_0 = r$ та $x_0 = r_2$, ми також отримуємо суперечність. Отримана суперечність вказує на те, що $\omega(s, x, t) \leq 0$ при всіх $(s, x) \in [0, t] \times \bar{D}$. Аналогічно доводиться, що значення функції $\omega(s, x, t)$ в області $[0, t] \times \bar{D}$ не можуть бути від'ємними, і тому

$$\omega(s, x, t) \equiv 0.$$

Твердження про єдиність розв'язку задачі (5)-(9) дає нам змогу проводити всі наступні міркування у припущенні, що

- функції $a_i(s, x)$ та $b_i(s, x)$ визначені на $[0, T] \times \mathbb{R}$ і в цій області вони задовольняють властивості 1), 2);
- $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, де $C_b(\mathbb{R})$ — банахів простір обмежених і неперервних на \mathbb{R} функцій з нормою $\|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)|$.

Позначимо через $G_i(s, x, t, y)$, $i = 1, 2$, фундаментальний розв'язок рівняння (5) в області $[0, T] \times \mathbb{R}$. Нагадаємо, що функція $G_i(s, x, t, y)$ — невід'ємна, неперервно диференційовна по s , двічі неперервно диференційовна по x і для неї виконуються нерівності ([11, 15, 16])

$$|D_s^r D_x^p G_i(s, x, t, y)| \leq c(t-s)^{-\frac{1+2r+p}{2}} \times \exp \left\{ -h \frac{(y-x)^2}{t-s} \right\}, \quad (13)$$

якими б не були $0 \leq s < t \leq T$, $x, y \in \mathbb{R}$, де r і p цілі невід'ємні числа для яких $2r+p \leq 2$; D_s^r — символ частинної похідної по s порядку r ; D_x^p — символ частинної похідної по x порядку p ; c, h — додатні сталі; α — стала з умови 2). До того ж, G_i зображається у вигляді

$$G_i(s, x, t, y) = Z_i(s, x, t, y) + Z_i'(s, x, t, y), \quad (14)$$

де

$$Z_i(s, x, t, y) = [2\pi b_i(t, y)(t-s)]^{-\frac{1}{2}} \times \exp \left\{ -\frac{(y-x)^2}{2b_i(t, y)(t-s)} \right\},$$

а функція Z_i' задовольняє нерівності

$$|D_s^r D_x^p Z_i'(s, x, t, y)| \leq c(t-s)^{-\frac{1+2r+p-\alpha}{2}} \times \exp \left\{ -h \frac{(y-x)^2}{t-s} \right\}, \quad (15)$$

при всіх $0 \leq s < t \leq T$, $x, y \in \mathbb{R}$, $2r+p \leq 2$.

Розв'язок задачі (5)-(9) будемо шукати у вигляді

$$u(s, x, t) = \int_{\mathbb{R}} G_i(s, x, t, y) \varphi(y) dy + \int_s^t G_i(s, x, \tau, r) V_i(\tau, t) d\tau + \int_s^t G_i(s, x, \tau, r_i) V_{i+2}(\tau, t) d\tau, \quad 0 \leq s < t \leq T, \quad x \in \bar{D}_i, \quad i = 1, 2, \quad (16)$$

з невідомими функціями V_k , $k = \bar{1, 4}$, які знайдемо з умов (7)-(9). Потенціал Пуассона у правій частині виразу (16) надалі позначатимемо через $u_{i0}(s, x, t)$, а потенціали простого шару — через $u_{i1}(s, x, t)$ та $u_{i2}(s, x, t)$ відповідно.

Зауважимо, що коли взяти до уваги співвідношення (5)-(7), то умова спряження (8) зведеться до такої рівності

$$u(s, r, t) = \varphi(r) - \int_s^t g(\tau, t) d\tau, \quad (17)$$

де

$$g(\tau, t) = q_1(\tau) \frac{\partial u(\tau, r-, t)}{\partial x} - q_2(\tau) \frac{\partial u(\tau, r+, t)}{\partial x} + \int_{D_1 \cup D_2} [u(\tau, 0, t) - u(\tau, y, t)] \mu(\tau, dy).$$

Підставимо тепер всюди в рівностях (9) та (17) замість функції u її вираз (16) і спростимо похідні $\frac{\partial u_{i1}(s, r\mp, t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u_{i2}(s, r_i, t)}{\partial x}$, використовуючи формулу стрибка для потенціалів простого шару

$$\frac{\partial u_{i1}(s, r\mp, t)}{\partial x} = \pm \frac{V_i(s, t)}{b_i(s, r)} + \int_s^t \frac{\partial G_i(s, r, \tau, r)}{\partial x} V_i(\tau, t) d\tau, \quad \frac{\partial u_{i2}(s, r_i, t)}{\partial x} = (-1)^i \frac{V_{i+2}(s, t)}{b_i(s, r_i)} + \int_s^t \frac{\partial G_i(s, r_i, \tau, r_i)}{\partial x} V_{i+2}(\tau, t) d\tau.$$

Після нескладних перетворень ми отримуємо наступну систему інтегральних рівнянь відносно невідомих V_k , $k = \bar{1, 4}$:

$$\sum_{j=1}^4 \int_s^t N_{ij}(s, \tau) V_j(\tau, t) d\tau = \Phi_i(s, t), \quad i = 1, 2, \quad (18)$$

$$V_3(s, t) = \sum_{j=1}^4 \int_s^t K_{3j}(s, \tau) V_j(\tau, t) d\tau + \Psi_3(s, t), \quad (19)$$

$$\sum_{j=1}^4 \int_s^t R_j(s, \tau) V_j(\tau, t) d\tau = \Upsilon(s, t), \quad (20)$$

де

$$N_{ii}(s, \tau) = G_i(s, r, \tau, r) + \frac{q_i(\tau)}{b_i(\tau, r)} +$$

$$+ P_{s\tau}^{(i)} G_i(s, x, \tau, r) \Big|_{x=r}, \quad i = 1, 2,$$

$$N_{i,3-i}(s, \tau) = \frac{q_{3-i}(\tau)}{b_{3-i}(\tau, r)} +$$

$$+ P_{s\tau}^{(3-i)} G_{3-i}(s, x, \tau, r) \Big|_{x=r},$$

$$N_{i,i+2}(s, \tau) = G_i(s, r, \tau, r_i) +$$

$$+ P_{s\tau}^{(i)} G_i(s, x, \tau, r_i) \Big|_{x=r},$$

$$N_{i,5-i}(s, \tau) = P_{s\tau}^{(3-i)} G_{3-i}(s, x, \tau, r_{3-i}) \Big|_{x=r},$$

$$P_{st}^{(i)} f(s, x) = \int_s^t \left((-1)^{i+1} q_i(\rho) \frac{\partial f(\rho, x)}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \int_{D_i} [f(\rho, x) - f(\rho, y)] \mu(\rho, dy) \right) d\rho,$$

$$K_{31}(s, \tau) = -b_1(s, r_1) L_s^{(1)} G_1(s, x, \tau, r) \Big|_{x=r_1},$$

$$K_{33}(s, \tau) = -b_1(s, r_1) L_s^{(1)} G_1(s, x, \tau, r_1) \Big|_{x=r_1},$$

$$K_{3j}(s, \tau) = 0, \quad j = 2, 4,$$

$$R_2(s, \tau) = L_s^{(2)} G_2(s, x, \tau, r) \Big|_{x=r_2},$$

$$R_4(s, \tau) = L_s^{(2)} G_2(s, x, \tau, r_2) \Big|_{x=r_2},$$

$$R_j(s, \tau) = 0, \quad j = 1, 3,$$

$$\Phi_i(s, t) = \varphi(r) - u_{i0}(s, r, t) -$$

$$- \sum_{j=1}^2 P_{st} u_{j0}(s, r, t), \quad i = 1, 2,$$

$$\Psi_3(s, t) = -b_1(s, r_1) L_s^{(1)} u_{10}(s, r_1, t),$$

$$\Upsilon(s, t) = -L_s^{(2)} u_{20}(s, r_2, t).$$

Відзначимо, що рівняння (19) є рівнянням Вольтерра другого роду, а рівняння в (18) та (20) — рівняннями Вольтерра першого роду, які за допомогою прийому Гольмгрена зводяться до еквівалентних

рівнянь Вольтерра другого роду. Визначимо оператор ($0 \leq s < t \leq T$)

$$\mathcal{E}_{st} \Phi(s, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{ds} \int_s^t (\rho - s)^{-\frac{1}{2}} \Phi(\rho, t) d\rho,$$

і подіємо ним на обидві частини кожного з рівнянь в (18), (20). В отриманих виразах, змінивши порядки інтегрування по ρ і τ , спростимо похідні від інтегралів залежних від параметрів, використовуючи таке правило:

$$\frac{\partial}{\partial s} \int_s^t I(s, \tau) d\tau = \int_s^t \frac{\partial}{\partial s} I(s, \tau) d\tau,$$

якщо $\lim_{s \uparrow \tau} I(s, \tau) = 0$. Після виконання вказаних дій система інтегральних рівнянь (18)–(20) набуде вигляду

$$V_i(s, t) = \sum_{j=1}^4 \int_s^t K_{ij}(s, \tau) V_j(\tau, t) d\tau + \Psi_i(s, t), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (21)$$

де

$$K_{ii}(s, \tau) = \sqrt{b_i(s, r)} [\mathcal{E}_{s\tau} Z'_i(s, r, \tau, r) + \mathcal{E}_{s\tau} Q_i(s, \tau)], \quad i = 1, 2,$$

$$K_{ij}(s, \tau) = \sqrt{b_i(s, r)} \mathcal{E}_{s\tau} N_{ij}(s, \tau), \quad i = 1, 2, \quad j \neq i,$$

$$K_{4j}(s, \tau) = \sqrt{b_2(s, r_2)} \mathcal{E}_{s\tau} R_j(s, \tau), \quad j = \overline{1, 3},$$

$$K_{44}(s, \tau) = \sqrt{b_2(s, r_2)} [\mathcal{E}_{s\tau} Z'_2(s, r_2, \tau, r_2) - \mathcal{E}_{s\tau} J(s, \tau)], \quad 0 \leq s < \tau < t \leq T,$$

$$Q_i(s, \tau) = \frac{q_i(\tau)}{b_i(\tau, r)} + P_{s\tau}^{(i)} G_i(s, x, \tau, r) \Big|_{x=r}, \quad i = 1, 2,$$

$$J(s, \tau) = \int_{\overline{D_2} \setminus \{r_2\}} G_2(\rho, y, \tau, r_2) \pi_2(s, dy),$$

$$\Psi_i(s, t) = -\sqrt{b_i(s, r)} \mathcal{E}_{st} \Phi_i(s, t), \quad i = 1, 2,$$

$$\Psi_4(s, t) = -\sqrt{b_2(s, r_2)} \mathcal{E}_{st} \Upsilon(s, t).$$

Використовуючи методи, запропоновані нами у роботах [13, 14] для дослідження по-

дібних систем інтегральних рівнянь Вольterra другого роду, встановлюємо, що для функцій Ψ_i в (21), при всіх $0 \leq s < t \leq T$, виконується нерівність

$$|\Psi_i(s, t)| \leq c_0 \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}}, \quad (22)$$

і що ядра K_{ij} можна зобразити у вигляді

$$K_{ij}(s, \tau) = H_{ij}(s, \tau) + H'_{ij}(s, \tau), \quad (23)$$

де

$$\begin{aligned} H_{33}(s, \tau) &= -b_1(s, r_1) \int_{D_1(\delta)} [Z_1(s, r_1, \tau, r_1) - \\ &\quad - Z_1(s, y, \tau, r_1)] \pi_1(s, dy), \\ H_{44}(s, \tau) &= -\sqrt{b_2(s, r_2) b_2(\tau, r_2)} \times \\ &\quad \times \int_{D_2(\delta)} \frac{\partial Z_2}{\partial y}(s, y, \tau, r_2) \pi_2(s, dy), \\ H_{ij}(s, \tau) &= 0, \quad i = 1, 2 \quad \text{або} \quad i \neq j, \end{aligned}$$

а для функції H'_{ij} справджується нерівність

$$|H'_{ij}(s, t)| \leq h(\delta) \|\varphi\| (t-s)^{-1+\frac{\alpha}{2}}. \quad (24)$$

Тут c_0 , $h(\delta)$ — деякі додатні сталі, до того ж стала h залежить від вибору δ (δ — довільне додатне число); $D_j(\delta) = \{y \in D_j : |y - r_j| < \delta\}$.

Зважаючи на неінтегровну особливість деяких ядер K_{ij} , яка виникає за рахунок функцій H_{ij} , ми поки що не можемо стверджувати, що система інтегральних рівнянь (21) має розв'язок. Доведемо, що розв'язок цієї системи все ж таки існує і його можна знайти за допомогою методу послідовних наближень, тобто подати у вигляді суми функціонального ряду

$$V_i(s, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_i^{(k)}(s, t), \quad i = \overline{1, 4}, \quad (25)$$

де

$$\begin{aligned} V_i^{(0)}(s, t) &= \Psi_i(s, t), \\ V_i^{(k)}(s, t) &= \sum_{j=1}^4 \int_s^t K_{ij}(s, \tau) V_j^{(k-1)}(\tau, t) d\tau, \\ &\quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Знайдемо оцінку для функції $V_i^{(1)}$. Для цього проведемо наступні перетворення:

$$\begin{aligned} V_i^{(1)}(s, t) &= \sum_{j=1}^4 \int_s^t K_{ij}(s, \tau) V_j^{(0)}(\tau, t) d\tau = \\ &= \int_s^t H_{ii}(s, \tau) \Psi_i(\tau, t) d\tau + \\ &\quad + \sum_{j=1}^4 \int_s^t H'_{ij}(s, \tau) \Psi_j(\tau, t) d\tau = \\ &= \tilde{V}_i^{(1)}(s, t) + \hat{V}_i^{(1)}(s, t), \quad i = \overline{1, 4}. \quad (26) \end{aligned}$$

З нерівностей (22) та (24) отримуємо оцінку для другого доданка у виразі (26):

$$\begin{aligned} |\hat{V}_i^{(1)}(s, t)| &\leq 4c_0 h(\delta) \|\varphi\| \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1+\alpha}{2})} \times \\ &\quad \times (t-s)^{-\frac{1-\alpha}{2}}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (27) \end{aligned}$$

де c_0 , $h(\delta)$ — сталі з (22) і (24) відповідно.

Оцінимо $\tilde{V}_i^{(1)}(s, t)$ при $i = 3, 4$ (згідно з нашими позначеннями $\tilde{V}_1^{(1)} = \tilde{V}_2^{(1)} = 0$). У випадку, коли $i = 3$, маємо

$$\begin{aligned} |\tilde{V}_3^{(1)}(s, t)| &\leq \frac{c_0 B \|\varphi\|}{\sqrt{2\pi b}} \int_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} d\tau \int_{D_1(\delta)} (1 - e^{-\frac{(y-r_1)^2}{2b \cdot (\tau-s)}}) \pi_1(s, dy) = \\ &= \frac{c_0 B \|\varphi\|}{\sqrt{2\pi b}} \int_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (\tau-s)^{-\frac{1}{2}} d\tau \times \\ &\quad \times \int_{D_1(\delta)} \pi_1(s, dy) \left| \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \theta} e^{-\frac{\theta(y-r_1)^2}{2b \cdot (\tau-s)}} d\theta \right| = \\ &= \frac{c_0 B \|\varphi\|}{2b\sqrt{2\pi b}} \int_{D_1(\delta)} (y-r_1)^2 \pi_1(s, dy) \times \\ &\quad \times \int_0^1 e^{-\frac{\theta(y-r_1)^2}{2b \cdot (\tau-s)}} d\theta \int_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times (\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{\theta(y-r_1)^2}{2b \cdot (\tau-s)} \frac{t-\tau}{\tau-s}} d\tau, \end{aligned}$$

де b, B — сталі з 1). У внутрішньому інтегралі останнього співвідношення зробимо заміну змінних $z = \frac{t-\tau}{\tau-s}$. Тоді

$$\begin{aligned} |\tilde{V}_3^{(1)}(s, t)| &\leq \frac{c_0 B \|\varphi\|}{2b\sqrt{2\pi b}(t-s)} \times \\ &\times \int_{D_1(\delta)} (y-r_1)^2 \pi_1(s, dy) \int_0^1 e^{-\frac{\theta(y-r_1)^2}{2b \cdot (t-s)}} d\theta \times \\ &\times \int_0^\infty z^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\theta(y-r_1)^2}{2b \cdot (t-s)} \cdot z} dz \leq \\ &\leq \frac{c_0 B \|\varphi\|}{2b} (t-s)^{-\frac{1}{2}} \int_{D_1(\delta)} |y-r_1| \pi_1(s, dy) \times \\ &\times \int_0^1 \theta^{-\frac{1}{2}} d\theta \leq c_0 p_1(\delta) \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}}, \quad (28) \end{aligned}$$

де $p_1(\delta) = \frac{B}{b} \max_{s \in [0, T]} \int_{D_1(\delta)} |y-r_1| \pi_1(s, dy)$.

Якщо $i = 4$, то для функції $\tilde{V}_4^{(1)}(s, t)$ справджується така нерівність:

$$\begin{aligned} |\tilde{V}_4^{(1)}(s, t)| &\leq \\ &\leq c_0 \sqrt{B} \|\varphi\| \int_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} \sqrt{b_2(\tau, r_2)} d\tau \times \\ &\times \int_{D_2(\delta)} \left| \frac{\partial Z_2}{\partial y}(s, y, \tau, r_2) \right| \pi_2(s, dy) \leq \\ &= \frac{c_0 \sqrt{B} \|\varphi\|}{b\sqrt{2\pi}} \int_{D_2(\delta)} |y-r_2| e^{-\frac{y^2}{2B \cdot (t-s)}} \pi_2(s, dy) \times \\ &\times \int_s^t (t-\tau)^{-\frac{1}{2}} (\tau-s)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{(y-r_2)^2}{2B \cdot (t-s)} \cdot \frac{t-\tau}{\tau-s}} d\tau \leq \\ &\leq c_0 p_2(\delta) \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}}, \quad (29) \end{aligned}$$

де $p_2(\delta) = \frac{B}{b} \max_{s \in [0, T]} \int_{D_2(\delta)} \pi_2(s, dy)$.

Об'єднуючи (27), (28) і (29), знаходимо оцінку для $V_i^{(1)}(s, t)$:

$$\begin{aligned} |V_i^{(1)}(s, t)| &\leq c_0 \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \left[\frac{4h(\delta) T^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right)} + p(\delta) \right], \quad i = \overline{1, 4}, \end{aligned}$$

де $c_0, h(\delta)$ — сталі з (22) і (24) відповідно, $p(\delta) = \max\{p_1(\delta), p_2(\delta)\}$.

Далі, методом математичної індукції доводимо, що члени $V_i^{(k)}$ ряду (25) задовольняють нерівність:

$$\begin{aligned} |V_i^{(k)}(s, t)| &\leq c \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^k C_k^m a^{(k-n)} p(\delta)^n, \\ k &= 0, 1, 2, \dots, \quad i = \overline{1, 4}, \quad (30) \end{aligned}$$

де

$$a^{(n)} = \frac{(4h(\delta) T^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right))^n \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+n\alpha}{2}\right)}, \quad n = \overline{0, k}.$$

Виберемо $\delta = \delta_0$ у такий спосіб, щоб $p(\delta_0) < 1$ і позначимо $h = h(\delta_0)$, $p = p(\delta_0)$. Тоді, враховуючи (30), будемо мати

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |V^{(k)}(s, t, \varphi)| &\leq c_0 \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^k C_k^m a^{(k-m)} p^m = \\ &= c_0 \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} a^{(k)} \sum_{m=0}^{\infty} C_{k+m}^m p^m = \\ &= c_0 \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{(k)}}{(1-p)^{k+1}} = \\ &= c_0 \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{4h}{1-p} T^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^k}{\Gamma\left(\frac{1+k\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{1-p}. \quad (31) \end{aligned}$$

Оцінка (31) забезпечує абсолютну збіжність ряду (25) при $0 \leq s < t \leq T$. Це означає, що функція $V(s, t)$ існує, до того ж вона є неперервною для $s \in [0, t)$ і для неї справджується нерівність

$$|V(s, t)| \leq c \|\varphi\| (t-s)^{-\frac{1}{2}}, \quad (32)$$

при всіх $0 \leq s < t \leq T$.

З допомогою оцінок (13) і (32) нескладно переконатися в тому, що побудована функція $u(s, x, t)$ є розв'язком задачі (5)-(9), який при виконанні умови узгодження

$$L_t^{(2)} \varphi(r_2) = 0 \quad (33)$$

належить до класу (10).

Отже, нами доведено наступну теорему.

Теорема 1. *Нехай виконані умови 1), 2) і а)-в). Тоді для будь-якої функції $\varphi \in C(\bar{D})$, що задовольняє умову узгодження (33), існує єдиний розв'язок задачі (5)-(9) з класу (10). Якщо коефіцієнти операторів $A_s^{(i)}$, $i = 1, 2$, продовжено на $[0, T] \times \mathbb{R}$ так, що властивості 1), 2) виконуються при всіх $(s, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, а функцію φ продовжено на \mathbb{R} так, що $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, то розв'язок задачі (5)-(9) можна зобразити у вигляді*

$$u(s, x, t) = \int_{\mathbb{R}} G_i(s, x, t, y) \varphi(y) dy + \\ + \int_s^t G_i(s, x, \tau, r) V_i(\tau, t) d\tau + \\ + \int_s^t G_i(s, x, \tau, r_i) V_{i+2}(\tau, t) d\tau, \\ 0 \leq s \leq t \leq T, \quad x \in \bar{D}_i, \quad i = 1, 2,$$

де G_i — фундаментальний розв'язок оператора $\frac{\partial}{\partial s} + A_s^{(i)}$, а набір функцій $(V_i)_{i=1,4}$ є розв'язком системи інтегральних рівнянь Вольтерра другого роду (21).

3. Побудова процесу. Розглянемо двопараметричну сім'ю лінійних операторів T_{st} , $0 \leq s < t \leq T$, які діють на функцію $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$ за таким правилом:

$$T_{st}\varphi(x) = u(s, x, t, \varphi), \quad x \in \bar{D}, \quad (34)$$

де $u(s, x, t, \varphi)$ — розв'язок задачі (5)-(9) з функцією φ в умові (6).

Позначимо через $C_L(\mathbb{R})$ підпростір $C_b(\mathbb{R})$, що складається з усіх функцій $\varphi \in C_b(\mathbb{R})$, для яких виконується умова (33). Нескладно переконатися, що $C_L(\mathbb{R})$ є замкнутим у $C_b(\mathbb{R})$ і тому він є банаховим простором. Більше того, оператори T_{st} залишають простір $C_L(\mathbb{R})$ інваріантним, тобто

$$\varphi \in C_L(\mathbb{R}) \implies T_{st}\varphi \in C_L(\mathbb{R}).$$

Зауважимо, що сім'я операторів T_{st} в просторі $C_L(\mathbb{R})$ має такі властивості:

- i) якщо $\varphi(x) \geq 0$ при всіх $x \in \bar{D}$, то $T_{st}\varphi(x) \geq 0$ при всіх $0 \leq s < t \leq T$, $x \in \bar{D}$;

- ii) T_{st} — стискуючі оператори, тобто вони не збільшують норму елемента;

- iii) $T_{st} = T_{s\tau}T_{\tau t}$, $0 \leq s < \tau < t \leq T$ (напівгрупова властивість);

- iv) якщо послідовність функцій $\varphi_n \in C_L(\mathbb{R})$ така, що $\sup_n \|\varphi_n\| < \infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$ при всіх $x \in \mathbb{R}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} T_{st}\varphi_n(x) = T_{st}\varphi(x)$ при всіх $0 \leq s < t \leq T$, $x \in \mathbb{R}$.

Доведення властивості i) проводиться з використанням принципу максимуму подібно до доведення теореми 1. Властивість ii) випливає з i) і з того факту, що $T_{st}1 = 1$ при $0 \leq s < t \leq T$. Напівгрупова властивість операторів T_{st} є наслідком теореми 1. Справді, для того, щоб знайти $u(s, x, t) = T_{st}\varphi(x)$, коли дано, що $\lim_{s \uparrow t} u(s, x, t) = \varphi(x)$, можна спочатку розв'язати задачу у часовому проміжку $[\tau, t]$, а потім розв'язати її у часовому проміжку $[s, \tau]$ з тією "початковою" функцією $u(\tau, x, t) = T_{\tau t}\varphi(x)$, яку було отримано; інакше кажучи, $T_{st}\varphi(x) = T_{s\tau}(T_{\tau t}\varphi)(x)$, $\varphi \in C_L(\mathbb{R})$, або $T_{st} = T_{s\tau}T_{\tau t}$. Нарешті, властивість iv) є очевидним наслідком теореми Лебега про граничний перехід під знаком інтеграла.

З властивостей i)-iv) операторів T_{st} випливає таке твердження (див. [17]).

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми 1. Тоді двопараметрична сім'я лінійних операторів T_{st} , $0 \leq s \leq t \leq T$, визначена рівністю (34), описує неоднорідний процес Феллера на \bar{D} такий, що в областях D_1 і D_2 він збігається із дифузійними процесами керованими операторами $A_s^{(1)}$ і $A_s^{(2)}$ відповідно, а його поведінка в точках r , r_1 , r_2 описується умовою спряження (1) та крайовими умовами (2), (3) відповідно.*

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Feller W. The parabolic differential equations and associated semi-groups of transformations // Ann. of Math. Soc. — 1952. — 55. — P. 468-519.
2. Венцель А.Д. Полугруппы операторов, соответствующие обобщенному дифференциальному оператору второго порядка // ДАН СССР. — 1956. — 111, N2. — С. 269-272.

-
3. *Вентцель А.Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. – 1959. – **4**, N2. – С. 172-185.
 4. *Скорород А.В.* Стохастические уравнения для процессов диффузии с границами // Теория вероятн. и ее примен. – 1961. – **6**, N3. – С. 287-298.
 5. *Ватанабэ С., Икеда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – Москва: Наука, 1986. – 456 с.
 6. *Конончук П.П., Копитко Б.І.* Про напівгрупу операторів Феллера, яка описує процес дифузії на півпрямій з нелокальною граничною умовою // Матем. вісник НТШ. – 2007. – **4**. – С. 129-138.
 7. *Копитко Б.І., Шевчук Р.В.* Модель процесу неоднорідної дифузії на півпрямій із загальною крайовою умовою Феллера-Вентцеля // Карпатські математичні публікації. – 2011. – **3**, N2. – С. 88-99.
 8. *Пилипенко А.Ю.* Об отображении Скорохода для уравнений с отражением с возможностью скачкообразного выхода из границы // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, N9. – С. 1241-1256.
 9. *Копитко Б.І.* О склеивании двух диффузионных процессов на прямой // В кн.: Вероятностные методы бесконечномерного анализа. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 84-101.
 10. *Langer H., Schenk W.* Knotting of one-dimensional Feller processes // Math. Nachr. – 1983. – **113**. – P. 151-161.
 11. *Портенко М.І.* Процеси дифузії в середовищах з мембранами. – Київ: Інститут математики НАН України, 1995. – 199 с.
 12. *Конончук П.П., Копитко Б.І.* Напівгрупи операторів, які описують феллерівський процес на прямій, склеєний з двох дифузійних процесів // Теорія ймовір. та матем. статист – 2011. – **84**. – С. 86-96.
 13. *Копитко Б.І., Шевчук Р.В.* On pasting together two inhomogeneous diffusion processes on a line with the general Feller-Wentzell conjugation condition // Theory of Stochastic Processes – 2011. – **17 (33)**, N2. – P. 55-70.
 14. *Shevchuk R.V.* Pasting of two one-dimensional diffusion processes // Annales Mathematicae et Informaticae – 2012. – **39**. – P. 225-239.
 15. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа. – Москва: Мир, 1968. – 427 с.
 16. *Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – Москва: Наука, 1967. – 736 с.
 17. *Дынкин Е.Б.* Марковские процессы. – Москва: Физматгиз, 1963. – 859 с.